АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

6352—7364

*

№ 8 1958

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, М. А. Наймарк, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, К. А. Рыбников, Н. В. Смирнов, С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *А. А. Конюшков*

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии . . . 3
Преподавание математики 5
Основания математики и математическая логика 7
Теория чисел 9
Алгебра 14
Многочлены и линейная алгебра 14
Группы 19
Поля, кольца и структуры 25
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 33
Теория функций действительного переменного 36
Теория множеств 40
Приближение функций полиномами и их обобщениями 42
Теория функций комплексного переменного 50
Дифференциальные уравнения 60
Обыкновенные дифференциальные уравнения 60
Уравнения в частных производных . . . 74
Приложения к физике, технике и естественным наукам 87
Интегральные уравнения 96
Приложения интегральных уравнений —
Вариационное исчисление 98
Анализ (другие вопросы) 101
Числовые ряды 103
Специальные функции 105
Интегральные преобразования и операционное исчисление 106
Приложения общих методов математического анализа 109
Функциональный анализ 111
Теория вероятностей 119
Математическая статистика 130
Теория игр и математическая экономика 136
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 138
Геометрия 143
Приложения геометрии 144
Элементарная геометрия 145
Проективная и начертательная геометрия 146
Алгебраическая геометрия 148
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 152
Геометрия n-мерного пространства 156
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 162
Метрические методы в геометрии 164
Выпуклые многообразия 165
Численные и графические методы 167
Таблицы . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы 180
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . . . . —
Авторский указатель 201

Адрес редакции: Москва, Д — 219, Балтийский пос., д. 42-Б

REFERATIVNYI ZHURNAL MATHEMATIKA

EDITOR *S. M. Nikolsky*
EDITORIAL BOARD: *P. S. Alexandrov, S. P. Finikov, A. N. Kolmogorov, Yu. V. Linnik, A. I. Marcushevich, M. A. Naimark, V. V. Nemycky, S. M. Nikolsky, P. S. Novikov, D. Yu. Panov, K. A. Rybnikov, N. V. Smirnov, I. N. Vekua*
EXECUTIVE SECRETARY *A. A. Konjushkov*

CONTENTS

General
- History. Biography
- Teaching of mathematics

Foundations. Mathematical logic

Theory of numbers

Algebra
- Polynomials, linear algebra
- Groups
- Fields, rings, lattices
- Algebraic theory of communication and control circuits

Topology

Theory of functions of real variables
- Theory of sets
- Approximations of functions by polynomials and by their generalizations

Theory of functions of complex variables

Differential equations
- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Applications to physics, technology and natural sciences

Integral equations
- Applications of integral equations

Calculus of variations

Analysis (other aspects)
- Numerical series
- Special functions
- Integral transforms, operational calculus
- Applications of general methods of mathematical analysis

Functional analysis

Theory of probability
- Mathematical statistics
- Theory of games, mathematical economics
- Applications of probabilities and statistical methods

Geometry
- Applications of geometry
- Elementary geometry
- Projective and descriptive geometry
- Algebraic geometry
- Differential geometry of 3-dimensional space
- Geometry of n-dimensional space
- Global theory of differentiable manifolds
- Metric methods in geometry
- Convex manifolds

Numerical and graphical methods
- Tables

Computers and mathematical devices
- Applications of computer devices

Author index

Editorial Office Moscow, D-219, Baltijsky poselok, 42-B

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

Рефераты 6352—7364 **№ 8** **Август 1958 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

6352. **40 лет советской науки. Несмеянов А. Н.**, Вестн. АН СССР, 1957, № 11, 17—35

6353. **Математика на Украине за 40 лет Советской власти.** Укр. матем. ж., 1957, 9, № 4, 355—358

В общих чертах изложены основные направления математических исследований в Украинской ССР за последние 40 лет, а также указаны имена представителей этих направлений. Б. В. Гнеденко

6354. **Первое совещание математиков Украины. Гнеденко Б. В.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 6, 215—220

См. РЖМат, 1958, 5319.

6355. **Общепольская конференция математиков** (Ogólnopolska konferencja matematyków), Nauka polska, 1957, 5, № 3, 172—174 (польск.)

16—18 мая 1957 г. в Варшаве Математическим институтом Польской академии наук была созвана конференция польских математиков по гармоническому анализу, в которой приняли участие и иностранные гости. Были прочитаны доклады: Чандрасекхаран (Бомбей), Суммирование по точкам решетки; Мандельбройт (Париж), Примыкающие ряды; Мазур (Варшава), Ряды с лакунами; Стоун (Чикаго), Спектральная теория обыкновенных сингулярных дифференциальных уравнений; Чандрасекхаран, Функциональные уравнения и точки решетки. В работе конференции приняли также участие Зигмунд (Чикаго), Хаммер (Стокгольм), Салем (Париж). Кроме того, на объединенном семинаре группы топологии и группы основ математики Стоун сделал доклад «Алгебраические аспекты логики»; на заседании Польского математического общества были заслушаны доклады: Мандельбройт, О квазианалитичности прерывных функций; Чандрасекхаран, Об организации математики в Индии; приводится краткое содержание последнего. Э. Я. Кольман

6356. **Математика в Польше. Серпинский** (Les mathématiques en Pologne. Sierpiński Wacław), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1957, 12, № 1-2, 125—132 (франц.)

Краткий очерк развития математики в Польше, начиная с кануна первой мировой войны. Основное внимание уделено направлениям исследований в Варшаве, организации журнала «Fundamenta Mathematicae» и его значению для развития соответствующих разделов математики, потерям польской математики во время второй мировой войны и организации математического института Польской академии наук, объединившего всех активно работающих математиков и имеющего отделения в ряде городов Польши.

Б. В. Гнеденко

6357. **Тимишорский педагогический институт. Попа** (Institutul pedagogic — Timişoara. Popa Constantin), Gaz. mat. şi fiz., 1957, B8, № 6, 316—319 (рум.)

Институт был организован в 1948 г. при Политехническом институте. Сначала срок обучения был 3 года, с 1953 г.— 4 года, а с 1957 г.— 5 лет.

За 1951—1956 гг. Институт подготовил более 300 преподавателей физики и математики. А. Н. Гливич

6358. **Летний международный математический центр. 1-й цикл 1957 г. Арифметическая и алгебраическая геометрия. Варенна, 22 мая 1957. Бомпьяни** (Centro internazionale matematico estivo. 1 ciclo 1957 — Geometria aritmetica e algebrica. (Varenna, 22 maggio 1957). Bompiani E.), Ricerca scient., 1957, 27, № 8, 2561—2563 (итал.)

Информация о работе центра и резюме докладов: Келер (Лейпциг), Об арифметической геометрии; Рот (Лондон), О вопросах рациональности в алгебраической геометрии. Годо (Льеж), О построении канонических и биканонических систем одной алгебраической поверхности; Кустаанхеймо (Хельсинки), Об отношениях конгруэнции и порядка на конечных плоскостях; Сегре, О геометрии конечных плоскостей. Э. Я. Кольман

6359. **Съезд Общества прикладной математики и механики в Гамбурге в 1957 г. Бабушка** (Sjezd společnosti pro aplikovanou matematiku a mechaniku (GAMM-Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik) v Hamburku 1957. Babuška Ivo), Aplikace mat., 1957, 2, № 4, 317—320 (чешск.)

Краткий обзор работы съезда, происходившего 23—26 апреля 1957 г. Г. Ф. Рыбкин

6360. **Симпозиум по автоматике в Милане. Солодовников В. В.**, Вестн. АН СССР, 1956, № 8, 72—74

Краткое сообщение о международном симпозиуме, происходившем 8—13 апреля 1956 г. в Милане.

Н. П. Жидков

6361. **К вопросу о роли математики в борьбе двух основных направлений в философии. Зелькина О. С.**, Уч. зап. Саратовск. ун-та, 1956, 58, 354—384

На историческом материале показывается, что материализм, опираясь на естествознание, тем самым всегда опирался и на математику. Основой же использования математики для «обоснования» идеализма всегда служил как отрыв абстрактного математического мышления от практики, так и отрыв математических абстракций от других сторон материальной действительности. Э. Я. Кольман

6362. **Определение в математическом умозаключении. Шатле** (La définition dans le raisonnement mathématique. Châtelet Albert), Ann. Univ. Paris, 1954, 24, № 1, 3—23 (франц.)

Делается попытка установить понятие «определение», исходя из высказываний ученых самых различных эпох, начиная от Аристотеля и кончая Лебегом и Данжуа. Приводятся и анализируются выдержки из работ Евклида, Эйлера, Адамара, Бурбаки и др. В статье рассмат-

риваются: логическая форма определения, определяющее, определяемое, природа эквивалентности.

Л. Е. Майстров

6363. Развитие понятия «два» в арифметической терминологии. Фишер (Building concepts of two in the arithmetic vocabulary. Fisher Lewis R.), School Sci. and Math., 1957, 57, № 8, 636—638 (англ.)

Автор считает не совсем правильным мнение о том, что современная арифметическая терминология точна и удобна, так как каждое из чисел может иметь много прямых и переносных значений в зависимости от того, как они используются. Благодаря помощи группы из 30 учителей получен большой список значений числа 2 (более 150).

Р. А. Симонов

6364. Сущность бесконечности в математике. Карл (Das Wesen des Unendlichen in der Mathematik. Karl Herbert), Wiss. Z. Pädagog. Hochschule Potsdam, Math.-naturwiss. Reihe, 1954—1955, 1, № 1, 1—11 (нем.)

6365. Техническая кибернетика. Дерош (Cybernétique industrielle. Desroches L.-J.), Navires, ports et chant., 1957, 8, № 90, 891—901 (франц.)

Краткое изложение основ кибернетики по разделам: 1. Сервомеханизмы. 2. Изучение сервомеханизмов. 3. Историческая справка. 4. Основная формула. 5. Важнейшие следствия основной формулы. 6. Устойчивость сервомеханизмов. 7. Влияние инерции. 8. Физические ограничения преобразования соотношений неизвестных. 9. Случайное возрастание. 10. Биофизические аналогии. 11. Биологические сервомеханизмы. 12. Эконометрия. 13. Экспериментальная математика. 14. Большие математические машины. 15. Будущее математических машин. 16. Человек — элемент сервомеханизма.

Н. П. Жидков

6366. Исследование операций. (Unternehmensforschung (Operations Research), Operat. Res. Quart., 1957, 8, № 4, 224—225 (англ.)

Информация о новом журнале «Unternehmensforschung», выходящем в Вюрцбурге (ФРГ) на немецком языке (с английским подзаголовком «Operation Research») 1 раз в 3 месяца.

6367 К. 45-й Индийский научный конгресс в Мадрасе. Брошюра о развитии наук и их преподавании в южной Индии, (45th Indian Science Congress Madras. Brochure on growth of science and scientific education in South India. Univ. Madras, 1958, 252 pp. 1 map) (англ.)

Глава брошюры, посвященная развитию математики и ее преподавания (стр. 127—134), содержит краткую справку о ведущих профессорах математики в 8 университетах юга Индии и их научных интересах. Наибольшее место уделено университету в Мадрасе (основан в 1857 г.). Преподавание статистики, научная работа и деятельность различных статистических организаций охарактеризованы в отдельной главе (стр. 195—218).

6368 К. Труды 45-й сессии Индийского научного конгресса. Часть 3. Резюме (Proceedings of the 45th session Indian Science Congress, Madras, 1958. Part 3. Abstracts. Calcutta, 1958, 536 pp.) (англ.)

Резюме докладов по математике и по статистике (стр. 1—22).

6369 К. Мир математики. Маленькая библиотека математической литературы от писца Ахмеса до Альберта Эйнштейна, составленная и комментированная Дж. Р. Ньюманом (The world of mathematics. A small library of literature of mathematics from A'h-mosé the Scribe to Albert Einstein, presented with commentaries and notes by James R. Newman), Vol. 1—4, New York, Simon and Schuster, 1956, 2535 pp. ill) (англ.)

Хрестоматия («антология» — по выражению Ньюмана), составленная, как говорится во введении, с целью «показать широту математических обобщений, богатство идей и разнообразие аспектов математики». Отличительной чертой хрестоматии является чисто субъективное стремление составителя «представить математику такой, какой она мне нравится». Содержит 133 темы, разбитых на 26 частей, и 89 комментариев исторического, биографического или библиографического характера. Нумерация страниц — сплошная. Структура книги:

Том I (стр. 1—724) содержит, кроме введения, 4 части.

В части 1 «Общий обзор» целиком помещена книга Джордана (Ph. E. B. Jourdan, 1879—1919) «Природа математики», являющаяся общим обзором развития математики и ее методов (развитие математики в древности, алгебра, аналитическая геометрия, анализ бесконечно малых, новые взгляды о пределах и числах).

Часть 2 посвящена историческим вопросам и биографиям математиков (в дальнейшем в скобках указываются авторы помещенных в «антологии» материалов): 1. Великие математики (Тёрнбал); 2. Папирус Ринда (Дж. Р. Ньюман); 3. Архимед (Плутарх, Витрувий); 4. Греческие математики (Томас); 5. Слово о пользе арифметики (Рекорд); 6. Иоганн Кеплер (Лодж); 7. Геометрия (Декарт); Исаак Ньютон (Анред); 9. Ньютон как человек (Кейнс); 10. Аналист (Беркли); 11—12. Гаусс — король математиков. Кели и Сильвестр (Белл); 13. Рамануджан (Ньюман); 14. Мое умственное развитие (Рассел); 15. Математика как элемент в истории мышления (Уайтхед).

Часть 3 посвящена арифметике, числам и искусству счета. 1. Исчисление песчинок (Архимед); 2. Счет (Конэш); 3. От числа к числу, от цифр к вычислениям (Смит и Гинзбург); 4. О чудесах вычисления (Болл); 5. Способность птиц к «счету» (Келер); 6. Королева математики (Белл) — речь идет о некоторых проблемах теории чисел; 7. О биномиальной теореме для дробного и отрицательного показателя степени (Ньютон); 8. Иррациональные числа (Дедекинд); 9. Определение числа (Рассел).

Часть 4 посвящена математике пространства и движения: 1—3. Точность математических законов. Постулаты науки о пространстве. О пространственной теории вещества (Клиффорд); 4. Семь мостов Кенигсберга (Эйлер); 5. Топология (Курант и Роббинс); 6. Дюрер как математик (Панофски); 7. Проективная геометрия (Клайн); 8. О происхождении и значении геометрических аксиом (Гельмгольц); 9. Симметрия (Вейль).

Том II (стр. 725 — 1414) состоит из трех частей (5—7).

В части 5 «Математический и физический мир» помещены: 1. Математика движения (Галилей); 2. Кинетическая теория газов (Бернулли); 3. Долгота (Браун); 4. Дж. К. Адамс и открытие Нептуна (Джонс); 5. Атомные числа (Мосли); 6. Лучи Рентгена (Брюгг); 7. Кристаллы и будущее физики (Корбейль); 8. Что такое исчисление вариаций и каково его применение (Менгер); 9. Мыльные пузыри (Бойс); 10. Проблема Плато (Курант и Роббинс); 11. Периодический закон химических элементов (Д. Менделеев); 12. Менделеев (Джефф); 13. Математика наследственности (Мендель); 14—15. О целесообразных размерах объектов живой природы. Математика естественного отбора (Холдейн); 16. Наследственность и квантовая теория (Шрёдингер); 17. О величине (Томпсон); 18. Принцип неопределенности (Гейзенберг); 19. Причинность и волновая механика (Шрёдингер); 20—21. Константы природы. Новый и старый законы тяготения (Эддингтон); 22. Теория относительности (Дюрелль).

Содержание части 6 составляет материал на тему «Математика и социальная наука»: 1. Густав Теодор Фехнер (Боринг) — об основателе психофизики; 2.. Клас-

сификация людей в соответствии с их способностями (Голтон); 3. Математика населения и пищи (Мальтус); 4. Математика стоимости и потребности (Курно); 5. Теория политической экономии (Джевонс); 6—7. Математика войны и внешней политики. Статистика смертельных ссор (Ричардсон); 8. Теория экономического поведения (Гурвиц); 9. Теория игр (Вайда); 10. Социология изучает язык математики (Каплан).

Часть 7 «Законы случая» содержит: 1. Относительно вероятности (Лаплас); 2—3. Красное и черное. Вероятность индукции (Пирс); 4. Применение вероятности (Кейнс). 5. Случай (Пуанкаре); Значение вероятности (Надель).

В томе III (стр. 1415—2022) насчитывается 10 сравнительно небольших частей.

В части 8 «Статистика и назначение экспериментов» находим: 1. Основы статистики рождаемости и смертности (Грант); 2. Первые страховые таблицы (Галлей); 3. Закон больших чисел (Бернулли); 4. Особая и стандартная ошибка (Типпей); 5. О среднем числе и рассеивании (Мороней); 6. Математика леди, пробующей чай (Фишер) — речь идет о постановке эксперимента на выявление статистических закономерностей; 7. Недостаток риска и достоинства предусмотрительности (Шоу).

Часть 9 посвящена теории групп —«высшему искусству абстракции»: 1. Понятие о группах (Кейзер); 2. Теория групп (Эддингтон).

Часть 10 содержит очень бедный материал о математике бесконечного: 1. Математика и метафизика (Рассел); 2. Бесконечность (Хаан).

Часть 11 посвящена математической точности и структуре математики: 1—2. О природе математической точности. Геометрия и эмпирическая наука (Хемпел); 3. Аксиоматический метод (Вильдер); 4. Доказательство Гёделя (Нагель и Ньюмен); 5. Математическая наука (Веблен и Юнг); в статье речь идет о неопределяемых элементах и недоказуемых предложениях, о существовании, безусловности и независимости в математике, о проективной и метрической геометрии и др.; 6. Математика и мир (Гаскинг) — попытка разъяснить природу математических предложений, их зависимость от повседневного опыта; 7. Математические постулаты и человеческий рассудок (Мизес).

Часть 12 трактует о путях математического мышления: 1. Изучение без наблюдения (Сильвестр); 2. Сущность математики (Пирс); 3. Экономия науки (Мах); 4. Измерения (Кэмпбелл); 5. Законы чисел и применения математики в науке (Вейль).

Часть 13 названа «Математика и логика». Она содержит подборки: 1. Математический анализ и логика (Булль); 2. История символической логики (Льюис и Лэнгфорд); 3. Символическая система обозначений (Нагель); 4. Символическая логика (Тарский).

Часть 14 носит название «Безрассудность математики» и содержит две подборки: 1. Парадокс потерянный и парадокс возвращенный (Кеснер и Ньюмен); 2. Кризис интуиции (Хаан).

Часть 15 посвящена вопросу «Как решить это» (Пойа).

Часть 16 составитель назвал «Математический словарь». Она состоит из одной подборки «Новые названия для старого» (Кеснер и Ньюмен).

Часть 17 посвящена «Математике как искусству» (Салливан).

Том IV (стр. 2023—2535) имеет 9 частей.

Часть 18, названная «Математик», состоит из трех статей: 1. В защиту математиков (Харди); 2. Математическое творчество (Пуанкаре); 3. Математик (Ньюмен) — рассуждение о природе умственной работы математика.

Очень бедно представлена часть 19, имеющая название «Математические машины: могут ли машины мыслить?». В ней всего три статьи: 1. Общая и логическая теория автомата (Ньюмен); 2. Могут ли машины мыслить (Тьюринг); 3. Машины, играющие в шахматы (Шеннон).

Часть 20 «Математика в военном деле» состоит из: 1. Математика в военном деле (Ланчестер) и 2. Как охотиться за подводной лодкой (Морзе и Кембелл).

Часть 21 называется «Математическая теория искусства». В ней приведена только одна подборка «Математика эстетики» (Биркгоф).

Часть 22 носит название «Математика добра». В ней также одна подборка Биркгофа «Математический подход к этике».

Часть 23 посвящена математике и литературе: 1. Циклоидальный пудинг (Свифт); 2. Юный Архимед (Хакслей); 3. Геометрия в южной части Тихого океана (Уорнер); 4. Жесткая логика (Мэлоней); 5. Закон (Котес).

Часть 24 содержит одну подборку: «Математика и музыка» (Джинс).

Часть 25 носит название «Математика как ключ к культуре»: 1. Значение чисел (Шпенглер); 2. Примечания к антропологии (Уайт).

Часть 26, завершающая «антологию», имеет своим содержанием развлечения, головоломки, фантазии. Здесь приведено 10 подборок различных авторов, с забавными названиями, как например, «Рычаг Магомета» (Курант и Роббинс), «Простая математика и теннис» (Бромвич), «Математика для игроков в гольф» (Лекок) и т. п.

В конце книги — подробный предметно-именной алфавитный указатель (стр. 2472—2535) и биографическая справка об авторе. Г. Ф. Рыбкин

6370 К. Математика для практиков. Хау (Mathematics for the practical man. New ed. Howe George. Princeton (N. J.), Van Nostrand; London, Macmillan, 1957, 157 pp., ill., 24 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 417, 8 (англ.)

6371 Ж. Известия высших учебных заведений Министерства высшего образования СССР. Геодезия и аэрофотосъемка. Отв. ред. Мазмишвили А. И. М., двухмесячный, 42 р. в год

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

6372. «Неделимые» и непрерывное в древней русской литературе. Зубов (Les «indivisibles» et le continu dans l'ancienne littérature russe. Zoubov V.), Rev. histoire sci., 1957, **10**, № 2, 97—109 (франц.)

В ряде русских рукописей XI в. содержатся отрывки абстрактного характера, посвященные понятиям числа, непрерывности и дискретности. Они показывают, что в то время на Руси были известны идеи «Диалектики» Аристотеля; к концу XVII в. была сделана первая попытка перевести с латинского «Физику» Аристотеля. Рукописи отражают борьбу трех философских течений: сторонников математического атомизма, физического атомизма и аристотелизма. Эта борьба была тесно связана с общим состоянием европейской науки того времени. Ю. С. Цапин

6373. «О центре тяжести тел» Луки Валерио. Тоси («De centro gravitatis solidorum» di Luca Valerio. Tosi Armída), Period. mat., 1957, **35**, № 4, 189—201 (итал.)

Лука Валерио (1552—1618) в своей книге «О центре тяжести тел» (Рим, 1604) дал, по мнению автора, две новых идеи, представляющие зачаток интегрального исчисления. Одна из них состоит в заключении тела, центр тяжести которого разыскивается между двумя ступенчатыми поверхностями, разность объемов которых может быть сделана сколько угодно малой, а вторая

равносильна современной теореме о равенстве отношений двух переменных величин и их пределов. Однако первая из этих идей целиком принадлежит Архимеду (даже иллюстрирующий ее чертеж находится в книге «О коноидах и сфероидах»); что касается второй, то она представляет (правда, оригинальное) распространение известной теории Евдокса об отношении несоизмеримых величин (5-я книга «Начал» Евклида). Представляет интерес теорема Валерио об объеме сегмента гиперболоида, образованного вращением вокруг своей оси гиперболы:

$$y^2 = k^2x^2 + 2ak^2x.$$

Валерио показывает, что этот объем будет равен сумме объемов конуса, уравнения образующих которого суть $y = \pm kx$, и параболоида, образованного вращением параболы $y^2 = 2ak^2x$. В терминах современного интегрального исчисления это пример того, что интеграл от суммы равен сумме интегралов.

И. Н. Веселовский

6374. О различиях воззрений на пространство и время Ньютона и Лейбница. Свидерский В. И., Крёбер Г., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 17, 94—105 (рез. англ.)

Проводится сопоставление взглядов Ньютона и Лейбница на пространство и время. Рассматривается столкновение этих взглядов, причем указывается на непоследовательность как Ньютона, так и Лейбница. У Ньютона эта непоследовательность выражается в соединении материалистических и теологических положений, а также в виде метафизического материализма; у Лейбница — в переплетении диалектических моментов с идеализмом. Л. Е. Майстров

6375. Леонард Эйлер. Шкербелис (Leonards Eilers. Šķerbelis K.), LatvPSR Zinātņu Akad. vēstis, Изв. АН ЛатвССР, 1957, № 6, 159—162

Краткий очерк жизни и творчества Эйлера с описанием юбилейной сессии в Ленинграде 1957 г.

И. Я. Депман

6376. Празднование 250-летия со дня рождения Леонарда Эйлера Германской Академией наук в Берлине. Бирман К. Р., В сб.: Вопр. истории естествозн. и техн. Вып. 5. М., АН СССР, 1957, 217—218

6377. Уральцы отмечают юбилей Эйлера. Кочев В. В сб.: Вопр. истории естествозн. и техн. Вып. 5. М., АН СССР, 1957, 219—220

6378. Огюстен Коши. Мийу (Augustin Cauchy. Milloux H.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1957, 64, № 9—10, 299—302 (франц.)

Статья написана к столетию со дня смерти Коши. Автор излагает главным образом факты из личной жизни Коши. Математическому творчеству Коши уделяется относительно мало места. Автор ограничивается тем, что только перечисляет разделы математики, в которых работал Коши. Ю. С. Цапин

6379. Абрахам Стерн из Грубешова — первый польский конструктор счетной машины. Роковская (Abraham Stern z Hrubieszowa, pierwszy polski konstruktor maszyn rachunkowych. Rokowska Barbara), Matematyka, 1957, 10, № 3, 13—17 (польск.)

Краткая биография польского механика Абрахама Стерна (1769—1842) — создателя первой польской счетной машины. Н. П. Жидков

6380. Московское математическое общество. Александров П. С., Головин О. Н., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 6, 9—46

Исторический очерк в связи с 90-летием общества (основано в 1867 г.). Состоит из двух частей.

Первая часть содержит характеристику работы общества за 1867—1917 гг. Отмечены: сравнительно большой удельный вес механики, ведущее положение исследований по дифференциальной геометрии и дифференциальным уравнениям, трудные условия работы и отсталость математики в Москве в прошлом веке. Приведены списки всех докладов Н. Е. Жуковского (1847—1921), некоторых докладов по теории дифференциальных уравнений с частными производными, выборочный список докладов, приведенный с целью дать представление о характере работы общества и научных интересах его членов.

Вторая часть посвящена обзору деятельности общества после 1917 г. и его печатных органов: «Математического сборника» и «Трудов», а также секций: средней школы и высших технических учебных заведений. Приведен список лауреатов премии общества за 1935—1956 гг.

В приложении дан перечень научных докладов, сделанных на заседаниях общества с ноября 1917 г. по март 1946 г. С апреля 1946 г. работа общества систематически освещается на страницах журнала «Успехи матем. наук».

Примечание референта. 1. Математическое общество фактически начало свою работу в 1864 г.; избрало президента в 1865 г., «Математический сборник» № 1 вышел в 1866 г. В 1867 г. Общество получило лишь формальное утверждение. 2. Референту известны архивные материалы, позволяющие более положительно оценивать деятельность общества и его президента Н. В. Бугаева в конце XIX в. К. А. Рыбников

6381. Статистика в Московском университете в первые сто лет его существования (1755—1855). Евдокимов В. Т., Науч. зап. Моск. финанс. ин-та, 1957, вып. 9, 66—100

Статистика в Московском университете читается с 1772 г. (И. Рейхель). Рассмотрена деятельность профессоров и преподавателей Московского университета, читавших в разное время статистику (Г. Грелльман, И. А. Гейм, Х. А. Шлецер, Н. А. Бекетов, М. Т. Каченовский, Ю. П. Ульрихс, И. А. Щедритский, М. П. Погодин, А. И. Чивилев, И. В. Вернадский). Дан краткий анализ работ по статистике, написанных в университете. Указано на некоторые изменения курса статистики в рассматриваемый период. Л. Е. Майстров

6382. Д. П. Журавский и земская статистика (К 100-летию со дня смерти Д. П. Журавского). Себрова кина К. В., Научн. зап. Моск. финанс. ин-та, 1957, вып. 9, 130—150

Указывается на связь работ земской статистики с трудами Д. П. Журавского (1810—1856) как в программно-организационном, так и в методологическом направлениях. Отмечается также влияние работ Журавского на работы по статистике П. П. Семенова-Тян Шанского, Е. Н. Анучина. Библ. 56 назв.

Л. Е. Майстров

6383. 250 лет высшаего технического обучения в Праге. Кадержавек (250 let inženýrských studi v Praze. Kadeřávek František), Časop. pěstov. mat., 1957, 82, № 2, 245—249 (чешск.)

Краткие сведения о возникновении и развитии чешской технической (инженерной) школы и чешского политехнического института в Праге, с которых начинается техническое образование в Чехослоавкии.

Г. Ф. Рыбкин

6384. Из прошлого венгерской математики. VIII. Густав Радош (1862—1942). Облат (Képek a magyar matematika múltjából. VIII. Rados Gusztáv. (1862. február 22.—1942. november 1.). (2., befejező közlemény). Obláth Richárd), Középisk. mat. lapok., 1957, 14, № 2, 33—38; № 3, 65—70 (венг.)

Очерк научной и педагогической деятельности венгерского алгебраиста и специалиста по теории чисел, покойного профессора Высшего технического училища в Будапеште Густава Радоша. Излагаются некоторые

найденные им теоремы, содержание которых может быть понятно читателям с подготовкой учащихся средних школ (для которых и издается журнал). Сообщая об исследованиях Радоша, автор одновременно излагает некоторые теоремы и понятия теории чисел и алгебры, входящие уже в университетскую программу (например, о функции $\varphi(n)$ Эйлера и ее применении к исследованию многоугольников). К. С. Сцилард

6385. **К семидесятилетию Владимира Ивановича Смирнова. Соболев С. Л.**, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, 21, № 4, 449—456

6386. **60-летие академика Войтеха Ярника. Книхал, Шварц** (Akademik Vojtěch Jarník šedesátníkem. Knichal Vladimír, Schwarz Štefan), Časop. pěstov. mat., 1957, 82, № 4, 463—492 (чешск.)

6387. **60-летие профессора Карла Коутского. Борувка** (Šedesátiny profesora Karla Koutského. Borůvka Otakar), Časop. pěstov. mat., 1957, 82, № 4, 493—497 (чешск.)

6388. **Д. Г. Гребенюк. (Биографическая справка).** Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 21, 5—6

6389. **Альберто Марио Бедарида. Збрана** (Alberto Mario Bedarida. Sbrana Francesco), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 4, 731 (итал.)

Некролог профессора университета в Генуе (Италия) А. М. Бедарида (1890—1957). Его научные интересы проявлялись в области теории чисел, интегро-дифференциальных уравнений и дифференциальной геометрии.

6390. **Роберт Марк Габриель. Верблюнский** (Robert Mark Gabriel. Verblunsky S.), J. London Math. Soc., 1958, 33, № 1, 125—128 (англ.)

Некролог профессора университета в Новой Зеландии Р. М. Габриеля (1902—1957). Приводится перечень работ — 22 назв. Большинство их посвящено интегралам от субгармонических функций и эквипотенциальным поверхностям.

6391 К. **Интегральное исчисление. Т. 2. Эйлер Леонард.** Перев. с латинск. М., Гостехтеориздат, 1957, 368 стр., 14 р. 10 к.

Полное заглавие книги: «Интегрального исчисления том второй, в котором излагается метод нахождения функций одного переменного по данному соотношению между дифференциалами второго или высшего порядков». Книга содержит теорию обыкновенных дифференциальных уравнений порядка выше первого. Перевод выполнен И. Б. Погребысским. Текст снабжен мелкими примечаниями переводчика (около 50), приведены также примечания Шлезингера, редактора последнего латинского издания полного собрания сочинений Л. Эйлера. В трудных для перевода случаях приведен подстрочно текст оригинала. Краткое вступление переводчика (стр. 3—6) является в основном перечислением материала, содержащегося в томе.

Примечание референта. В переводе первого тома (переводчик М. Я. Выгодский; РЖМат, 1958, 2645) не исправлена допущенная Л. Эйлером ошибка в § 325 главы 7 первого раздела (стр. 178), на которую было уже обращено внимание ранее (Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1935, 45, 132—133). В § 325 вместо напечатанного

$$R = \frac{dQ}{dx} = \frac{6cx\,(3c^2 - 4x^2)}{(c^2 + x^2)^4}$$

следует поставить

$$R = \frac{dQ}{dx} = \frac{24cx\,(c^2 - x^2)}{(c^2 + x^2)^4},$$

а затем внести исправления в последующие формулы этого параграфа и § 326. Г. К. Михайлов

6392 К. **Софья Ковалевская. 1850—1891. Воронцова Л.** М., «Молодая Гвардия», 1957, 341 стр. илл. «Научн. работы и лит. произведения С. В. Ковалевской», «Основная литература о С. В. Ковалевской» см. стр. 337—339, 7 р. 15 к.

6393 К. **Карл Фридрих Гаусс: титан науки. Очерк его жизни и работы. Даннингтон** (Carl Friedrich Gauss: titan of science. A study of his life and work. Dunnington G. New York, Exposit Press, 1955, xvi, 479 pp., ill., 6. 00 doll.), Math. Revs, 1956, 17, № 4, 338 (англ.)

6394 К. **Карл Фридрих Гаусс (1777—1855).** (Carl Friedrich Gauß 1777—1855. Gedenkfeier d. Akad. d. Wiss. und d. Georg-August-Univ. zu Göttingen anläßl. seines 100. Todestages. Göttingen-Berlin-Frankfurt, Musterschmidt, 1955, 31 S., 2. 50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, A, № 22, 1561 (нем.)

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

6395. **Обучение инженеров и математиков численной математике с учетом электронных вычислительных устройств. Инцингер** (Ausbildung von Ingenieuren und Mathematikern in numerischer Mathematik unter Berücksichtigung elektronischer Rechenanlagen. Inzinger R.), MTW-Mitt., 1957, 4, № 4, 237—239 (нем.)

Сообщение о заседаниях в Мюнхене 27—29 мая 1957 г., посвященных обучению инженеров и математиков численной математике с учетом электронных вычислительных устройств. На заседаниях присутствовали представители Германии, Франции, Австрии и Швейцарии. Н. П. Жидков

6396. **Роль вычислительных машин в научной подготовке в высшей школе. Форсайт, Фергусон, Тротман** (The role of computers in high school science education. Forsythe George E., Ferguson W. Eugene, Trautman De Forest L.), Computers and Automat., 1957, 6, № 8, 15—19, 33 (англ.)

Приводится три высказывания по данному вопросу:

1. В письме председателя Комитета по образованию при Ассоциации по вычислительным машинам Форсайта к некоторым лицам, выразившим интерес к предмету, отмечается, что вычислительные машины потребуют большого числа квалифицированных специалистов, которых может готовить только высшая школа. Обращается внимание на необходимость публикаций, помогающих в учебной работе.

2. В выступлении на дискуссии по данной теме предлагается три подхода к решению проблемы (Фергусон): повышение оплаты преподавателей, необходимость различных учебных планов для разных категорий учащихся и необходимость помощи промышленности.

3. На той же дискуссии отмечено, что промышленность может обеспечить благоприятные возможности для преподавателей (Тротман). Предлагается установление персональной связи между школой и промышленностью. Приведены примеры такой связи. Рассказано об опыте проведения семинара по вычислительной технике для преподавателей. Н. П. Жидков

6397. **Требования вычислительных машин к преподаванию. Хилберри** (The computer's challenge to education. Hilberry Clarence B.), Computers and Automat., 1956, 5, № 2, 16—19 (англ.)

Отмечается роль вычислительных машин в различных областях науки, промышленности и экономики и, соответственно, их влияние на постановку преподавания математики в высшей школе. Н. П. Жидков

6398. Словацкая терминология элементарной математики. Дубец (Slovenská terminológia elementárnej matematiky. Dubec Anton), Mat. škole, 1957, 7, № 7, 431—436 (словацк.)

Статья содержит разбор брошюры «Терминология элементарной математики» (библиографические данные не приведены), выпущенной Словацкой академией наук в целях устранения трудностей и ошибок при изучении математики, главным образом, в средних школах. В брошюре для каждого математического понятия указывается словацкое название и общераспространенный международный термин. Г. Ф. Рыбкин

6399. Трехлетний математический цикл. Холл (The mathematical tripos. Hall P.), Math. Gaz., 1957, 41, № 337, 198—199 (англ.)

Автор знакомит с изменениями в чтении трехлетнего цикла лекций по математике в Кембриджском университете (с 1957 г.). И. Н. Веселовский

6400. Математика как предмет преподавания в итальянской общеобразовательной школе. Дахия С. А., Матем. в школе, 1957, № 6, 74—76

Указаны основные ступени существующей ныне «школьной лестницы» в Италии. Отмечены три принципа постановки преподавания математики в общеобразовательной школе: 1) деление всего курса математики на два законченных цикла, причем материал первого цикла почти целиком «перечитывается» во втором; 2) высокий уровень математической строгости при изложении материала во втором цикле; 3) сосредоточение преподавания математики и физики в руках одного преподавателя.

Описана история утверждения первых двух принципов, третий критикуется самими итальянскими педагогами.

Описано содержание курса математики в современной общеобразовательной школе и его распределение по годам обучения. Н. П. Бибикова

6401. Общая математика для первокурсника колледжа. Майрс (General mathematics for college freshmen. Mires Kathrine C.), Math. Teacher, 1957, 50, № 7, 513—516 (англ.)

Анализ вступительных экзаменов в 1955 г. в шести государственных колледжах штата Оклахома (США). Результаты оказались низкими, особенно в той части, которая относится к пониманию сущности основных понятий математики и к навыкам логического мышления. Даются рекомендации об организации занятий студентов по математике и о принципах написания новых учебников. Г. Б. Петросян

6402. Очерк развития методики математики на Украине за 40 лет (1917—1957 гг.). Белый Б. Н., Матем. в школе, 1957, № 5, 22—39

Освещаются вопросы: 1) о состоянии методики математики на Украине в первые годы строительства советской школы (1917—1922 гг.); 2) о развитии методики математики на Украине после исторических постановлений Коммунистической партии о школе до начала Великой Отечественной войны (1933—1941 гг.); 3) о развитии методики математики на Украине в послевоенный период (1945—1957 гг.). Цель очерка — показать, что методика математики на Украине развивалась в тесном единении с русской методикой математики, и выяснить, какой вклад внесли украинские методисты-математики и учителя-практики в развитие Советской методико-математической науки. Наряду с успехами в очерке отмечаются наиболее характерные, принципиальные недостатки в постановке в республике научно-исследовательской работы в данной области.

Библ. 166 назв. М. И. Иванов

6403. Из истории развития методики преподавания математики в школах Советской Украины. Астряб, Кухар (З історії розвитку методики викладання математики в школах Радяньскої Украіни. Астряб О. М., Кухар В. М.), Наук. зап. Київськ. держ. пед. ін-т, 1957, 27, 195—209 (укр.)

6404. . Связь труда учащихся в учебной мастерской с изучением основ математики, физики и черчения. Сырецкий М. И., Докл. Акад. пед. наук РСФСР, 1957, № 3, 1—4

6405. О составлении конкретных задач по математике. Лиман М. М., Уч. зап. Краснодарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 15, 151—160

Автор в целях содействия политехнизации школы дает методические рекомендации к составлению математических задач с конкретным жизненным содержанием. Г. Б. Петросян

6406. «Проблема Штейнмеца» и школьная арифметика. Саттон (The «Steinmetz problem» and school arithmetic. Sutton Richard M.), Math. Teacher, 1957, 50, № 6, 434—435 (англ.)

Рассмотрен доступный учащимся средней школы способ решения известной задачи: даны два круговых цилиндра одинакового радиуса r, оси которых пересекаются под углом 90°. Найти объем общей части пересекающихся цилиндров. Н. П. Бибикова

6407. Почему бы не использовать числовые кроссворды на ваших уроках математики? Брандес, Дикки (Why not use cross-number puzzles as a teaching aid with your general mathematics classes? Brandes Louis Grant, Dickey Darrell), School Sci. and Math., 1957, 57, № 8, 647—654 (англ.)

Цифровые кроссворды используются в качестве активного отдыха на уроках математики. В статье приводятся типы кроссвордов по арифметике. По мнению авторов, подобные кроссворды можно составлять по вопросам алгебры, геометрии и химии. Р. А. Симонов

6408. Логарифмическая производная в преподавании дифференциального исчисления. Субьета (La derivada logaritmica en la enseñanza del calculo diferencial. Zubieta R. F.), Rev. Mat., 1957, № 2, 39—43 (исп.)

6409. Интуиционизм в преподавании математики в школе. Хейтинг (Intuitionisme en schoolwiskunde. Heyting A.), Euclides (Nederl.), 1957, 33, № 1, 1—12 (гол.)

6410. К вопросу об измерении геометрических величин на разных ступенях обучения в политехнической школе. Спасский А. Ф., Уч. зап. Астраханск. гос. пед. ин-та, 1957, 6, № 2, 3—86

6411 К. Курс высшей математики. (Для физ.-матем. фак. ун-тов и втузов с повыш. программой). Т. 1. Изд. 17-е, стереотип. Смирнов В. И. М., Гостехиздат, 1957, 478 стр., илл., 11 р. 40 к.

6412 К. Курс высшей математики. (Для механ.-матем. и физ.-матем. фак. ун-тов). Т. 3. Ч. 1. Изд. 7-е. Смирнов В. И. М., Гостехиздат, 1957, 328 стр., 8 р. 10 к.

6413 К. Курс высшей математики. (Для механ.-матем. и физ.-матем. фак. ун-тов). Т. 3. Ч. 2. Изд. 6-е. Смирнов В. И. М., Гостехиздат, 1957, 674 стр., илл., 15 р. 10 к.

6414 К. Курс высшей математики. (Для физ.-матем. фак. ун-тов). Т. 4. Изд. 3-е. Смирнов В. И. М., Гостехиздат, 1957, 812 стр., 17 р. 75 к.

6415 К. Справочник по элементарной математике, механике и физике. Изд. 6-е. Минск, Госиздат БССР, 1957, 199 стр., илл., 2 р. 55 к.

6416 К. Сборник задач по высшей математике. (Для втузов). Т. 1. Изд. 13-е, переработ. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. М., Гостехиздат. 1957, 282 стр. илл., 6 р. 80 к.

6417 К. **Методика преподавания математики. Руководство для учительских институтов.** Ред. Ляпин С. Е. (Методика на обучението по математика. Помагало за учителските инст. Ред. Ляпин С. Е. Прев. от русск. София, Нар. просв., 1957, 455 стр., ил., 13—20 лв.), Бълг. книгопис, 1957, 61, № 4, 25 (бол.)

6418 К. **Справочник по математике. Пособие для учащихся 8-10 кл.** Шахно К. У. Л., Учпедгиз, 1957, 215 стр., илл., 3 р. 35 к.

См. также: 6423, 6455К, 6456К, 6488, 6560, 7004К, 7228

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, А. С. Есенин-Вольпин*

6419. **Квазикогерентные системы.** Карруччо (I sistemi quasi coerenti. Carruccio Ettore), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 2, 254—256 (итал.)

Рассмотрим противоречивую формальную систему S, основанную на конечном числе аксиом и правил вывода. Будем обрывать логический вывод каждый раз, когда применение правила вывода приводит к результату, противоречащему одной из аксиом или теорем, уже встретившейся в этом выводе. Класс доказуемых при этом утверждений автор называет рациональной или квазикогерентной системой.

В связи с этим возникает ряд вопросов. Всякое ли предложение доказуемо? Ответ отрицателен, так как недоказуемы уже отрицания аксиом. Имеются ли другие недоказуемые предложения? Верно ли, что всякая квазикогерентная система допускает интерпретацию в «когерентной»? (Под «когерентными» системами автор, по-видимому, подразумевает непротиворечивые системы). Всякая ли квазикогерентная система разложима на конечное число когерентных? Допускается возможность, что квазикогерентные системы могут встретиться как в самой математике, так и в других науках.

По мнению референта, в постановке этих проблем можно не ограничиваться конечно-аксиоматизируемыми системами. А. С. Есенин-Вольпин

6420. **Две теории, построенные с помощью плеоназмов.** Эренфёйхт (Two theories with axioms built by means of pleonasms. Ehrenfeucht Andrzej), J. Symbolic Logic, 1957, 22, № 1, 36—38 (англ.)

Строятся примеры теорий, дающие положительный ответ на следующие вопросы:

1) Существует ли существенно неразрешимая теория с конечным числом нелогических констант, которая содержит разрешимую, конечно-аксиоматизируемую подтеорию?

2) Существует ли неразрешимая теория, категоричная в конечной мощности, имеющая рекурсивное множество аксиом?

В построении обеих теорий существенную роль играют «плеоназмы»; под этим словом автор понимает повторение некоторой формулы в аксиоме.

А. С. Есенин-Вольпин

6421. **О теориях, категоричных в мощности.** Эренфёйхт (On theories categorical in power. Ehrenfeucht A.), Fundam. math., 1957, 44, № 2, 241—248 (англ.)

Цель статьи — дать ряд приложений теорем об автоморфизмах моделей (Ehrenfeucht A., Mostowski A., Fundam. math., 1956, 43, 50—68) к теориям, категоричным в мощности (РЖМат, 1955, 1607). Пусть $\neq(x_1, \ldots, x_n)$ есть $\&(x_i \neq x_j)$, где $1 \leqslant i < j \leqslant n$; S_n — совокупность всех подстановок множества $\{1,\ldots,n\}$. n-членное отношение $R(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ называется антисимметричным, соответственно связным, на множестве A, если для всяких $x_1, \ldots, x_n \in A$ из $\neq(x_1, \ldots, x_n)$ следует $\Sigma_{\pi \in Sn} \sim R(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(r)})$, соответственно $\Sigma_{\pi \in S_n} R(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(n)})$.

Со ссылками на вышеуказанную совместную работу доказываются:

Теорема 1. Пусть n — произвольное бесконечное кардинальное число и T — теория со следующим свойством: существует n-членный предикат ρ, определенный в T, и модель M для T над $|M|$-базисным множеством модели M, так что M_ρ является антисимметричным и связным на некотором бесконечном множестве $A_1 \subset |M|$. Тогда T не категорична в мощности $m = 2^n$.

Теорема 2. Если T категорична в мощности 2^n и $|\overline{\overline{M}}| = 2^n$, то существует множество $A_0 \subset |M|$ такое, что $\overline{\overline{A_0}} = 2^n$ и всякое взаимно-однозначное отображение A_0 на себя может быть расширено до автоморфизма модели M.

Теорема 3. Если T категорична в мощности 2^n, то для всякого $p < 2^n$ T обладает универсальной моделью в мощности p (т. е. моделью M^0 мощности p такой, что каждая модель M для T изоморфна подмодели $\subset M^0$).

Как следствие теоремы 1 получается, что в теории T, категоричной в мощности 2^n, где $n \geqslant \aleph_0$, невозможно определить никакое отношение порядка. Д. А. Захаров

6422. **Обоснование строгой импликации.** Аккерман (Bergründung einer strengen Implikation. Ackermann Wilhelm), J. Symbolic Logic, 1956, 21, № 2, 113—128 (нем.)

Рассматривается исчисление строгой импликации («strenge» в отличие от «strikte»; см. Lewis C. I., Langford C. H., Symbolic Logic, New York, 1932). Строгая импликация обозначается через $A \to B$ и обозначает, что между A и B существует смысловая логическая зависимость. $A, B, C \ldots$ обозначают переменные суждения, из которых образуются обычным путем формулы с помощью связок f (и), v (или), — (не), $\to$ (импликация). $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \ldots$ обозначают формулы.

Под схемой понимаем формальное выражение одного из следующих видов: $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \vdash$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vdash$, $\vdash \mathfrak{A}$.

Под схемой $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ понимаем вывод от $\mathfrak{A}$ к $\mathfrak{B}$, под схемой $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$ — от $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ к $\mathfrak{C}$, под схемой $\vdash \mathfrak{A}$ понимаем, что $\mathfrak{A}$ истинно в силу логических оснований, $\mathfrak{A} \vdash$ означает, что $\mathfrak{A}$ истинно в силу чисто логических оснований, т. е. $\mathfrak{A}$ — противоречиво, схема $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vdash$ означает, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ друг с другом не совместны.

Вводится понятие выделенной посылки для схем с двумя посылками, выделенная посылка отмечается звездочкой (*). Схема $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$ означает то же, что схема $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, т. е. вывод от $\mathfrak{A}$ к $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$. Под значимостью $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^* \vdash \mathfrak{C}$ понимаем, что выводы от $\mathfrak{A}$ к $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ и от $\mathfrak{B}$ к $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ оба законны (схема $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}^* \vdash \mathfrak{C}$ не встречается).

Схема $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B} \vdash$ означает вывод от $\mathfrak{A}$ к $\overline{\mathfrak{B}}$ и схема $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^* \vdash$ означает вывод от $\mathfrak{A}$ к $\overline{\mathfrak{B}}$ и от $\mathfrak{B}$ к $\overline{\mathfrak{A}}$.

Схема аксиом существует без выделенных посылок. При применении правил вывода отмечаются те посылки, которые в данной схеме являются выделенными.

Основные схемы
(1′) $\vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$,
(2′) $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A}$,
(3′) $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{B}$,
(4′) $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$,
(5′) $\mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$,
(6′) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \vdash \mathfrak{B} \vee (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{C})$.

Из основных схем (1′)—(6′) получаем ряд других схем по следующим правилам:

I′a. Если $\mathfrak{S}$ — доказанная схема, содержащая по крайней мере одну посылку и одно следствие, то доказуема схема, в которой перед следствием и перед одной или всеми посылками стоит $\mathfrak{D} \to$ ($\mathfrak{D}$ — любая формула), так, что всегда каждая не выделенная посылка получает $\mathfrak{D} \to$. Если $\mathfrak{S}$ — схема с двумя посылками, то I′a выделяет обе посылки в новой схеме, кроме того случая, когда обе посылки не выделенные. В последнем случае нет выделенных посылок в новой схеме.

I′ б. Если схема $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$ доказана, то доказана $\mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$, $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D} \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$. Посылки в новой схеме не выделенные.

II′ а. Если три схемы $\vdash \mathfrak{A}$, $\vdash \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$ доказаны, то $\vdash \mathfrak{C}$ доказана. В схеме безразлично, выделены посылки или нет,

II′ б. Если схемы ψ, $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ и $\vdash \mathfrak{A}$ доказаны, и ψ — пустая или выделенная посылка, то $\psi \vdash \mathfrak{B}$ доказана; $\mathfrak{A}$ в первой схеме может быть выделена или нет.

II′ в. Если схемы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \vdash$ и $\vdash \mathfrak{A}$ доказаны, то $\mathfrak{B} \vdash$ доказана. Возможное выделение посылок в первой схеме не играет роли.

III′. Из $\psi \vdash \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ получим $\psi, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$. В $\psi, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$ ψ — выделенная посылка, если она не пустая, $\mathfrak{B}$ — наоборот, не выделенная и не пустая.

IV′. В схеме с двумя посылками можно их менять местами только в том случае, если они обе выделенные или обе не выделенные. Выделенные посылки после перестановки остаются выделенными.

V′. Из $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$ получается $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в последней схеме не выделенные. Правило имеет место, в частности, когда отсутствует заключение $\mathfrak{C}$.

VI′ а. В схеме можно переменить местами посылку со следствием, снабдив их знаками отрицания. Правило может быть применено, когда следствие или данная посылка пустые. Правило не применимо к схеме с двумя не выделенными посылками. Если сохраним за выделенной посылкой ее место, то она остается выделенной тогда и только тогда, когда она стоит на первом месте. Новая формула, получающаяся в качестве посылки, никогда не является выделенной.

VI′ б. В схеме можно заменить посылку $\mathfrak{A}$ через $\overline{\mathfrak{A}}$ и наоборот. Возможное выделение посылки остается прежним.

Система (1′)—(6′), I′—VI′ обозначена Σ'.

Исчисление строгой импликации (обозначим его Π') содержит 15 аксиом и четыре правила.

(1) $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$,
(2) $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to ((\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}))$,
(3) $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to ((\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}) \to (\mathfrak{C} \to \mathfrak{B}))$,
(4) $((\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$,
(5) $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$,
(6) $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$,
(7) $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \,\&\, (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C})$,
(8) $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$,
(9) $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$,
(10) $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{C}) \,\&\, (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$,
(11) $\mathfrak{A} \,\&\, (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{B} \vee (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{C})$,
(12) $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}})$,
(13) $\mathfrak{A} \,\&\, \overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}$,
(14) $\mathfrak{A} \to \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$, (15) $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \to \mathfrak{A}$.

Правила вывода:

(α) заключение от $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ к $\mathfrak{B}$,
(β) заключение от $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ к $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$,
(γ) заключение от $\mathfrak{A}$ и $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}$ к $\mathfrak{B}$,
(δ) заключение от $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$ и $\mathfrak{B}$ к $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$, причем $\mathfrak{B}$ должно быть доказано логически.

Доказывается эквивалентность Σ' и Π' в следующем смысле, если формула $\mathfrak{A}$ доказуема в Π', то $\vdash \mathfrak{A}$ доказуема в Σ', и наоборот. При этом следует иметь в виду, что доказуемым схемам в Σ': $\vdash \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^* \vdash \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \vdash$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vdash$, $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B} \vdash$ соответствуют доказуемые схемы в Π': соответственно $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$, $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$ и $\mathfrak{B} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$, $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$, $\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{B}}$. Система Π' содержит полное двузначное исчисление высказываний, так как в ней может быть выведена любая общезначимая формула, образованная с помощью трех связок &, $\vee$, —.

Во второй части статьи вводятся модальности. Значок «$\wedge$» означает «абсурд», «$\mathfrak{A} \to \wedge$» понимаем, как «$\mathfrak{A}$ невозможно», К системе Σ' добавляется следующее правило вывода:

VII′. Если $\psi \vdash \wedge$ доказуемо, то также доказуемо $\psi \vdash$, и наоборот. ψ состоит при этом из одной или двух посылок. Возможное выделение посылок сохраняется только при первом переходе, при втором не сохраняется.

К Π' прибавляются две аксиомы:

(16) $(\mathfrak{A} \to \wedge) \to \overline{\mathfrak{A}}$,

(17) $\mathfrak{A} \,\&\, \overline{\mathfrak{A}} \to \wedge$;

и правило вывода:

(ε) если $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \,\&\, \mathfrak{C} \to \wedge$ доказуемы, то доказуемо $\mathfrak{C} \to \wedge$.

После присоединения нелогических аксиом (16) и (17) к Π' правила (α), (β), (γ) остаются справедливыми, а правило (δ) должно быть исключено.

Система Σ' с присоединенным правилом VII′ и система Π' с присоединенными аксиомами (16) и (17) и правилом (ε) остаются эквивалентными в указанном выше смысле.

Модальности определяются следующим образом: $U\mathfrak{A}$ («$\mathfrak{A}$ — невозможно») определено через $\mathfrak{A} \to \wedge$, $N\mathfrak{A}$ («$\mathfrak{A}$ — необходимо») — через $\overline{\mathfrak{A}} \to \wedge$, $M\mathfrak{A}$ («$\mathfrak{A}$ — возможно») — через $\overline{\mathfrak{A} \to \wedge}$.

В полученной системе «парадоксы» строгой импликации $N\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A})$, $U\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ не доказуемы.

В заключительном разделе статьи доказано, что формулы $A \to (B \to A)$, $A \to (\overline{A} \to B)$, $A \to ((A \to B) \to B)$, $B \to (A \to A)$, $A \to (A \to A)$, $A \,\&\, \overline{A} \to B$ не доказуемы в рассматриваемой системе.

Автор указывает, что система может быть распространена на исчисление предикатов первой ступени, если добавить соответствующие аксиомы. Т. Л. Майстрова

6423. Метод Дж. Буля. Хаккет (The method of George Boole. Hackett Felix E.), Proc. Roy. Irish Acad., 1955, A57, № 6, 79—87. (англ.)

Материалы, связанные с биографией Дж. Буля (G. Boole) и с его деятельностью. М. Н. Айзерман

6424 К. Формальная логика. Прайор (Formal logic. Prior A. N. Oxford, Clarendon Press, 1955, ix, 329 pp. 5.60 doll.) (англ.)

Книга состоит из трех частей. В первой части рассматривается классическое исчисление высказываний (и. в.) и исчисление предикатов первого порядка. В гл. I и. в. изучается с помощью таблиц истинности. В гл. II рассматриваются различные аксиоматизации и. в. и с помощью нормальной формы доказывается его полнота. В гл. III рассматриваются чистое импликационное исчисление и система аксиом Вайсберга — в терминах C (импликация) и O (ложь), а затем следует куайновское доказательство полноты. Один параграф посвящен прототетике Лесневского и результатам Лука-

севича и Мередита о системах с операционными переменными. В гл. IV имеются параграфы об исчислении предикатов первого порядка, о прототетике с кванторами для пропозициональных переменных и об одной форме этого последнего исчисления, связанной с эквивалентностью. Во второй части автор исследует традиционную логику от Аристотеля до Моргана, пользуясь современным исчислением для пояснительных замечаний и для сравнения традиционных понятий с современными. В гл. I таким образом изучается аристотелева силлогистика; в параграфе 3 имеется интересное обсуждение аристотелевских предложений κατα πρόσληψιν (вывод по второму предложению в силлогизме). В гл. II рассматривается введение отрицания, конъюнкции и дизъюнкции в силлогистике. Квантификация предиката рассматривается в разделе 4. Гл. III посвящена единичным и экзистенциальным предложениям; в ней рассматриваются диаграммы Венна. К этой главе совершенно естественно присоединен параграф о теории, описанной в «Principia Mathematica» (Р. М.).

Третья часть состоит из трех глав, посвященных различным вопросам. Гл. I посвящена модальным логикам. Кроме систем Льюиса, рассматриваются некоторые подробности деонтической логики Райта.

В гл. II рассматриваются неклассические логики. Имеются параграфы о трехзначных логиках и об интуиционистской логике. Гл. III относится к логике классов и отношений, в духе Р. М., причем один параграф посвящен парадоксам.

Книга заканчивается перечнем более чем 60 систем постулатов для логических исчислений и прекрасной библиографией. Содержание книги никоим образом не исчерпывается этим рефератом. Автор дает много отступлений, рассматривая большое число вопросов, относящихся как к античной, так и современной логике. Формальные методы рассматриваются скорее как орудие, чем как цель книги, и в последней части формальные доказательства часто заменяются ссылками на литературу.

Но каждый интересующийся каким-либо видом логики найдет в книге много интересного материала.

Некоторые критические замечания: 1) Полностью оставлены в стороне работы Генцена; 2) автор часто рассматривает истинность формулы без учета того, что она зависит от интерпретации символов и что иногда сомнительно, может ли эта интерпретация быть определена другим способом, помимо аксиом, которым удовлетворяют эти символы; 3) Брауэр не ставил своей целью устранение парадоксов, как утверждается на стр. 252. A. Heyting

Перевод из Math. Revs., 1956, 17, № 6, 569

См. также: 6362

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

6425. Некоторые тождества, содержащие функции разбиений. Кульберг (Some identities involving the partition function. Kolberg Oddmund), Math. scand., 1957, 5, № 1, 77—92 (англ.)

Хорошо известно тождество Эйлера

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\,x^n = \{\varphi(x)\}^{-1},$$

где x — переменная по модулю <1, $p(n)$ — число представлений n в виде суммы равных и неравных целых положительных слагаемых и $\varphi(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$.

Также известны тождества Рамануджана

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5n+4)\,x^n = 5\frac{\varphi^5(x^5)}{\varphi^6(x)},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(7n+5)\,x^n = 7\frac{\varphi^3(x^7)}{\varphi^4(x)} + 49x\frac{\varphi^7(x^7)}{\varphi^8(x)}.$$

Доказывается ряд новых тождеств, содержащих функцию разбиений $p(qn+s)$, где $q=3,\ 5,\ 7$ и $s=0, 1, \ldots, q-1$. Вот одно из них:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5n)\,x^n \sum_{n=0}^{\infty} p(5n+3)\,x^n = 3\frac{\varphi^4(x^5)}{\varphi^6(x)} + 25x\frac{\varphi^{10}(x^5)}{\varphi^{12}(x)}.$$

Г. А. Ломадзе

6426. О проблеме Эрдёша. Сюй Ли-чжи (Hsu L. C.), Дунбэй жэньминь дасюэ цзыжанькэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., 1957, № 1, 1—5 (кит.; рез. англ.)

Эрдёш (РЖМат, 1957, 2016) поставил следующую проблему. Пусть $4n$ целых числа в интервале $(1, 4n)$ разбиты на 2 класса: $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$; $b_1, b_2, \ldots, b_{2n}$. Всегда ли найдется целое t такое, что число решений уравнения $a_i + t = b_j$ не меньше n? В заметке приводится пример, дающий отрицательный ответ.

Улучшен результат Шерка следующим образом: Пусть целые от 1 до $2m$ $(m>1)$ распределены на 2 равных класса a, b. Тогда число решений $a_i + t = b_j$ будет не менее, чем $[(1-\sqrt{2}/2)\,m]$ для некоторых t таких, что $|t| \leqslant [\sqrt{2m(m+1)}]$. В. А. Голубев

6427. О теоретико-числовых функциях. II. Канольд (Über zahlentheoretische Funktionen. II. Kanold Hans-Joachim), Math. Ann., 1957, 134, № 1, 41—46 (нем.)

Ч. I. РЖМат, 1956, 7073.

Пусть $f(n)$ — теоретико-числовая функция, т. е. функция натурального аргумента, все значения которой, начиная с некоторого, — натуральные числа; $F(N)$ — число различных, не превосходящих N, натуральных значений функции $f(n)$. Пусть $g(n)$ — функция, принимающая вещественные значения, такая, что $\lim_{n\to\infty} g(n)=\infty$ и $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n)^{1/2} > 0$. Пусть далее существует такое натуральное, не равное 1, число a, что для всех простых p, начиная с некоторого, $f(p)$ делится на a. Доказывается, что

1) $\overline{\lim}\, F(N)/N \leqslant a$;

2) $\lim_{N\to\infty} F(N)/N = 0$, если при тех же условиях $g(n) = n^{1/2}/(\ln n)^{1-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$.

Строится пример функции $f(n)$, для которой $\underline{\lim}\, f(n)/n^{1-\varepsilon} > 0$ и $\lim_{N\to\infty} F(N)/N = 1/a$.

В. И. Нечаев

6428. **Примечания к теореме Шапиро. Ригер** (Bemerkungen zu einem zahlentheoretischen Satz von Shapiro. Rieger G. J.), Arch. Math., 1957, 8, № 4, 251—254 (нем.)

Доказывается, что

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n;k)=1}} \frac{\mu(n)}{n}\log^r\frac{x}{n} = \frac{rk}{\varphi(k)}\log^{r-1}x + \sum_{\rho=1}^{r-2} b_\rho^{(r)}\log^\rho x + O(\mathrm{x}),$$

где n, k, ρ и $r\geqslant 2$ — натуральные числа; $b_\rho^{(r)}$ — константы, зависящие от r, ρ, k.

Эта теорема обобщает известную формулу

$$\sum_{\substack{n\leqslant k\\(n,k)=1}} \frac{\mu(n)}{n}\log^2\frac{x}{n} = \frac{2k}{\varphi(k)}\log x + O(\mathrm{x}),$$

к которой, как показал Шапиро, может быть сведено доказательство формулы А. Сельберга:

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l(\mathrm{mod}\,k)}}\log^2 p + \sum_{\substack{pq\leqslant x\\ pq\equiv l(\mathrm{mod}\,k)}}\log p\log q = \frac{2}{\varphi(k)}x\log x + O(x),$$

где p, q — простые числа, $(k, l)=1$. Н. В. Гордеев

6429. **Интегральные формулы арифметического характера, относящиеся к дзета-функции Гурвица. Миколаш** (Integral formulae of arithmetical characteristics relating to the zetafunction of Hurwitz. Mikolas Miklos. Publs math., 1957, 5, № 1—2, pp. 44—53) (англ.)

Доказываются формулы

$$\int_0^1 \zeta(1-s,\overline{au})\,\zeta(1-s,\overline{bu})\,du = 2\Gamma(s)^2\,\frac{\zeta(2s)}{(2\pi)^{2s}}\left(\frac{(a,b)}{[a,b]}\right)^s,$$

$$\int_0^1 \zeta(1-s,\overline{au})\,\overline{\zeta(1-s,\overline{bu})}\,du = 2\,|\Gamma(s)|^2\,\mathrm{ch}\,\pi\tau\,\frac{\zeta(2\sigma)}{(2\pi)^{2\sigma}}\left(\frac{(a,b)}{[a,b]}\right)^\sigma\left(\frac{a}{b}\right)^{i\tau}$$
$$(R(s)>1/2),$$

где $\overline{au}$, $\overline{bu}$ означают дробные части au, bu; $\zeta(s,x)$ определена как сумма ряда $\Sigma_{n=0}(x+n)^{-s}$ и его аналитическое продолжение.

Эти формулы являются обобщением соотношения

$$\int_0^1 B_r(\overline{au})\,B_r(\overline{bu})\,du = (-1)^{r-1}\frac{B_{2r}}{(2r)!}\left(\frac{(a,b)}{[a,b]}\right)^r,$$

где $B_r(t)$ — полиномы Бернулли, B_{2r} — число Бернулли. Автор указывает на возможные приложения его результатов к вопросу о распределении дробных долей чисел n_1x, n_2x, n_3x, ..., где n_1, n_2, n_3, ... — данная числовая последовательность.

Примечание референта. Последняя формула была впервые получена мною и использована в ряде моих работ (Докл. АН СССР, 1943, 40, № 7, Изв. АН СССР, 1951, 15, 131—152 и др.). Все эти работы остались, судя по всему, неизвестными автору.

Н. П. Романов

6430. **О числе идеальных делителей в поле алгебраических чисел. Ригер** (Über die Anzahl der Teiler der Ideale in einem algebraischen Zahlkörper. Rieger G. J.), Arch. Math., 1957, 8, № 3, 162—165 (нем.)

Пусть K — поле алгебраических чисел степени n. $d(\mathfrak{A})$ — число идеалов поля K, делящих данный идеал $\mathfrak{A}$. $H(x)$ — число идеалов поля K, нормы которых не превосходят x.

Известно, что $H(x)=\alpha x+O(x^{1-2/(n+1)})$, $h(\mathfrak{A})$ — степень идеала $\mathfrak{A}$, α — константа.

Доказана формула

$$\sum_{\substack{N(\mathfrak{A})\leqslant x\\ \mathfrak{A}<\mathfrak{B}\,\mathrm{mod}\,f}} d(\mathfrak{A}) = \frac{\alpha^2}{n(f)}\prod_{p\mid f}\left(1-\frac{1}{N(p)}\right)^2 x\log x + \alpha_2 x + O(x^{1-1/(n+1)}).$$

Эта формула является обобщением на алгебраические числа известной формулы

$$\sum_{\substack{a\leqslant x\\ a\equiv l(\mathrm{mod}\,k)\\ (k,l)=1}} d(a) = \frac{\varphi(k)}{k^2}x\log x + dx + O(x^{1/2}).$$

В. Д. Подсыпанин

6431. **Асимптотическое распределение целых точек на некоторых эллипсоидах. Малышев А. В.**, Изв. АН СССР, Сер. матем., 1957, 21, № 4, 457—500

Рассматривается вопрос о представлении чисел тернарными квадратичными формами. Доказывается следующая основная теорема:

Пусть $f(x, y, z)$ — положительная тернарная целочисленная собственно примитивная квадратичная форма нечетных инвариантов $[r, 1]$, принадлежащая роду $\mathfrak{G}_{[r,1]}$ с характерами $(-f/p)=1$ для всех простых $p\mid r$; g — нечетное число с условием $rg\neq 1$; $\mathfrak{C}$ — квадрируемая коническая область с вершиной в начале координат и f — эллиптическим телесным углом $\lambda>0$. Рассмотрим целое число m, взаимно простое с rg, и целые числа x_0, y_0, z_0, удовлетворяющие условиям: $f(x_0, y_0, z_0)\equiv m\,(\mathrm{mod}\,8rg)$, о. н. д. $(x_0, y_0, z_0, 2)=1$, $(-m/p)=1$ для всех простых $p\mid g$. Обозначим через $t(f, \mathfrak{C}, g; m)$, количество целых примитивных точек (x, y, z) эллипсоида $f(x, y, z)=m$, лежащих в конусе $\mathfrak{C}$ и сравнимых с $(x_0, y_0, z_0)\ \mathrm{mod}\,g$. Тогда при $m\to\infty$ и фиксированных f, $\mathfrak{C}$, g

$$t(f,\mathfrak{C},g;m)\sim\frac{\lambda}{4\pi}\,\frac{2^k}{rg^2\prod_{p/rg}(1+p)^{-1}}\,t(m),$$

где $t(m)$ — количество примитивных представлений числа суммой трех квадратов и k — количество простых делителей r, не входящих в g.

Далее формулируются важнейшие частные случаи этой теоремы, некоторые из которых даны уже в ранних работах Ю. В. Линника и автора лишь с намеком на доказательство.

Затем основная теорема переносится на все целые точки эллипсоида $f(x, y, z)=m$, лежащие в конусе $\mathfrak{C}$ и сравнимые с $(x_0, y_0, z_0)\ \mathrm{mod}\,g$.

Для доказательства основной теоремы автор существенно обобщает одну свою лемму (РЖМат, 1954, 5438) из аналитической арифметики кватернионов.

Г. А. Ломадзе

6432. Об одном построении относительно G_2 системы представителей классов бинарных примитивных квадратичных форм второго вида с детерминантом $D>0$ и $D \equiv 5 \pmod 8$. Челлитти (Sopra una costruzione di sistemi di rappresentanti di classi relative a G_2 di forme quadratiche binarie primitive di seconda specie di determinante $D>0$ e $=5 \pmod 8$. Cellitti Carlo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, **23**, № 1-2, 15—21 (итал.)

Множество унимодулярных преобразований с матрицей $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, где β — четное число, образует группу G_2. Рассматривается применение преобразований группы G_2 к бинарным квадратичным формам. При этом могут получиться формы двух видов: первого $4ax^2 + 2bxy + cy^2$ и второго $2ax^2 + 2bxy + 2cy^2$, имеющие один и тот же дискриминант. Приведение форм первого вида исследовано автором ранее. Исследуется вопрос о приведении форм второго вида, удовлетворяющих условиям, указанным в заглавии. В. Д. Подсыпанин

6433. Решение уравнений $x^2+y^2=2w^2$ и $x^2+y^2+z^2=3w^2$ в целых числах. Гофман ($x^2+y^2=2w^2$ und $x^2+y^2+z^2=3w^2$ in Ganzen. Hofmann O.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, **10**, № 6, 269—270 (нем.)

1. Для отыскания решений первого уравнения автор делает замену $x = a + b$, $y = a - b$, где в свою очередь $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$. Затем составляется таблица, где по различным m и n находятся x, y, w, удовлетворяющие уравнению.

2. Для решения второго уравнения автор также пользуется двойной заменой: $x = -a + b + c$, $y = a - b + c$, $z = a + b - c$ и $a = v(u + v)$, $b = u(u + v)$, $c = -uv$.

Приводится небольшая таблица решений второго уравнения. Е. П. Ожигова

6434. Теорема Диксона о неисчезающих кубических формах в конечном поле. Карлиц (A theorem of Dickson on nonvanishing cubic forms in a finite field. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 5, 975—977 (англ.)

Диксон установил, что тройничная кубическая форма с коэффициентами из $GF(q)$, $q = p^n$, $p > 2$, обращающаяся в нуль только при $x = y = z = 0$, есть норма линейной формы с коэффициентами из $GF(q^3)$. В статье даётся другое доказательство теоремы, полная формулировка которой будет такой:

Пусть $f(x, y, z)$ — однородный кубический многочлен с коэффициентами из $GF(q)$, исчезающий в $GF(q)$ только при $x = y = z = 0$. Если $p > 2$, $q \geqslant 13$, то $f(x, y, z)$ — норма некоторой линейной формы $\alpha x + \beta y + \gamma z$, где α, β, γ принадлежат $GF(q^3)$ и линейно независимы относительно $GF(q)$. П. Н. Реморов

6435. О минимуме дискриминантов полей 5-й степени. Хантер (The minimum discriminants of quintic fiels. Hunter John), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1957, **3**, № 2, 57—67 (англ.)

Доказывается, что минимум дискриминантов полей 5-й степени для каждого из сигнатурных типов $\tau = 0, 1, 2$ достигается в следующих случаях:

4. При $\tau = 0$ минимум 14641 для поля, порожденного одним из корней уравнения (теорема 2)

$$x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0.$$

2. При $\tau = 1$ минимум (—4511) для поля с порождающим уравнением $x^5 - 2x^3 + x^2 - 1 = 0$ (теорема 4).

3. При $\tau = 2$ минимум 1609 для поля с производящим уравнением $x^5 - x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ (теорема 3).

При этом справедлив оказывается следующий факт (теорема 1), используемый во всех случаях: во всяком поле 5-й степени с дискриминантом D всегда найдется порождающий само это поле элемент ρ, удовлетворяющий условиям

$$\left|\sum \rho_i\right| \leqslant 2, \quad 5\left(\sum |\rho_i|^2\right)^4 \leqslant 8|D|,$$

где ρ_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ — сопряженные значения $\rho = \rho_1$.

Примечание референта. Наиболее естественным путем в изучении такого рода задач является разработанный в ряде исследований Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева геометрический метод (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1940, 11). Б. М. Уразбаев

6436. Вычисление единиц кубических циклических полей. Кон, Горн (A computation of cyclic cubic units. Cohn Harvey, Gorn Saul), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1957, **59**, № 3, 155—168 (англ.)

Подробное описание программы работ на электронной вычислительной машине типа EDVAC, позволившей составить таблицу основных единиц кубических циклических полей, дискриминанты которых делятся на одно только простое число $p \equiv 1 (3)$ в пределах от 7 до 499 включительно. Б. М. Уразбаев

6437. Некоторые опыты по разложению на идеальные множители, проделанные на машине МИДАК. Кон (Some experiments in ideal factorization on the MIDAK. Cohn Harvey), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, **2**, № 2, 111—116 (англ.)

Рассматривается кубическое абелево поле K с дискриминантом $D = p^2$, где p — простое число. Описывается метод разложения на машине МИДАК рациональных простых чисел на простые идеалы поля K. Проведены две серии вычислений. В первой серии рассматривается поле K, имеющее четное число классов идеалов и $p < 3000$. Во второй серии — поле K, имеющее нечетное число классов идеалов и $1021 \leqslant p \leqslant 1381$. Полученные разложения не приведены, указано лишь количество различных типов простых чисел $q < p/9$. В. Д. Подсыпанин

6438. Численное изучение формулы Дедекинда для числа классов идеалов чисто кубических полей. Кон (A numerical study of Dedekind's cubic class number formula. Cohn Harvey), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1957, **59**, № 4, 265—271 (англ.)

Приводятся вычисленные на электронной машине типа SEAC таблицы для числа h классов идеалов чисто кубических полей в пределах до $h \leqslant 27$ (таблица 1) по известной формуле Дедекинда (Dedekind R., J. reine und angew. Math., 1900, **121**, 40).

Вторая таблица содержит список квадратичных форм (приведенных), соответствующих кубическим полям, служащих для определения значения аргумента «эта-функции» Дедекинда

$$\eta(z) = \exp(2\pi i z / 12) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \exp 2\pi i z n),$$

участвующей в указанной формуле. Б. М. Уразбаев

6439. Формулы для разрешения сравнений $x^2 \equiv a \pmod P$ в случаях, до сих пор неизвестных, и их применение для прямого определения первообразных корней некоторых простых чисел. Шёнхейм (Formule pentru rezolvarea congruenței $x^2 \equiv a \pmod P$ în cazuri pînă acum necunoscute și aplicarea lor pentru a determina direct rădăcinile primitive ale unor numere prime. Schönheim Ioan), Studii și cercetări mat. și fiz. Acad. RPR Fil. Cluj, 1956, **7**, № 1-4, 51—58 (рум.; рез. русск., франц.)

Классическое сравнение $x^2 \equiv a \pmod P$ может быть решено в формуле в случае $P \equiv 3 \pmod 4$ или $P \equiv 5 \pmod 8$ (гл. V, вопр. 2 книги И. М. Виноградова — РЖМат, 1953, 1061 К). В настоящей работе получены

формулы для решения сравнения в случае $P \equiv 1 \pmod 8$. Однако эти формулы довольно громоздки. Далее вводится понятие примитивного квадратичного вычета, как числа, принадлежащего показателю $(p-1)/2$. Используя это понятие, автор получает формулу для нахождения первообразных корней. В. Д. Подсыпанин

6440. Несколько теорем о сравнениях. Бхаскаран (On some theorems on congruence. Bhaskaran M.), Math. Student, 1957, 25, № 1-2, 40—41 (англ.)

Дается новое доказательство известной теоремы:

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1} - p - (p-1)! \equiv \equiv 0 \pmod{p^2},$$

где p — простое число.

Доказываются две теоремы:

а) Пусть $(x+a)(x+a+1)\ldots(x+a+n-1) = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$, где a — произвольное целое число, n — натуральное число с простым делителем p. Тогда все A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$, за исключением $i = p-1$; $2(p-1); \ldots; n(p-1)/p$), делятся на p и, кроме того, $1 + \Sigma_{q=1}^{n/p} A_{q(p-1)} \equiv 0 \pmod p$.

б) Пусть a, k, n — натуральные числа, p — простой делитель числа n. Тогда $a^k + (a+1)^k + \ldots + (a+n-1)^k \equiv 0 \pmod p$.

Н. В. Гордеев

6441. Об одном классе целочисленных полиномов. Якобсталь (Über eine Klasse ganzwertiger Polynome. Jacobsthal Ernst. Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1957, **30**, № 8, S. 50—54) (нем).

Пусть $a_l = \binom{x+l}{l}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ и $P_n = \Pi_{i=0}^{n-1} a_i$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, причем по определению $P_0 = 1$. Доказывается, что рациональная функция $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = P_n / P_k P_{n-k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, является целочисленным полиномом от x степени $k(n-k)$.

Н. В. Гордеев

6442. Об одной теоретико-числовой сумме. Якобсталь (Über eine zahlentheoretische Summe. Jacobsthal Ernst. Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1957, **30**, № 6, S. 35—41) (нем.)

Пусть $[x]$ — наибольшее число $\leqslant x$; a, b, m — целые числа, причем $m \geqslant 1$; r — произвольное натуральное число. Доказывается, что

$$\sum_{h=0}^{r-1} \left\{ \left[\frac{a+b+h}{m} \right] + \left[\frac{h}{m} \right] - \left[\frac{a+h}{m} \right] - \left[\frac{b+h}{m} \right] \right\} \geqslant 0.$$

Н. В. Гордеев

6443. О наибольшем целом числе. I. Якобсталь (Über die grösste ganze Zahl. I. Jacobsthal Ernst), Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1957, **30**, № 1, S. 1—5 (нем.)

Пусть $\Delta(x, y, n) = [nx + ny] - [nx] - [ny]$, где $[a]$ — наибольшее целое число $\leqslant a$; x, y — действительные числа, n — натуральное число. Рассматривается

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \Delta(x, y, n)}{N} = A(x, y)$$

и доказывается, что

а) $A(x, y) = 0$ тогда и только когда, тогда хотя бы один из чисел x, y является целым;

б) $1/6 \leqslant A(x, y) < 1$, если ни один из чисел x, y не является целым при этом полуинтервал $[1/6, 1)$ не может быть уменьшен;

в) $A(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда x, y — иррациональные числа, но $x + y$ — целое число.

Н. В. Гордеев

6444. О наибольшем целом числе. II. Якобсталь (Über die grösste ganze Zahl. II. Jacobsthal Ernst. Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1957, **30**, № 2, S. 6—13) (нем.)

Ч. I см. реф. 6443.

Рассматривается квадратная матрица $A_n = (a_{r,s})$, где $a_{r,s} = [r/s]$ и r, $s = 1, 2, 3, \ldots, n$. Доказывается, что $A_n^{-1} = (b_{k,\lambda})$, где $b_{k,\lambda} = \bar{\mu}(k/\lambda) - \bar{\mu}(k/(\lambda+1))$ и k, $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n$, причем $\bar{\mu}(x) = 0$ для положительного не целого x и $\bar{\mu}(x) = \mu(x)$ для натурального x.

Для бесконечной матрицы $A = (a_{r,s})$ верны теоремы:

а) Для данного натурального числа m в матрице A существуют ровно $(m-1)(m+2)/2$ строчек, в которых число m не встречается.

б) Для данных натуральных чисел m и p существуют в матрице A ровно $m(m+1)$ строчек, в которых число m содержится ровно p раз. Первая из этих строчек имеет номер $N_1 = (p-1)m^2 + pm$, а последняя из них — номер $N_2 = (p+1)m^2 + pm - 1$.

Н. В. Гордеев

6445. Теорема элементарной арифметики. Керудакес, Мёснер (A theorem of the elementary arithmetic. Xeroudakes George, Moessner Alfred), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1954, **57**, № 2, 89—92 (англ.)

Доказывается теорема: Если n и N — натуральные числа, N имеет по крайней мере один простой множитель формы $4k+1$, то удвоенная степень числа N^n равна по крайней мере одной сумме четырех целых чисел, квадраты и кубы которых имеют соответственно суммы, равные удвоенному квадрату и кубу числа N^n. Можно найти эти выражения для $2N^n$. Дан числовой пример.

В. А. Голубев

6446. Доказательство одной теоремы о пифагоровых числах. Коэрс (Beweis eines Satzes über pythagoreische Zahlen. Coers H.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, **10**, № 6, 272—273 (нем.)

Куземанн дал без доказательства следующую теорему: Если C — бо́льшее из трех взаимно простых пифагоровых чисел A, B, C, то C разлагается в произведение степеней таких простых чисел, которые являются суммами квадратов двух целых чисел. Дается наверное доказательство.

В. А. Голубев

6447. 14 новых составных чисел Ферма. Серпинский (Czternaście nowych liczb Fermata złożonych. Sierpinski Wacław), Matematyka, 1957, **10**, № 4, 1 (польск.)

До 1956 г. было известно 15 составных чисел Ферма $F_n = 2^{2^n} + 1$ при $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 18, 23, 26, 38$ и 73. Сообщается, что Селфриджем (РЖМат, 1958, 2723) при помощи электронной вычислительной машины SWAK найдены делители для 14 новых составных чисел F_n, при $n = 39, 55, 63, 117, 125, 144, 150, 207, 226, 228, 268, 284, 316, 452$. Наибольшее из этих чисел F_{452}, имеющее 10^{135} цифр по десятичной системе счисления, делится на число $27 \cdot 2^{455} + 1$, имеющее 139 цифр.

В. А. Голубев

6448. Совершенные и дружественные числа. Канольд (Vollkommene und befreundete Zahlen. Kanold Hans-Joachim), Nachr. Giessener Hochschulges., 1955, **24**, 122—130 (нем.)

Сообщаются без доказательств наиболее значительные результаты, полученные разными авторами при исследовании совершенных и дружественных чисел. Формулируются некоторые проблемы из этой области. Изложение популярное. Библ. 12 назв. Н. В. Гордеев

6449. Аргументы Евклида о бесконечности простых чисел. Барбилян (Argumentul lui Euclid asupra infinităţii numerelor prime. Barbilian D.),

Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1957, 8, № 1-2, 7—72 (рум.; рез. русск., франц.)

При использовании обычного закона взаимности в области рациональных чисел доказывается (§ 4) существование бесконечного числа простых идеалов степени 2 во всяком квадратичном поле, исключая полей, имеющих дискриминанты $d>0$:

1) $d \equiv 1 \pmod 4$;

2) $d \equiv 0 \pmod 8$, $d/8 = -1 \pmod 8$.

Дается элементарное доказательство теоремы Дирихле о простых числах $p \equiv -1, \pm 3 \pmod 4$ (§ 3), а также доказательство бесконечности «простых» элементов в абстрактных кольцах с единицей и без делителей нуля (§ 1). Б. М. Уразбаев

6450. Об однозначности разложения на простые множители в кольцах целых чисел Дирихле. Поповичи (Asupra unicităţii descompunerii în factori primi în inelele de întregi ai lui Dirichlet. Popovici Constantin P.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR, 1957, 8, № 1—2, 73—101 (рум.; рез. русск., франц.)

Продолжение серии работ автора, посвященных изучению арифметических свойств относительно квадратичных полей (РЖМат, 1956, 4320, 5704; 1957, 1127). Устанавливается существование относительно квадратичных расширений над полем гауссовых чисел, в которых справедлив или не справедлив закон однозначности разложения целых чисел Дирихле в произведение неразложимых сомножителей. Приводится таблица относительно квадратичных полей $R(i, \sqrt{\delta})$ с однозначностью разложения для всех δ с нормой $N(\delta) \leqslant 100$. Б. М. Уразбаев

6451. Критерий единственности разложения на простые множители в чисто мнимых кольцах целых чисел. Попович (Criterii pentru unicitatea descompunerii în factori primi în inelele imaginare de întregi pătratici.. Popovici Constantin P.), Bul. ştiinţ., Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1957, 9, № 1,5—17 (рум.; рез. русск., франц.)

Продолжение работы автора (реф. 6450). Указываются достаточные условия единственности разложения на неразложимые множители в чисто мнимых квадратичных полях, которые применяются к полям $R(\sqrt{-p})$, где $p \equiv 19 \pmod{24}$ — простое число. Б. М. Уразбаев

6452. Заметка о распределении чисел, взаимно простых с n. Мак-Карти (Note on the distribution of the totatives. McCarthy Paul J.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 8, Part 1, 585—586 (англ.)

Доказывается теорема, дополняющая результаты Лемера (РЖМат, 1956, 2760): Если k — простое, то числа, взаимно простые с n, равномерно распределяются относительно k тогда и только тогда, когда n — «исключительное» относительно k. Кроме того, если k не свободно от квадратов, тогда имеется целое $n>k$ такое, что числа, взаимно простые с n, будут равномерно распределены относительно k, хотя n не «исключительное» относительно k. В. А. Голубев

6453 К. Вычисление числа классов идеалов абелева поля над квадратичными числовыми полями. Мейер (Die Berechnung der Klassenzahl abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern. Meyer Curt. Berlin, Akad.-Verl., 1957, 132 S.) (нем.)

Монография посвящена проблеме определения числа классов идеалов широкого круга относительно абелевых полей над квадратичными числовыми полями. Она состоит из трех частей и введения, где дается довольно подробная история вопроса, начиная с фундаментальных исследований Гаусса, Дирихле и Куммера.

В первой части (§§ 1 — 3) — алгебраические, арифметические и аналитические основы — рассматривается теоретико-групповая структура числовых полей, изучаемых в монографии. Пусть K — поле алгебраических чисел конечной степени, Ω — квадратичное поле над полем рациональных чисел P, Γ — нормальное расширение поля K, абелево над квадратичным полем Ω. Пусть K_0, Γ_0 — наибольшие абсолютно абелевы поля, содержащиеся, соответственно, в K и Γ; K^*, Γ^* — наибольшие поля классов, соответственно, полей K и Γ относительно числовых колец (mod f) в Ω, как ассоциированных с ними групп (т. е. относительно числового кольца (mod f), состоящего из главных идеалов Ω, взаимно простых с натуральным числом f, удовлетворяющих $\alpha \equiv r \pmod f$, где r — рациональное число); K_0^*, Γ_0^* — наибольшие абелевы подполя полей K^*, Γ^*.

Рассматриваются два типа полей K в зависимости от того $K \supset \Omega$ (поля типа I) или $K \not\supset \Omega$ (типа II). Для полей типа I, как абелевых, согласно теории полей классов, строятся соответствующие дедекиндовы дзета-функции через L-ряды Дирихле:

$$\zeta_K(s) = \prod_{\chi} L(s/\chi) = \zeta_\Omega(s) \prod_{\chi \neq 1} L(s/\chi), \qquad (1)$$

где χ — характеры группы Галуа поля K над Ω. То же самое делается и для полей типа II, но не непосредственно, а через посредство полей Γ, поскольку сами K неабелевы. Переход к полям K осуществляется с помощью соотношений вида

$$\left(\frac{\zeta_K(s)}{\zeta_{K_0}(s)}\right)^2 = \frac{\zeta_\Gamma(s)}{\zeta_{\Gamma_0}(s)}, \qquad (2)$$

полученных Артином при обобщении L-рядов Дирихле (Artin E., Abhandl. math. Semin. Univ. Hamburg, 1923, Bd. 3; 1931, Bd. 8) На основе известного предела $\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) = g_K$ и соотношения (1) строятся аналитические формулы вида

$$\frac{g_K}{g_{K_0}} = \frac{g_{K^*}}{g_{K_0^*}} \prod_{\substack{\chi=\chi_0 \\ \chi\neq\psi}} L(1/\chi), \qquad \frac{g_{K^*}}{g_{K_0^*}} = \prod_{\psi\neq\psi_0} L(1/\psi,) \qquad (3)$$

где χ, χ_0, ψ, ψ_0 — характеры групп Галуа, соответственно, полей K/Ω, K_0/Ω, K^*/Ω, K_0^*/Ω. Аналогичные формулы строятся и для полей типа II, исходя из (2).

Определение числа классов идеалов сводится, таким образом, к исследованию формул вида (3), в частности нахождению значений $L(1/\chi)$ и $L(1/\psi)$ для различных полей типа I и II. Этому вопросу посвящена вторая часть работы (§§ 4 — 13) — Предельные формулы Кронекера для L-функций полей классов кольцевых и лучевых классов (Ring- und Strahlklassen) над квадратными числовыми полями и их применение для суммирования L-рядов. Существенно здесь то, что выделяются главные части разложений дзета-функций Дедекинда и обобщенных L-функций Артина в ряды Лорана в окрестности точки $s=1$, которая во всех случаях оказывается полюсом первого порядка. Для чисто мнимых полей (§§ 4 — 5) результаты автора совпадают с полученными прежде формулами Фуэтера (Fueter R., Göttinger Nachr., 1907; Rend. Palermo, 1910, 29) и Хекке (Hecke E., Verhandl. naturforsch. Ces. Basel, 1917, 28). Значительно труднее построение разложений L-рядов полей над чисто вещественными квадратичными полями, поскольку здесь существуют нетривиальные единицы и два бесконечных дивизора $\mathfrak{P}_\infty$, $\mathfrak{P}'_\infty$ в Ω, отличных от $P_\infty = \mathfrak{P}_\infty \mathfrak{P}'_\infty$ (§§ 8 — 13).

В третьей части работы (§§ 14 — 15) — формулы для числа классов идеалов, — исходя из формул (3) и найденных значений $L(1/\chi)$, $L(1/\psi)$ во второй части, даются окончательные и явные формулы для числа классов

идеалов (§ 15) во всех случаях полей типа I и II, в частности для вполне мнимых, вполне вещественных и полувещественных полей K отдельно для чисто мнимых и для чисто вещественных квадратичных полей Ω. Формулы эти громоздкие. Б. М. Уразбаев

6454 Д. Об аппроксимации комплексных чисел. **П у а т у** (Sur l'approximation des nombres complexes. P o i t o u G e o r g e s.— Thèse doct. sci. math., fac. sci. Univ. Paris, 1953, Paris, Gauthier — Villars, 1954, 67 p.) (франц.)

Гурвиц показал, что для всякого действительного иррационального числа x существует бесчисленное множество дробей p/q таких, что $|x - p/q| < 1/\sqrt{5}q^2$, причем постоянная $\sqrt{5}$ является «наилучше возможной».

Однако это не значит, что для каждого заданного x постоянная $\sqrt{5}$ не может быть заменена большей. Марков показал, что существует возрастающая последовательность постоянных $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{221}/5$, ..., сходящаяся к 3, каждая из которых соответствует некоторому классу действительных квадратических чисел. В реферируемой диссертации вопросы этого рода рассматриваются в комплексном случае.

Пусть R обозначает поле рациональных чисел $K = R(\sqrt{-m})$ — мнимое квадратичное поле, причем m — целое положительное бесквадратное число. Дискриминант поля K обозначим через $-D$. Если $m \equiv 3 \pmod 4$, то $D = m$; в противном случае $D = 4m$.

Рассматривается вопрос об аппроксимации комплексных чисел X «дробями» P/Q, где P и Q — целые числа одного и того же поля K. Нетрудно показать существование положительной постоянной c (зависящей от K) такой, что для всякого X существует бесчисленное множество «дробей» P/Q, для которых $|X - P/Q| < 1/c|Q|^2$. Для каждого комплексного числа X не принадлежащего полю K, автор называет постоянной аппроксимации X величину

$$C(X) = \overline{\lim} |Q(QX - P)|^{-1}$$

для всех дробей P/Q поля K со знаменателями $\neq 0$. Множество постоянных аппроксимации автор называет спектром Маркова поля K, а его нижнюю грань — постоянной Гурвица поля K и обозначает ее через C_D, где D — дискриминант поля K.

Ранее были известны значения постоянных Гурвица C_3, C_4, C_7, C_8 и что постоянная C_4 — изолированная.

Основными результатами являются:

1) Постоянная Гурвица $C_{11} = \sqrt{5}/2 = 1{,}118\ldots$. Она является изолированной точкой в своем спектре Маркова. Другие значения $> 1{,}21$.

2) Спектр Маркова поля $K = R(\sqrt{-3})$ обладает тремя первыми изолированными значениями: $\sqrt[4]{13} = 1{,}898815$; 2 и $\sqrt{32\sqrt{3}/13} = 2{,}064875\ldots$ Другие значения $> 2{,}070068$. Число $\sqrt{(28 + 16\sqrt{3})/13} = 2{,}070169\ldots$ является точкой сгущения этого спектра.

3) Постоянная Гурвица $C_{19} = 1$.

Метод автора базируется на дальнейшем развитии алгорифма непрерывных дробей, данного Гурвицем (Hurwitz, Acta Math., 1888, **11**; 187 — 200). Г. А. Ломадзе

См. также: 6387

АЛГЕБРА

Редакторы *А. И. Ширшов*, *Г. Н. Поваров*

6455 К. Алгебра. Изд. 3-е. В а н - д е р - В а р д е н (Algebra. 3 Aufl. V a n d e r W a e r d e n B. L. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Bd. XXXIV), Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer, 1955, viii, 224S., 29. 60 DM) (нем.)

6456 К. Упражнения по алгебре. Т и р е (Exercícios de álgebra. 21. ed. T h i r é C é c i l. Rio de Janeiro, Liv. Francisco Alves, 1957, 221 p., 65,00 cruz.), Bol. bibliogr., brasil., 1957, 5, № 4, 189 (порт.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

6457. К вопросу о структурных свойствах биномиальных коэффициентов. Ш у л и п е н к о О. И., Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, 1957, вып. 16, 17—21

Элементарная задача.

6458. О понятии и применении факториалов. Х е р т е г (Über Begriff und Anwendung der Faktoriellen. H ä r t t ä g W.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, **10**, № 5, 205—212 (нем.)

Приводится вывод следующих формул:

$$[x^n][x+m]^m = [x+m]^{m+n};$$

$$[x+y]^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} [x]^{m-i}[y]^i;$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} [x+i]^n = \frac{[x+k]^{n+1} - [x]^{n+1}}{n+1};$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{[x+i]^{n+1}} = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{[x]^n} - \frac{n}{[x+k]^n}\right\};$$

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} [x+k-i]^n = [n]^k [x]^{n-k},$$

где $[x]^m = \dfrac{x!}{(x-m)!}$.

А. Г. Школьник

6459. Треугольник Паскаля для коэффициентов многочлена. М и л л е р (A Pascal triangle for the coefficients of a polynomial. M i l l e r R i c h a r d A.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 4, 268—269 (англ.).

Дается алгоритм для вычисления коэффициентов многочлена, корни r_i ($i = 1,2,\ldots, n$) которого известны. Автор строит таблицу, в которую вписывает последовательно коэффициенты многочленов степени 1, 2, 3 ...., корни которых r_1; r_1, r_2; r_1, r_2, r_3;... соответственно, используя для этого некоторую рекуррентную формулу. Г. Н. Веселая

6460. Многократные числа. Т и р н и, Т а й л е р (Multiple numbers. T i e r n e y J o h n A., T y l e r J o h n), Math. Mag., 1957, **31**, № 1, 27—29 (англ.)

Многократное число, по определению автора, это число вида $c = \sum_{i=0}^{n} x_i r^i$, где r удовлетворяет уравнению $r^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i r^i$, $x_i a_i$ — действительные числа, причем уравнение, определяющее r, не имеет кратных корней. Подробно рассмотрен случай $n = 1$, т. е. $c = x + ry$, $r^2 = pr + q$. Как и для комплексных чисел, введены понятия модуля, аргумента, полярной формы; выводится

обобщенная формула Муавра. В заключение дается приложение многократных чисел к решению диофантова уравнения $z^3 = u^2 + v^2$. Г. Н. Веселая

6461. Подтверждение одной догадки И. Шура. Шереш (I. Schur egy sejtésének igazolása. Seres Iván), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1956, 6, № 2, 219—227 (венг.)

Доказывается ряд теорем о неприводимости некоторых полиномов. I. Полином $F(x) = \prod_{k=1}^{M}(x - a_k)^{2n} + 1$ при условии, что a_k — различные между собой целые рациональные числа, неприводим в кольце $\Gamma(x)$ полиномов с рациональными коэффициентами. Есть высказывания, что И. Шур предполагал справедливость этого предложения. Теорема ранее была доказана для $n = 0, 1, 2, 3$. II. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_M$ — различные между собой целые рациональные числа, $f_m(x)$ — полином деления круга и $P(x) = \prod_{k=1}^{M}(x - a_k)$. При $M \geqslant 5$ полином $f_m(P(x))$ неприводим в $\Gamma(x)$. Теорема справедлива и при $M = 3,4$ при условии, что равенства $a_k = a_1 + k - 1$ $(k = 1, \ldots, M)$ не имеют места. III. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_M$ — различные между собой целые рациональные числа, $Q(x)$ — полином с целыми рациональными коэффициентами и старшим коэффициентом 1, $f_m(x)$ — полином деления круга $(m > 2)$ и $R(x) = Q(x)\prod_{k=1}^{M}(x - a_k)$. При условии, что $M \geqslant 6$ и степень полинома $Q(x)$ меньше степени полинома $\prod_{k=1}^{M}(x - a_k)$, полином $f_m(R(x))$ неприводим в $\Gamma(x)$. IV. Полином $\psi(x) = Q(x)\prod_{k=1}^{M}(x - a_k) - \zeta$ $(\zeta = e(2\pi i/m))$, если $Q(x)$, a_k, M и m удовлетворяют перечисленным в III условиям, неприводим над полем $\Gamma(\zeta)$. А. Г. Школьник

6462. К вопросу о восстановлении полинома по его целочисленным значениям и разложении его на множители. Макаров Ф. П., Уч. зап. Тираспольск. пед. ин-та, 1956, вып. 1, 115—120

Доказывается, что полином $\varphi(x)$ с целыми коэффициентами может быть определен по одному только его значению $\varphi(x_1)$ в целочисленной точке $x_1 > 2\beta$ $(x_1 > \beta$, если коэффициенты положительны), где β — наибольшая из абсолютных величин коэффициентов полинома. Коэффициентами искомого полинома служат остатки от деления на x_1 значения $\varphi(x_1)$ и последовательных частных (в общем случае из двух возможных остатков, положительного и отрицательного, надо брать наименьший по абсолютной величине). Пусть целочисленный полином разлагается на произведение целочисленных полиномов: $f(x) = \varphi(x)\cdot\psi(x)$. Если α, β, γ — наибольшие абсолютные величины коэффициентов $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ соответственно и $\beta \leqslant \gamma$, то $\sqrt{\alpha}$ является верхней границей чисел $\beta \leqslant \sqrt{\alpha}$. Устанавливается также нижняя граница чисел γ. Полученные результаты используются для разложения целочисленного полинома на множители. Пусть $f(x)$ — данный полином и α — наибольшая из абсолютных величин его коэффициентов. За x_1 выбирается целое число $\geqslant 2\sqrt{\alpha} + 1$ (или $\sqrt{\alpha} + 1$, если коэффициенты положительны). Вычисляется $f(x_1)$. Среди делителей $f(x_1)$ находится и $\varphi(x_1)$, где $\varphi(x)$ — делитель $f(x)$ (если таковой существует). По значениям делителей $f(x_1)$ восстанавливаются соответствующие полиномы, которые и подвергаются проверке. А. Г. Школьник

6463. Замечание к предшествующей статье. Алгебраические уравнения, которым удовлетворяют корни из натуральных чисел. Штраус, Таусски (Remark on the preceding paper. Algebraic equations satisfied by roots of natural numbers. Straus E. G., Taussky O.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 1, 97—98 (англ.)

Добавление к статье Гофмана, Ньюмана и авторов (РЖМат, 1958, 166). Доказывается теорема: Полином $\Phi_h(x^k/n)$, где Φ_h — полином деления круга, k и n — натуральные числа, $n \neq m^d$ $(d/k,\ d > 1)$, неприводим при всех нечетных k. Если $k = 2l$, то $\Phi_h(x^k/n)$ приводим в том и только том случае, когда приводим полином $\Phi_h(x^2/n)$ (условия приводимости последнего полинома рассмотрены в цит. выше статье). В случае приводимости $\Phi_h(x^2/n)\,\Phi_h(x^{2l}/n) = g(x^l)\,g(x^{-l})$, причем полиномы в правой части равенства неприводимы. А. Г. Школьник

6464. Об одном методе установления признаков неприводимости полиномов. Мурзаев Е. А., Уч. зап. Саратовск. пед. ин-та, 1956, вып. 23, 107—114

Пусть $f_1(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ — полином с целыми рациональными коэффициентами; $f_k(x) = x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$ $(m = C_n^k)$ — полином, корнями которого являются всевозможные произведения корней полинома $f_1(x)$ по k корней в каждом произведении. Легко доказывается от противного, что если в ряду полиномов

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x)$$

нет ни одного имеющего хотя бы один рациональный корень, то полином $f_1(x)$ неприводим над полем рациональных чисел. Далее рассматривается полином:

$$x^n + a_1p^{l_1}x^{n-1} + a_2p^{l_2}x^{n-2} + \ldots + a_np^{l_n}, \qquad (1)$$

в котором p — простое число, l_i — целые положительные числа, a_i — целые числа, взаимно-простые с p. Доказывается, что в случаях: 1) когда $\frac{l_i}{i} \geqslant \frac{l_n}{n}$, $l_i \not\equiv 0 \pmod n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и 2) когда $\frac{l_i}{i} > \frac{l_n}{n}$, $(i = 1, \ldots, n)$, $l_n \equiv 0 \pmod n$, $(d_j)^n \not\equiv -a_n \pmod p$, где d_j — всевозможные делители (в том числе и отрицательные) числа a_n, полином (1) не имеет рациональных корней. Опираясь на эти предложения, устанавливается неприводимость полинома (1) в случаях: 1) когда $\frac{l_i}{i} \geqslant \frac{l_n}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $(l_n, n) = 1$; 2) (когда $\frac{l_k}{k} > \frac{l_n}{n}$, $(l_n, n) = d \neq 1$ и $(d_j)^{C_n^k} \not\equiv (a_n)^{C_{n-1}^{k-1}} \pmod p$, где d_j принимает значения каждого из делителей a_n, а $k\,(< n)$ пробегает значения, кратные n/d. Доказанные предложения могут быть перенесены на полиномы из кольца $K[x]$, где K — любая область целостности с единицей, в которой имеет место однозначное разложение на неприводимые множители. А. Г. Школьник

6465. О приводимости полиномов над конечным полем. Шварц (On the reducibility of polynomials over a finite field. Schwarz Stefan), Quart. J. Math., 1956, 7, № 26, 110—124 (англ.)

Пусть $f(x)$ — полином степени m над конечным полем $T = GF(q)$, где $q = p^s$, и $f(x) = f_1(x)^{k_1}f_2(x)^{k_2} \ldots f_r(x)^{k_r}$ (1) — разложение полинома $f(x)$ на различные неприводимые множители, m_i — степень полинома $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Рассматривается система сравне-

ний по модулю $f(x)$:

$$\left.\begin{aligned} &c_{00}+c_{01}x+\ldots+c_{0,\,m-1}x^{m-1}\equiv x^0\\ &c_{10}+c_{11}x+\ldots+c_{1,\,m-1}x^{m-1}\equiv x^q\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &c_{m-1,0}+c_{m-1,1}x+\ldots+\\ &+c_{m-1,\,m-1}x^{m-1}\equiv x^{(m-1)q} \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{mod}\ f(x)).$$

Матрица этой системы (c_{ik}) обозначается через C; E_m — единичная матрица m-го порядка. Батлером (РЖМат, 1955, 4873) было доказано, что число r различных неприводимых множителей в разложении $f(x)$ определяется равенством $r=m-h_1$, где h_1 — ранг матрицы $C-E_m$. В настоящей статье дается способ нахождения не только числа r неприводимых множителей, но и их степеней m_i. Доказывается, что характеристический многочлен матрицы C допускает следующее разложение:

$$|C-\lambda E_m|=(-1)^m\lambda^{\rho}(\lambda^{m_1}-1)(\lambda^{m_2}-1)\ldots(\lambda^{m_r}-1), \quad (2)$$

$$\rho=m-(m_1+m_2\ldots+m_r)$$

Для поля $GF(p)$ формула эта была доказана Петром (Petr K., Časopis pěst. mat. fys., 1937, 66) для случая $k_1=k_2=\ldots=k_r=1$ и автором (Věstník Královské české spol. nauk, 1939, 1 — 7). В данной статье формула (2) доказывается для любого конечного поля. Каждому неприводимому множителю $f_i(x)$ степени m_i в разложении (1) отвечает в (2) множитель $\lambda^{m_i}-1$. Имеет место и обратное, если только ни одно m_i не делится на характеристику p поля T, и если никакие p среди показателей m_i не равны между собой. Заключительная теорема дает решение вопроса в следующей форме. Через σ_i обозначается число различных неприводимых множителей в разложении $f(x)$ степени i $(0\leqslant i\sigma_i\leqslant m)$, h_l — ранг матрицы C^l-E_m. Тогда числа $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m$ определяются из системы уравнений (где через (i,k) обозначен о. н. д. чисел i и k):

$$\begin{cases}(1,1)\sigma_1+(1,2)\sigma_2+\ldots+(1,m)\sigma_m=m-h_1\\ (2,1)\sigma_1+(2,2)\sigma_2+\ldots+(2,m)\sigma_m=m-h_2\\ (m,1)\sigma_1+(m,2)\sigma_2+\ldots+(m,m)\sigma_m=m-h_m.\end{cases} \quad (3)$$

Определитель системы (3) $|(i,k)|=\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(m)$, где $\varphi(x)$ — функция Эйлера, отличен от нуля, и, таким образом, числа σ_i определяются однозначно.

А. Г. Школьник

6466. О приближенном решении уравнений высших степеней. Булавко А. Г., Тр. Саратовск. автомоб.-дор. ин-та, 1956, сб. 14, 431—444

Устанавливаются формулы, дающие приближенное значение наибольшего (x_1) и наименьшего (x_n) из n действительных чисел, для которых известна их сумма s_1 и сумма их квадратов s_2:

$$x_{1,n}\approx\frac{s_1}{n}\pm\frac{\sqrt{n-1}}{n}\sqrt{ns_2-s_1^2}, \quad (1)$$

при этом для x_1 формула (1) дает приближение с избытком, а для x_n с недостатком (для $n=2$, а также в случае, когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$ и $x_1>x_2=x_3=\ldots=x_n$ формула дает точные значения) и таким образом устанавливает промежуток, в котором лежат x_i. Для уравнения $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$, корни которого действительны, из (1) вытекает приближенное выражение для наибольшего и наименьшего корней уравнения:

$$x_{1,n}\approx-\frac{a_1}{a_0n}\pm\frac{\sqrt{n-1}}{na_0}\sqrt{(n-1)a_1^2-2na_0a_2}. \quad (2)$$

С помощью подстановки в данное уравнение $x=1/y$ и соотношения (2) выводится формула

$$x_{i,k}\approx-na_n/(a_{n-1}\mp\mp\sqrt{n-1}\sqrt{(n-1)a_{n-1}^2-2na_na_{n-2}}), \quad (3)$$

дающая в случае, когда корни уравнения имеют разные знаки, приближенные значения положительного и отрицательного корней уравнения, наименьших по абсолютной величине. Далее, опираясь на (3), с помощью формулы Тэйлора, автор устанавливает формулу, позволяющую последовательно уточнять приближенные значения, дающие выражение корня в $(k+1)$-м приближение через k-е приближение корня:

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}-nf(x_i^{(k)})/[f'(x_i^{(k)})\times$$
$$\times\sqrt{(n-1)[f'(x_i^{(k)})]^2-nf(x_i^{(k)})f''(x_i^{(k)})}]. \quad (4)$$

Доказывается, что процесс, определяемый соотношением (4), сходящийся: $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k+1)}=x_i$.

Примечание референта. Не обоснована возможность применения полученных автором результатов в случае мнимых корней. А. Г. Школьник

6467. О методе Лагерра отделения корней алгебраических уравнений. Кулик (On the Laguerre method for separating the roots of algebraic equations. Kulik Stephen), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 841—843 (англ.)

Из разложения на простые дроби:

$$\frac{(u-x)(v-x)f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(u-a_i)(v-a_i)}{x-a_i}+$$
$$+n(x-u-v)+\sum_{i=1}^{n}a_i \quad (1)$$

где $f(x)=0$ — алгебраическое уравнение с действительными корнями a_i $(i=1,2,\ldots,n)$, путем $(k-1)$-кратного его дифференцирования, выводится уравнение

$$(u-x)(v-x)D_k+(u+v-2x)fD_{k-1}+f^2D_{k-2}=0, \quad (2)$$

где

$$D_k=\begin{vmatrix} f_1 & f & 0 & \ldots 0\\ f'' & f' & f & \ldots 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ f^{(k)}/(k-1)! & f^{(k-1)}/(k-1)! & f^{(k-2)}/(k-2)! & \ldots f' \end{vmatrix},$$

которое при четном k и фиксированном $x\neq a_i$ обладает тем свойством, что между любыми числами u и v, удовлетворяющими этому уравнению, лежит по крайней мере один корень уравнения $f(x)=0$. При $k=2$ (и $D_0=n$) уравнение (2) переходит в соотношение, установленное Лагерром (Oeuvers de Laguerre, 1898, 1). Если a_1 — корень многочлена $f(x)$, удовлетворяющий условию $|x-a_1|<|x-a_i|$ $(i=2,3,\ldots,n)$, то $a_1=\lim\limits_{k\to\infty}u$, где u берется из уравнения (2).

А. Г. Школьник

6468. Квадратичные (или эрмитовы) формы, которым подчинены определенные (или полуопределенные) формы. Керубино (Forme quadratiche (o hermitiane) subordinanti forme definite e semidefinite. Cherubino Salvatore), Industria (Ital.), 1957, № 3, 500—504 (итал.)

Пусть S_n — действительное n-мерное пространство; $x=(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная точка этого пространства; xAx_{-1} — квадратичная форма с n переменными, заданная ее матрицей $A=A_{-1}=\bar{A}$. Совокупность уравнений $Bx_{-1}=0$, где B — действительная матрица ранга $m(<n)$ с m строками и n столбцами, устанавливает соответствие между формой xAx_{-1} и квадратичной формой с $m-n$ переменными в пространстве S_{n-m}, которая называется подчиненной форме xAx_{-1}. Аналогично для формы xAx_{-1} может быть построена такая квадратичная форма в пространстве S_{n+m}, для которой xAx_{-1} будет подчиненной формой. Полученные автором формулы в основном относятся к строению главных миноров матриц заданной формы и формы, ей подчиненной.

В. К. Туркин

6469. Об одной теории систем линейных уравнений, не зависимой от понятия определителя. Бурьян В. Ю., Уч. зап. Краснодарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 15, 19—31

Методическая статья, посвященная вопросу, указанному в заглавии. Автор рассматривает векторное пространство над полем комплексных чисел, причем вместо векторов говорит о величинах, не указывая, каким условиям должны удовлетворять понятия суммы и произведения на число, установленные для величин. Как это часто делается в преподавании, теория линейной зависимости излагается на основе метода последовательного исключения, а теория ранга матрицы — при помощи элементарных преобразований матриц. Далее следует общая теория систем линейных уравнений, не опирающаяся на правило Крамера.

А. Г. Курош

6470. Вычисление 2-й и 3-й характеристик матрицы B. Нилов Г. Н., Уч. зап. Кабардино-Балкарск. гос. пед. ин-т, 1957, вып. 12, 24—27

Рассматривается матрица B, имеющая вид косоугольного параллелограмма, состоящая из n строк по m элементов в каждой строке. r-й характеристикой $f(r, n, m)$ матрицы B называется число всех возможных сочетаний по r из элементов матрицы B, в каждое из которых входит не более одного элемента из каждой строки и каждого столбца матрицы B. Приводятся формулы для вычисления $f(2, n, m)$ и $f(3, n, m)$.

Е. Г. Шульгейфер

6471. Вычисление характеристики матрицы A. Нилов Г. Н., Уч. зап. Кабардино-Балкарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 12, 17—20

Показывается, как вычисление i-й характеристики матрицы A, получающейся из матрицы B (реф. 6470) путем выбрасывания из нее нескольких столбцов (содержащих элементы из первой строки) и приписывания к ней слева некоторой прямоугольной матрицы, число строк которой совпадает с числом n строк матрицы B, сводится к случаю, когда $i=n$. Для последнего случая приводится рекуррентная формула.

Е. Г. Шульгейфер

6472. Связь между полумагическими квадратами и матрицами-перестановками. Сагл (A relationship between semimagic squares and permutation matrices. Sagle Arthur A.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 9, 658—659 (англ.)

Доказывается, что каждая $n\times n$-матрица, у которой сумма элементов любой строки равна сумме элементов любого столбца, является линейной комбинацией матриц, полученных из единичной с помощью перестановок строк и столбцов.

А. И. Ширшов

6473. Один определитель. Карлиц (A determinant. Carlitz L.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 3, 186—188 (англ.)

Несбитт (Nesbitt) установил без доказательства, а Ниблетт доказал (Nibblett J. D., Amer. Math. Monthly, 1952, 59, 171—174), что определитель $D_n=|C_{2s-r}^{n+1}|$ $r, s=0,1,\ldots,n$ равен $2^{n(n+1)}/2$. В реферируемой статье рассматривается сначала определитель $D_n'=|C_{2s}^{n+1+r}|$, $r, s=0,1,\ldots,n$ и доказывается, что $D_n'=D_n$. Далее, взяв определитель более общего вида $\Delta_n(x)=|C_{2s}^{x+r}|$ $r, s=0,1,\ldots,n$, автор выводит формулу $\Delta_n(x)=\dfrac{(x)_n(x+1)_{n-1}\ldots(x+n-1)_1}{1^n3^{n-1}\ldots(2n-1)^1}$, где $(x)_n=x(x+1)\ldots(x+n-1)$. Используя получавшиеся промежуточные формулы при вычислении определителя $\Delta_n(x)$, автор получает рекуррентную формулу $D_n=2^nD_{n-1}$, откуда результат Несбитта — Ниблетта следует непосредственно. И, наконец, умножая $\Delta_n(k)$ на определитель Вандермонда $V_n=|a_s^{2r}|$ $r, s=0,1,\ldots,n$, он получает, что $|(1+a_s)^{n+r}+(1-a_s)^{k+r}|=$

$$=\begin{cases}2^{n+1+k(k-1)/2}\prod\limits_{n\geqslant i>j\geqslant 0}(a_i^2-a_j^2), & k=n,\ n+1\\ 0, & 0\leqslant k\leqslant n-1.\end{cases}$$

Г. Н. Веселая

6474. О некоторых неравенствах для определителей. Микусинский (Sur quelques inégalités pour les déterminants. Mikusiński J.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, cl. 3, 5, № 7, 699—700 (франц.; рез. русск.)

Рассматривается определитель $D_n=|x_{ij}|_1^n$ как функция элементов x_{ij} $(i\neq j)$. Элементы x_{ii} считаются постоянными величинами. Рассматриваются следующие множества изменения переменных x_{ij}:

$x_{ij}\in E_1$, если $x_{ij}=-1, 0, 1$; $x_{ij}=x_{ji}$; $S_i\leqslant 1$;

$x_{ij}\in E_2$, » $x_{ij}=x_{ji}$; $S_i\leqslant 1$;

$x_{ij}\in E_3$, » $x_{ij}x_{ji}\geqslant 0$ $S_i\leqslant 1$;

$x_{ij}\in E_4$, » $x_{ij}=t_{ij}t_{ji}$, $T_i\leqslant 1$,

где $S_i=\sum_{j=1;j\neq i}^n|x_{ij}|$; $T_i=\sum_{j=1;j\neq i}^n t_{ij}$.

Показывается, что D_n, как функция $n(n-1)$ переменных x_{ij} $(i\neq j)$ обладает одинаковыми экстремумами во всех указанных множествах значений переменных. Получение экстремумов D_n в любом из указанных множеств E_k сводится к получению их во множестве E_1, которое обладает конечным числом элементов, что облегчает указанную задачу. Проблема получения экстремумов функции D_n в указанных множествах E_k имеет особое значение при изучении индуктивных явлений в электрических цепях.

А. Ф. Голубчиков

6475. Об одном классе бесконечных матриц. Тенка (Su una classe di matrici infinite. Tenca Luigi), Period. mat., 1957, 35, № 4, 219—223 (итал.)

Рассматриваются различные определители конечных порядков, получаемые из бесконечной матрицы

$$\|(a+nd)^m\|\ (m,\ n=\ldots,-2,-1,\ 0,\ 1,2,\ldots).$$

Значения этих определителей оказываются связанными с прогрессиями различных типов: арифметиче-

скими высших порядков, геометрическими высших порядков, гармоническими высших порядков, арифметически-геометрическими и геометрически-гармоническими. Рассмотрены также некоторые определители, содержащие числа Бернулли, причем значения этих определителей также связаны с прогрессиями. В. К. Туркин

6476. **Некоторые матричные теоремы. Вильсон** (Some matrix theorems. Wilson W. Proctor), Electronic and Radio Engr, 1957, 34, № 6, 229—231; № 11, 433—434 (англ.)
См. РЖЭ, 1958, № 5, 7295.

6477. **Курс прикладного матричного исчисления. Дени-Папен, Кауфман** (Cours de calcul matriciel appliqué. Denis-Papin M., Kaufmann A.), Electrotechn., hydraul., radio, 1957, № 223, Suppl., 38—53 (франц.)
Продолжение серии статей, посвященной теории матриц (РЖМат, 1957, 4622).

6478. **Курс прикладного матричного исчисления. Гл. II. Матричные характеристики. Дени-Папен, Кауфман** (Cours de calcul matriciel appliqué chap. II. Caractéristiques matricielles. Denis-Papin M., Kaufmann A.), Electrotechn., hydraul., radio, 1957, Suppl. № 225, 70—85; № 226, 85—100; № 227, 100—107; № 228, 107—114 (франц.)
Гл. I см. РЖМат, 1957, 4622; реф. 6477.

6479. **Ранг циркулянтных матриц. Ингэлтон** (The rank of circulant matrices. Ingleton A. W.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 4, 445—460 (англ.)
Циркулянтной матрицей называется квадратная матрица $C = C(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ n-го порядка, элементы которой c_{ij} определяются равенством $c_{ij} = a_k$, если $j - 1 \equiv k \pmod n$. Матрица C имеет период q (q — делитель n), иначе — строго q-возвратна, если при $i \equiv j \pmod q$ $a_i = a_j$, причем это условие не имеет места ни для какого делителя числа q. Матрица невозвратна, если период ее равен n. При изучении ранга циркулянтной матрицы достаточно ограничиться невозвратными матрицами. Из известного разложения циркулянта (детерминанта матрицы C):

$$\det C = \prod_{i=1}^{n} (a_0 + a_1\omega_i + a_2\omega_i^2 + \ldots + a_{n-1}\omega_i^{n-1}),$$

где ω_i — первообразный корень n-й степени из единицы, выводится, что ранг циркулянтной матрицы C порядка n равен $n - d$, где d — степень общего наибольшего делителя полиномов $1 - x^n$ и $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ (ассоциированного полинома матрицы C). Для матрицы с рациональными элементами ранг ее выражается еще следующим образом. Через $R(m, C)$ или $R(m, f)$ в работе обозначается множество чисел r — делителей m, для которых полином деления круга $\Phi_r(x)$ не является делителем полинома $f(x)$. Наименьшее общее кратное чисел множества $R(n, C)$ является периодом циркулянтной матрицы с рациональными коэффициентами порядка n. Ранг этой матрицы равен $\Sigma\varphi(r)$, где φ — функция Эйлера. Доказывается, что наименьший возможный ранг невозвратной циркулянтной матрицы с рациональными элементами порядка $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$ — определяется равенством:

$$\sigma(n) = \sum_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1) - \eta(n),$$

где $\eta(n) = 1$, если $n/2$ — целое > 1 и $\eta(n) = 0$ в остальных случаях. Если элементы C неотрицательны, то выражение увеличивается на 1. Если при этом n простое, то C — неособенная матрица. Основная часть статьи посвящена рассмотрению циркулянтных матриц, элементы которых нули или единицы; автор называет такие матрицы унитальными. Определение наименьшего ранга такой матрицы производится с помощью выражения $\tau(n, p)$, которое для $n = p^\alpha \sum_{i=1}^{m-1} p_i^{\alpha_i}$ определяется равенством:

$$\tau(n, p) = 1 + (p-1)\left\{\varepsilon(m)\varepsilon(\alpha) + p^{\alpha-1} + \sum_{i=1}^{m-1} p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)\right\},$$

$\varepsilon(1) = 0$, $\varepsilon(m) = 1$ при $m > 1$.
Если порядок n невозвратной циркулянтной унитальной матрицы есть степень простого числа p, то наименьший возможный ее ранг $\rho(n) = \tau(n, p)$. В общем же случае имеет место неравенство:

$$\min_{p/n} \tau(n, p) \leqslant \rho(n) \leqslant \min_{p/n,\ p \geqslant 2m-1} \tau(n, p)$$

из которого явствует, что если все делители числа n больше или равны $2m - 1$, то $\rho(n) = \min_{p/n} \tau(n, p)$.

А. Г. Школьник

6480. **Замечание об обобщенно-обратных матрицах. Радо** (Note on generalized inverses of matrices. Rado R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 3, 600—601 (англ.)
Указывается, что теорема Пенроза (РЖМат, 1956, 4333) о существовании для каждой прямоугольной матрицы с комплексными элементами единственной обобщенно-обратной матрицы вытекает из следующего частного случая теоремы Мура (Moore E. H., General analysis, vol. I, Mem. Amer. phil. Soc. vol. I, Philadelphia, 1935, Chap. 3, 29). Для любой прямоугольной матрицы a над полем комплексных чисел существует, и притом только одна, такая матрица x и такие матрицы y и z, что $axa = a$, $x = ya^* = a^*z$ (где a^* — матрица, сопряженная транспонированной матрице a'). Матрица x удовлетворяет также уравнениям $xax = x$, $(ax)^* = ax$, $(xa)^* = xa$. Приводится более простое, чем у Мура, доказательство этого утверждения, и отмечается, что приведенное доказательство справедливо и для прямоугольных матриц над произвольным кольцом с делением F, допускающим по крайней мере один такой инволюторный антиавтоморфизм $\lambda \to \bar{\lambda}$, что из равенства $\lambda_1\bar{\lambda}_1 + \ldots + \lambda_n\bar{\lambda}_n = 0$ следует $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Е. Г. Шульгейфер

6481. **О непрерывности характеристических чисел матрицы, в зависимости от ее элементов. Островский** (Über die Stetigkeit von charakteristischen Wurzeln in Abhängigkeit von den Matrizenelementen. Ostrowski Alexander), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1957, 60, № 1, Abt. 1, 40—42 (нем.)
При $\nu = 1, \ldots, n$ доказаны неравенства $|\lambda_\nu - \mu_\nu| \leqslant 2(n+1)^2 M \delta^{\frac{1}{n}}$ для собственных значений λ_ν матрицы A и собственных значений μ_ν матрицы B (при соответствующей нумерации корней). Здесь n — порядок матриц, $M = \max_{i,J=1,\ldots,n} (|a_{ij}|, |b_{ij}|)$, $\delta = \frac{1}{M} \sum_{ij} |b_{ij} - a_{ij}|$.
Установленные оценки сильнее оценок Турана (Turán Paul, Publ. Math., 1956, 4, 406—409). В. Н. Фаддеева

6482. **Правило вычисления собственных значений и собственных векторов матрицы перестановки. Дионизиу** (A rule for computing the eigen-values and the eigen-vectors of a permutation matrix. Dionísio J. Joaquim), Rev. Fac. ciênc. Univ. Coimbra, 1954, 23, 53—55 (англ.)

Дано правило вычисления собственных векторов матрицы преобразования, переставляющего базисные векторы, которое основано на том, что такая матрица подобна прямой сумме m круговых матриц, собственные значения и векторы которых определяются просто.

Г. Н. Яскова

6483. **Собственные векторы и характеристические числа произведения двух симметрических идемпотентных матриц. Африат** (On the latent vectors and characteristic values of products of pairs of symmetric idempotents. Afriat S. N.), Quart. J. Math., 1956, **7**, № 25, 76—77 (англ.)

Рассматриваются симметрические идемпотентные матрицы e и f с действительными элементами и их произведение ef. Доказываются, в частности, следующие утверждения: 1. Каждое собственное значение λ_i матрицы ef действительно и удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$. 2. Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — образы отображений, определяемых матрицами e и f соответственно, и $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — все ненулевые собственные значения матрицы ef, причем каждое из них взято столько раз, какова ее кратность. Тогда в качестве образующих подпространств $e\mathcal{F}$ и $f\mathcal{E}$ можно выбрать такие векторы $E_1, \ldots, E_r$ и $F_1, \ldots, F_r$ соответственно, что $E_i' E_j = 0$, $E_j' F_j = 0$, $F_i' F_j = 0\,(i \neq j)$, $E_i' F_i = \rho_i$, где $\rho_i^2 = \lambda_i$.

Е. Г. Шульгейфер

6484. **Обобщенная ортогональность собственных матриц. Татаркевич** (Sur l'orthogonalité généralisée des matrices propres. Tatarkiewicz Krzysztof), Ann. Univ. M. Curie Skłodowska, 1955 (1957), **A9**, № 1-13, 5—28 (франц.; рез. русск., польск.)

Под обобщенной канонической матрицей в классе Γ будем понимать значение некоторой функции, которая каждой матрице A ставит в соответствие некоторую матрицу $K(A)$, такую, что: 1) если матрица A подобна матрице B, то $K(A) = K(B)$, 2) матрица $K(A)$ подобна матрице A. Известно, что существует такая (вообще говоря, не однозначно определенная) матрица $C(A)$, называемая обобщенной собственной матрицей, что $C^{-1}(A) \cdot A \cdot C(A) = K(A)$. В работе показано, что для всякой пары матриц $C(A^*)$ и $C(A)$ существует матрица $C(K^*(A))$, такая, что $C(K^*(A)) = C^*(A) \cdot C(A^*)$ (1); и обратно: для всякой пары матриц $C(K^*(A))$ и $C(A)$ существует такая собственная матрица $C(A)$, что (1) выполняется. Известно, что если собственные значения матрицы A однократны, а $K(A)$ — каноническая комплексная матрица Жордана, то матрица $C(A)$ является собственной матрицей для матрицы A в обычном понимании (т. е. столбцы матрицы $C(A)$ являются собственными векторами для матрицы A). В этом случае $C(K^*(A))$ является диагональной матрицей. Автор показывает, что в общем случае матрица $C(K^*(A))$ имеет квазидиагональную форму с диагональными клетками специального вида.

А. Ф. Голубчиков

6485. **Об ортогональных матрицах типа $(2p^2, 2p+1, p, 2)$. Масуяма**, Кагаку, 1957, **27**, № 11, 575 (японск.)

6486. **Условия вложимости для эрмитовых и нормальных матриц. Фань Цюй, Полл** (Imbedding conditions for Hermitian and normal matrices. Fan Ky, Pall Gordon), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 2, 298—304 (англ.)

Пусть A и B — квадратные матрицы с комплексными элементами порядков, соответственно, n и m, причем $n > m$. Будем говорить, что матрица B вложима в матрицу A, если выполняется одно из следующих условий: 1) существует унитарная матрица U порядка n, такая, что $U^* A U$ содержит матрицу B в качестве главной подматрицы, или 2) существует матрица V, имеющая n строк и m столбцов, такая, что $V^* A V = B$ и $V^* V = I_m$, где I_m — единичная матрица порядка m. Авторами получены следующие результаты. Теорема 1. Пусть A и B — эрмитовы матрицы порядков, соответственно, n и m, $n > m$; Пусть, далее, $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$ и $\beta_1 \geqslant \beta_2 \cdots \geqslant \beta_m$ — характеристические числа, соответственно, матриц A и B. Для того чтобы матрица B была вложима в матрицу A, необходимо и достаточно, чтобы характеристические числа матриц удовлетворяли неравенствам: $\alpha_i \geqslant \beta_i$, $\alpha_{n-i+1} \leqslant \beta_{m-i+1}\,(1 \leqslant i \leqslant m)$. Теорема 2. Пусть A и B — нормальные матрицы порядков, соответственно, n и $(n-1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_{n-1}$ — характеристические числа, соответственно, матриц A и B. Занумеруем их так, чтобы $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_q$ были отличны от $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{q-1}$, в то время как $\alpha_j = \beta_{j-1}$ для $q+1 \leqslant j \leqslant n$. Для того чтобы матрица B была вложима в матрицу A, необходимо и достаточно, чтобы $2q-1$ точек $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q-1}$ комплексной плоскости были различны между собой, коллинеарны, причем каждый сегмент этой прямой, ограниченный двумя соседними точками $\alpha_i\,(1 \leqslant i \leqslant q)$, содержал одну точку $\beta_i\,(1 \leqslant j \leqslant q-1)$ (иначе говоря, $2q-1$ характеристических числа $\alpha_1 \cdots \alpha_q$; $\beta_1 \cdots \beta_{q-1}$ расположены по одной прямой в следующем порядке: $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \cdots \ldots, \alpha_{q-1}, \beta_{q-1}, \alpha_q$).

А. Ф. Голубчиков

6487 К. **Теория матриц. Ловаш-Надь** (Mátrixszámitás. Lovasz-Nagy Viktor. Müszaki matematikai gyakorlatok. C. IV. Budapest, Tankönyvkiadó, 1956, 2070, 22. Ft) (венг.)

Книга содержит элементы теории матриц, наиболее часто встречающиеся при решении технич. проблем, и их приложения в механике, электротехнике и т. д. Излагаются также работы Эгервари (см. например, РЖМат, 1955, 87, 2561; 1956, 207, 5728, 6389) по теории матриц. Содержание книги. I. Общая часть. 1. Основные понятия матричной арифметики (включая практически важные типы гиперматриц). 2. Линейная зависимость векторов. Диадическое разложение матриц. Ранг матрицы. 3. Характеристический полином, минимальный полином. 4. Степенной ряд матричной функции. Редуцирование на матричный полином. Каноническое представление функций матриц. II. Специальная часть (приложения, примеры). 5. Применение матриц в геометрии. 6. Решение систем линейных алгебраических уравнений (с трактовкой различных представлений обратной матрицы). Опоры и цепные мосты. Периодические явления в электрических цепях (трансформаторах). 7. Приложения к теории систем линейных дифференциальных уравнений (вращающиеся механические системы, переходные электрические явления). Чтение книги может предшествовать более глубокому изучению теории матриц. (Например, по книге Гантмахера, которая была одним из источников автора.) Книга педагогически хорошо построена и легка для понимания, материал, привлеченный из других областей математики, общеизвестен. Важнейшие общие теоремы иллюстрируются конкретными примерами. Книга содержит тщательно составленную библиографию (в первую очередь, работ на венгерском языке) по приложениям теории матриц.

P. Medgyessy

ГРУППЫ

6488. **Международный коллоквиум по конечным группам в Математическом институте Тюбингенского университета. Виландт, Камке** (Internationales Kolloquium über endliche Gruppen im Mathemati-

schen Institut der Universität Tübingen vom 18. bis 24. August 1957. Wielandt H., Kamke E.), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1957, 60, № 2, 29—30 (нем.)

Информационное сообщение.

6489. **О конечных разрешимых группах с дистрибутивной структурой композиционных подгрупп. Цаппа** (Sui gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo. Zappa Guido), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 2, 150—157 (итал.)

Изучаются конечные разрешимые группы, композиционные подгруппы которых образуют дистрибутивные структуры. (Подгруппа некоторой группы называется композиционной, если она принадлежит какому-либо композиционному ряду всей группы.) Установлены следующие факты: 1. Пусть $\varphi(G)$ — структура, образованная всеми композиционными подгруппами группы G. Если G — конечная разрешимая группа с дистрибутивной структурой $\varphi(G)$, а A и B — два нормальных делителя группы G, причем $A \supset B$, то структура $\varphi(A/B)$ также дистрибутивна. 2. Пусть G — конечная разрешимая группа; если $\varphi(G)$ дистрибутивна, то G — сверхразрешимая группа. 3. Основной результат: Для того чтобы структура $\varphi(G)$ конечной разрешимой группы G была дистрибутивной, необходимо и достаточно, чтобы каждая силовская подгруппа G была циклической.

Л. Е. Садовский

6490. **Число элементов данного периода в конечных симметрических группах. Эррера** (The number of elements of given period in finite symmetric groups. Herrera Robert B.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 7, Part I, 488—490 (англ.)

Для числа $N(k; r)$ элементов порядка r симметрической группы k-й степени S_k устанавливается формула:

$$N(k, r) = \sum_s \frac{(k-1)!}{(k-s)!} \sum_b N(k-s, b), \qquad (1)$$

где делители s и b числа r выбираются так, чтобы $[s, b] = r$. Используется лемма: Если S_k разложена по подгруппе S_{k-1}, то смежные классы содержат одинаковое число элементов данного порядка. А. Г. Школьник

6491. **Об одном виде конечной некоммутативной группы. Чупона** (За еден вид конечни некомутативни групи. Чупона Г.), Билтен Друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1956, № 7, 42—43 (макед; рез. англ.)

Доказывается, что для любого натурального числа $2m$ ($m > 2$) существует некоммутативная группа порядка $2m$, определяемая соотношениями: 1) $xa_m = a_m x$, где x — любой элемент группы; 2) $a_i a_j = a_{i+j}$; 3) $b_i^2 = a_m$, 4) $b_i b_j = a_{i-j}$; 5) $b_i a_j = b_{i-j}$; 6) $a_i b_j = b_{i+j}$. При этом, если $i - j \leqslant 0$, то $i - j$ заменяется наименьшим натуральным r, сравнимым с $i - j \bmod m$; аналогично для значений $i + j$ в случае $i + j > m$. Доказывается также, что эта группа является единственной группой порядка $2m$, имеющей m максимальных циклических подгрупп порядка 2 и единственную подгруппу порядка m.

В. К. Туркин

6492. **Группы, все представления которых мономиальны. Берман** (Групи, всі представлення яких мономіальні. Берман С. Д.), Доповіді АНУРСР, 1957, № 6, 539-542 (укр.; рез. русск., англ.)

Пусть G — конечная группа; n — общее наименьшее кратное порядков элементов группы G; $\bar{k}$ — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит n. Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы группа G была M-группой, т. е. группой, все представления которой над полем $\bar{k}$ являются мономиальными. Предварительно находятся необходимые и достаточные условия, при которых линейный характер подгруппы группы G индуцирует неприводимое представление группы G над полем $\bar{k}$, а также выводится формула для числа неприводимых мономиальных представлений группы G над полем $\bar{k}$. Даются также необходимые и достаточные условия изоморфизма некоторых групповых алгебр M-групп.

В. К. Туркин

6493. **Представления конечных линейных групп над полями простой характеристики. II. Стейнберг** (Prime power representations of finite linear groups II. Steinberg Robert), Canad. J. Math., 1957, 9, № 3, 347—351 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1957, 6168. Пусть F — конечное поле характеристики p, L — группа Шевалле, соответствующая полю F и некоторой полупростой алгебре Ли, $U \subset L$ — подгруппа, порожденная корневыми векторами, отвечающими положительным корням, m — индекс нормализатора подгруппы U в группе L. Доказывается, что если $p = 0$ или $(p, m) = 1$, то существует неприводимое представление группы L над полем F, размерность которого равна порядку подгруппы U.

А. Л. Онищик

6494. **О строении групп Фробениуса. Фейт** (On the structure of Frobenius groups. Feit Walter), Canad. J. Math., 1957, 9, № 4, 587—596 (англ.)

Группой Фробениуса типа (h, m) ($m = 1 \pmod h$) называется группа порядка hm, имеющая подгруппу порядка h, совпадающую со своим нормализатором относительно всей группы и не имеющую общих элементов, кроме 1, с сопряженными с ней подгруппами. В группе Фробениуса элементы порядка, делящего m, образуют нормальный делитель порядка m, называемый регулярной подгруппой этой группы.

Доказана следующая теорема: Пусть M — регулярная подгруппа группы Фробениуса. Если никакая подгруппа группы M не имеет композиционного фактора, являющегося исключительной группой, то группа M нильпотентна.

(Автор называет конечную группу G исключительной, если G — нециклическая простая группа, и если для любого p, делящего порядок G, силовская p-подгруппа является нормализатором в G любой своей характеристической подгруппы ($\neq 1$). Вопрос о существовании таких групп остается открытым).

В. К. Туркин

4695. **О подстановках второго порядка некоторых максимальных импримитивных разрешимых групп. Ёлкиню. Г.**, Уч. зап. Краснодарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 15, 39—40

Исследуются подстановки второго порядка максимальной импримитивной разрешимой группы $I^{(\rho)}$ степени $q_1 q_2 \cdots q_\rho$, где q_k ($k = 1, 2, \ldots, \rho$) — различные нечетные простые числа, а q_ρ — длина системы импримитивности. Сначала рассматривается случай $\rho = 2$: группа $I^{(2)}$ содержит подстановки второго порядка только с τ независимыми транспозициями, причем $2\tau = (q_1 - 1) q_2 \mu_1 + (q_2 - 1) \mu_2$, где $\mu_1 = 0$ или 1, $\mu_2 = 1$ или $(1 - \mu_1) l$ $l = 1, 2, \ldots, q_1$. Далее приводится теорема, позволяющая переходить от $I^{(\rho-1)}$ к $I^{(\rho)}$.

В. К. Туркин

6496. **О факторизации конечных абелевых групп. Сандс** (On the factorisation of finite abelian groups. Sands Arthur D.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, 8, № 1-2, 65—86 (англ.)

Пусть A, B — подмножества множества всех элементов конечной абелевой группы G. Если каждый элемент $g \in G$ однозначно записывается в виде $g = ab$ ($a \in A$, $b \in B$), то представление группы G в виде $G = AB$ называется факторизацией группы G. Множество A называется периодическим, если существует такой элемент

$g \in G$, $g \neq e$, что $gA = A$. Группа G называется хорошей, если во всякой ее факторизации либо множество A, либо множество B периодическое. В работе доказывается, что если G — конечная циклическая группа, $G = AB$ — ее факторизация и число элементов множества A равно степени простого числа, то либо A, либо B является периодическим. Отсюда непосредственно выводится известный ранее результат, что все абелевы группы типа (p^λ), (p^λ, q) и (p, q, r), где p, q, r — различные простые числа, λ — натуральное число, являются хорошими (РЖМат, 1954, 3626). Далее доказывается, что все абелевы группы типа (p^2, q^2), (p^2, q, r) и (p, q, r, s), где p, q, r, s — различные простые числа, также являются хорошими. В конце работы отмечается, что метод Хайоша нахождения всех факторизаций хорошей группы (Hajoš G. Časop. pěstov. mat. fys., 1949, 74, 157—162) требует некоторого исправления, и соответствующее исправление приводится. А. П. Мишина

6497. **Конструкция абелевой группы мощности больше континуума, неразложимой в прямую сумму.** **Сонсяда** (Construction of a direct indecomposable abelian group of a power higher than that of the continuum. Sasiada E.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, cl. 3, 5, № 7, 701—703 (англ.; рез. русск.)

Строится пример неразложимой в прямую сумму абелевой группы без кручения мощности 2^τ где $\tau = 2^{\aleph_0}$. А. П. Мишина

6498. **Упорядоченные модули.** **Банашевский** (Totalgeordnete Moduln. Banaschewski Bernhard), Arch. Math., 1957, 7, № 6, 430—440 (нем.)

Модуль M над полем рациональных чисел Q называется упорядоченным, если M есть упорядоченная абелева группа, и если для всякого положительного $\lambda \in Q$ и любых $x, y \in M$ из $x \leqslant y$ следует $\lambda x \leqslant \lambda y$. Пусть M_τ ($\tau \in I$, I — упорядоченное множество) — ненулевые Q-модули действительных чисел. Суммой Хана Q-модулей M_τ называется упорядоченный Q-модуль M всех функций f, определенных на I, принимающих значения $f(\tau)$ в M_τ и таких, что при каждом f множество I_f всех τ, для которых $f(\tau) \neq 0$, вполне упорядочено по возрастанию; при этом считается, что $f > 0$, если $f(\tau) > 0$ для наибольшего $\tau \in I_f$. Подмодуль F суммы Хана M модулей M_τ ($\tau \in I$) называется почти прямой суммой Хана модулей M_τ, если для каждого τ $F = A_\tau \dotplus B_\tau \dotplus C_\tau$, где A_τ, B_τ, C_τ — подмодули, состоящие из всех $f \in F$, у которых, соответственно, при $\sigma \leqslant \tau$, при $\sigma \neq \tau$ и при $\sigma \geqslant \tau$ $f(\sigma) = 0$, причем B_τ при $f \to f(\tau)$ отображается на все M_τ. Доказывается, что всякий упорядоченный Q-модуль является почти прямой суммой Хана Q-модулей действительных чисел. Пусть $K_1 \supset \ldots \supset K_s$ — конечная цепочка выпуклых подмодулей упорядоченного Q-модуля M. Тогда $M = U_0 \dotplus U_1 \dotplus \ldots \dotplus U_s$, где $K_i = U_i \dotplus \ldots \dotplus U_s$, а каждый элемент $x \in M$ представим в виде $x = u_0 + u_1 + \ldots + u_s$, где $u_i \subset U_i$ (выпуклое разложение элемента x относительно подмодулей K_i); число элементов $u_i \neq 0$ называется длиной полученного разложения. Доказывается, что тогда и только тогда каждый элемент модуля M обладает выпуклым разложением максимальной длины, когда M изоморфно подмодулю суммы Хана Q-модулей действительных чисел, состоящему из всех функций f, для которых множество I_f конечно (слабая сумма Хана). Далее доказывается, что если в упорядоченном кольце R без делителей нуля содержится архимедовски упорядоченное подкольцо A, над которым R является правым или левым модулем конечного ранга, то само кольцо R архимедово. Если при этом $R \ni 1$, а A — архимедовски упорядоченное подполе R ($1 \in A$), то R есть подполе поля действительных чисел. Также подполем поля действительных чисел является всякая упорядоченная полупростая алгебра с единицей над архимедовски упорядоченным полем, причем условие полупростоты здесь и необходимо. А. П. Мишина

6499. **О связи между свойствами двойственности и полноты для некоторых топологических абелевых групп.** **Шёнеборн** (Über den Zusammenhang zwischen Dualitäts — und Vollständigkeitseigenschaften bei gewissen topologischen Abelschen Gruppen. Schöneborn Heinz), Math. Z., 1956, 65, № 4, 429—441 (нем.)

Рассматриваются топологические абелевы группы A, такие, что: 1) существует полная система окрестностей нуля, состоящая из таких подгрупп U_α, что все фактор-группы A/U_α примарны по фиксированному простому числу p; 2) все циклические подгруппы в A имеют полное в смысле Коши замыкание. Такая группа A называется счетнообразной, если либо существует счетная система окрестностей нуля, либо существует счетная система компактных подгрупп $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots$, такая, что любая компактная подгруппа K лежит в одной из групп K_i. Группа A называется антиполной, если любая подгруппа A', пересечение которой с любой компактной подгруппой K открыто в K, открыта в A'. Даны некоторые необходимые и достаточные условия полноты и антиполноты для счетнообразных групп. Для счетнообразных групп эквивалентно выполнение теоремы двойственности и наличие полноты и антиполноты. Отметим, что класс счетнообразных групп совпадает с объединением следующих двух классов: незамкнутых подгрупп топологических сумм примарных дискретных абелевых групп и фактор-групп алгебраических прямых сумм нульмерных топологически примарных компактных групп. Поэтому некоторые результаты автора суть частные случаи общих результатов референта о двойственности для прямых и обратных спектров топологических групп (Изв. АН СССР, 1951, 15, 503—532). Н. Я. Виленкин

6500. **О локальных компактных вполне разрывных абелевых группах и их группах характеров.** **Престон** (On locally compact totally disconnected Abelian groups and their character groups. Preston Gerald C.), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 1, 121—134 (англ.)

Доказывается, что в теории характеров Л. С. Понтрягина можно заменить группу K комплексных чисел, равных по модулю единице, некоторыми другими группами, если ограничиться рассмотрением лишь вполне разрывных локально компактных абелевых групп. Например, можно рассматривать дискретную группу рациональных чисел, приведенных по модулю 1. Для компактных групп рассматриваются отображения в прямую тихоновскую сумму групп типа p_i^∞. Н. Я. Виленкин

6501. **К доказательству теоремы о главном идеале.** **Боревич З. И.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 13, 5—8 (рез. англ.)

Дается основанное на одном результате автора (РЖМат, 1954, 1567) доказательство известной теоремы: Если группа G имеет конечное число образующих, если ее подгруппа H имеет конечный индекс и содержится в G' и если $V_{G \to H}(x) = (\prod_\rho \widetilde{\rho x \rho} x^{-1}) H'$, где $\widetilde{\rho}$ — некоторый набор представителей правосторонних классов смежности G по H, то $V_{G \to H}(x) = H'$ при любом $x \in G$. В. В. Морозов

6502. **О подстановках произведений множеств.** **Адам** (On permutations of set products. Ádám

András. Publs math., 1957, 5, № 1-2, pp. 147—149) (англ.)

Пусть $\{A_t\}$ — такая система множеств, что пересечение любых двух множеств A_t и $A_{t'}$ $(t \neq t')$ равно одному и тому же элементу e (t пробегает множество T любой мощности), а $S = \Pi_{t \in T} A_t$ — произведение множеств этой системы (S состоит из всех функций $f(t)$ $(t \in T)$, где $f(t) \in A_t$). Если подмножество $S_t \subset S$ всех функций

$$f(u) = \begin{cases} e, & \text{если } u \neq t; \\ a \in A_t, & \text{если } u = t \end{cases}$$

отождествить с множеством A_t, то S можно рассматривать как произведение своих подмножеств S_t $(t \in T)$. Предположим, что G — группа подстановок множества S, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $\alpha e = e$ для всех $\alpha \in G$; 2) если $t \to t'$ — такая подстановка множества T, что каждому $t \in T$ соответствует подстановка $\alpha_t \in G$, переводящая S_t в $S_{t'}$, то подстановка $f \to f'$, где $f'(t') = \alpha_t [f(t)]$, принадлежит G. Пусть G_1 — подгруппа группы G, состоящая из всех подстановок этой группы, переводящих подмножества S_t друг в друга; G_2 — подгруппа группы G_1, содержащая все подстановки, оставляющие на месте каждое подмножество S_t, а G_3 — подгруппа группы G_2, в которую входят все элементы $\alpha \in G$, оставляющие на месте каждый элемент суммы $\bigcup_t S_t$. Автор доказывает, что G_1 — расщепляемое расширение группы G_2 при помощи полного прямого произведения симметрических групп, а G_2 — расщепляемое расширение группы G_1 при помощи полного прямого произведения групп G_t, где G_t — группа подстановок множества S_t, индуцированная группой G_2.

С. Д. Берман

6503. О канонических конструкциях. II. Герстенхейбер (On canonical constructions. II. Gerstenhaber Murray), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 11, 881—883 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1956, 3718.

Рассматривается топологическое пространство S и группа S' его гомеоморфизмов на себя. Доказывается, что если множество точек $|S|$ канонически реконструируемо по группе S', то S канонически реконструируемо и как топологическое пространство. Это верно, например, когда S является многообразием. Доказывается теорема Файна-Швейгерта (РЖМат, 1957, 246) о том, что каждый автоморфизм группы гомеоморфизмов единичного интервала на себя является внутренним.

А. Х. Лившиц

6504. О канонических конструкциях. III. Герстенхейбер (On canonical constructions. III. Gerstenhaber Murray), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 543—550 (англ.)

Ч. II см. реф. 6503.

Через $\Sigma(N)$ обозначается группа подстановок на множестве N (конечном или бесконечном), а через $A(N)$ — ее подгруппа, порожденная всеми циклами, состоящими из трех элементов. Доказывается, что если G подгруппа группы $\Sigma(N)$, содержащая подгруппу $A(N)$, то каждый автоморфизм группы G может быть однозначно представлен в виде внутреннего автоморфизма группы $\Sigma(N)$, за исключением того случая, когда N содержит 3 или 6 элементов. При доказательстве используются результаты I ч. работы (РЖМат, 1956, 3718).

А. Х. Лившиц

6505. Нормальные делители мономиальных групп Крауч, Скотт (Normal subgroups of monomial groups. Crouch R. B., Scott W. R.), Proc Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 931—936 (англ.)

Рассматривается группа Σ всех мономиальных преобразований с коэффициентами из группы H, осуществляемых над элементами множества мощности $B = \aleph_u$, $u \geqslant 0$. Определены все возможные типы нормальных делителей группы Σ для случая, когда любое мономиальное преобразование, содержащееся в Σ, имеет лишь конечное число коэффициентов, отличных от 1, и переводит в другие символы менее C символов; здесь $C \leqslant B^+$, где B^+ — кардинальное число, следующее за B.

В. К. Туркин

6506. Вложение компактных дифференцируемых групп преобразований в ортогональные представления. Палейс (Imbedding of compact, differentiable transformation groups in orthogonal representations. Palais Richard S.), J. Math. and Mech., 1957, 6, № 5, 673—678 (англ.)

Пусть M — дифференцируемое многообразие, на котором дифференцируемым образом действует компактная группа Ли G. Доказывается, что если O — относительно компактное открытое подмножество многообразия M, инвариантное относительно группы G, то существует дифференцируемое вложение многообразия O в евклидово пространство V такое, что все преобразования из группы G будут индуцироваться ортогональными преобразованиями пространства V. А. Л. Онищик

6507. О расширении равенств в связных топологических группах. Мыцельский (On the extension of equalities in connected topological groups. Mycielski Jan), Fundam. math., 1957, 44, № 3, 300—302 (англ.)

Пусть G — топологическая группа, $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2)$ — функции на G вида $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \sigma_1 a_1 \sigma_2, \ldots, \sigma_m a_m$, где $a_i \in G$, σ_j — слова от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Доказано, что для локально компактной связной группы G из справедливости равенства $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для любых $x_i \in V_i$, где $V_1, V_2, \ldots, V_n$ — открытые подмножества G, следует его справедливость для любых $x_i \in G$. Аналогичная теорема доказывается и для связных абелевых групп.

Л. М. Глускин

6508. О некоторых простых группах. Шевалле (Sur certains groupes simples. Chevalley C.), Tôhoku Math. J., 1955, 7, № 1—2, 14—66 (франц.)

Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая комплексная алгебра Ли, Σ — система ее корней относительно картановской подалгебры $\mathfrak{H}$, X_r $(r \in \Sigma)$ — корневые векторы. Доказывается, что векторы X_r можно выбрать таким образом, что если $r, s, r+s \in \Sigma$, то $[X_r, X_s] = N_{r,s} X_{r+s}$, где $N_{r,s}$ — целые рациональные числа. Пусть $\mathfrak{G}_z$ — алгебра Ли над кольцом целых чисел, порожденная элементами X_r $(r \in \Sigma)$, и пусть $X_1, \ldots, X_\nu$ — базис алгебры $\mathfrak{G}_z$, составленный из векторов X_r и из базиса решетки $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_z$. Доказывается, что для всякого $r \in \Sigma$ существует матрица $A_r(T)$, элементами которой являются многочлены от T с целыми коэффициентами, такая, что $A_r(t)$ для всякого комплексного t есть матрица автоморфизма $\exp t(\operatorname{ad} X_r)$ алгебры $\mathfrak{G}$ в базисе $X_1, \ldots, X_\nu$. Для произвольного поля K положим $\mathfrak{G}_z = K \oplus \mathfrak{G}_z$, $X_i^* = 1 \oplus X_i$. Рассматривается группа G автоморфизмов алгебры $\mathfrak{G}_k$, порожденная автоморфизмами, матрицы которых в базисе $X_1^*, \ldots, X_\nu^*$ имеют вид $A_r(t)$ $(r \in \Sigma, t \in K)$. Доказывается, что если алгебра $\mathfrak{G}$ проста, то группа G проста, за исключением следующих случаев: а) $K = Z_2$, $\mathfrak{G} = A_1$, B_2, G_2; б) $K = Z_3$, $\mathfrak{G} = A_1$. Пусть $\mathfrak{G}$ — односвязная компактная группа Ли, соответствующая алгебре $\mathfrak{G}$. Доказывается, что если поле K состоит из q элементов,

то порядок группы G равен $u^{-1}q^N\prod_{i=1}^{l}(q^{a_i}-1)$, где N — число положительных корней, u — порядок группы гомоморфизмов центра группы $\mathfrak{G}$ в мультипликативную группу поля K, $2a_1-1, \ldots, 2a_l-1$ — размерности примитивных классов когомологий группы $\mathfrak{G}$.

А. Л. Онищик

6509. О простых группах типа B_n. Дьёдонне (On simple groups of type B_n. Dieudonné Jean), Amer. J. Math., 1957, 79, № 4, 922—923 (англ.)

Доказывается, что если K — несовершенное поле характеристики 2, то простая группа Шеваллея, соответствующая алгебре B_n и полю K, изоморфна коммутанту ортогональной группы порядка $2n+1$ над полем K.

А. Л. Онищик

6510. Алгебраические линейные группы. Борель (Groupes linéaires algébriques. Borel Armand), Ann. Math., 1956, 64, № 1, 20—82 (франц.)

Обстоятельно исследуются свойства алгебраических групп над универсальным полем Ω (т. е. полем алгебраически замкнутым и бесконечной степени трансцендентности над своим первоначальным полем) произвольной характеристики p. Под алгебраической группой G понимается матричная группа, выделенная из группы $GL(n, \Omega)$ всех матриц порядка n над полем Ω системой алгебраических уравнений. Полученные теоремы в основном справедливы и в случае, когда от Ω требуется лишь алгебраическая замкнутость. Все построения ведутся непосредственно для групп; алгебры Ли не рассматриваются. Большое число отдельных частных результатов. Содержание. Гл. I — предварительные сведения. Гл. II — группы G, приводимые к диагональной записи; группа G, «облекающая» данную матрицу (т. е. пересечение всех алгебраических групп, содержащих данную матрицу); коммутативные группы и др. Гл. III — группы G, приводимые к треугольной записи; нильпотентные и разрешимые группы; максимальные торы данной группы G и их централизаторы (тором называется алгебраическая группа коммутативная, связная и приводимая к диагональной записи; связность алгебраической группы понимается в смысле неприводимости соответствующего алгебраического многообразия матриц). Гл. IV — максимальные связные разрешимые алгебраические подгруппы данной группы G (в частности, показана их сопряженность посредством внутренних автоморфизмов; этот результат для алгебр Ли был установлен В. В. Морозовым (Докл. АН СССР, 1942, 36, 83—86); некоторые результаты относительно максимальных торов в G; теорема о существовании неподвижной точки в представлении разрешимой связной алгебраической группы на каком-либо алгебраическом многообразии V, полном в смысле Вейля (Weil A., Amer. Math. Soc. Colloquium Publication, 1946, № 29); группы G квазикомпактные и антикомпактные в смысле Колчина. Гл. V — картановские подгруппы и регулярные элементы; теоремы о сохранении некоторых важных свойств алгебраических связных групп при их рациональном представлении (тоже в виде матричных групп).

П. К. Рашевский

6511. Группы с отношением разделимости. Шепперд (Separation groups. Sheppard J. A. H.), Proc. London Math. Soc., 1957, 7, № 28, 518—548 (англ.)

Для четверок элементов группы определяется отношение, записываемое как $[a, b, c, d]$. Группа G называется группой с отношением разделимости, если для ее элементов выполняются следующие аксиомы: 1) для любой четверки элементов a, b, c, d имеет место или $[a, b, c, d]$, или $[a, c, b, d]$, или же $[a, b, d, c]$; 2) $[a, b, c, d]$, $[a, b, d, c]$ выполняются одновременно тогда и только тогда, когда $a=b$ или $c=d$; 3) из $[a, b, c, d]$ следует $[d, c, b, a]$; 4) $[a, b, c, d]$ влечет $[b, c, d, a]$; 5) из $[a, b, c, d]$, $[a, e, b, c]$ и $b \neq c$ следует $[a, e, b, d]$; 6) $[a, b, c, d]$ влечет $[gah, gbh, gch, gdh]$ для всех $g, h \in G$. Множество с отношением разделимости определяется как множество с отношением $[a, b, c, d]$, удовлетворяющим аксиомам 1) — 6). Отношение «$\leqslant$» упорядоченного множества естественно определяет на нем отношение разделимости: $[a, b, c, d]$ выполняется тогда и только тогда, когда имеет место одно из 8 расположений, получаемых посредством циклических перестановок или из $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$, или из $d \leqslant c \leqslant b \leqslant a$. Такое отношение разделимости называется отношением, индуцированным отношением упорядочения. Упорядоченная группа становится группой с отношением разделимости относительно индуцированного отношения разделимости. Подгруппа A группы G с отношением разделимости называется выпуклой, если из $a, a' \in A$, $g, g' \in G$ и $[a, g, a', g']$ следует или $g \in A$, или $g' \in A$. Автором показано, что в каждой группе G с отношением разделимости существует подгруппа H, определяемая как подмножество всех тех элементов $h \in G$, для которых $[h^{-1}, 1, h, h^r]$ при всех $r \geqslant 2$. Эта подгруппа является выпуклым нормальным делителем группы G и она же превращается в упорядоченную группу следующим образом: $g \leqslant h$ тогда и только тогда, когда $[(gh^{-1})^2, gh^{-1}, 1, a, a^2]$, где $g, h, a \in H$ и $a (\neq 1)$ есть фиксированный элемент. Группы с отношением разделимости могут иметь элементы конечного порядка, однако если таковой элемент d имеется, то он либо лежит в центре группы, либо является элементом второго порядка и таким, что $[1, g, d, d^{-1}gd]$ для некоторого $g \in G$. Обозначим через D множество всех таких элементов $d \in G$, для которых $d^2=1$ и $[1, g, d, d^{-1}gd]$ для некоторых $g \in G$. Если группа G с отношением разделимости имеет непустое множество D, то ее вышеописанный нормальный делитель H является абелевой подгруппой индекса 2. Обозначим через F множество всех тех элементов $f \in G$, для которых $f^2 \in H$, $f \in H$ и $[g, h, fh, fg]$, $[g, h, hf, gf]$ для различных элементов $g, h \in H$. Если в группе G множество F не пусто, а множество D является пустым, то снова H является подгруппой индекса 2 или подгруппой индекса 4, причем в последнем случае G/H есть четверная группа. Пусть K есть выпуклый нормальный делитель группы G с отношением разделимости. Тогда фактор-группа G/H может быть превращена также в группу с отношением разделимости, если положить $[K_{g_1}, K_{g_2}, K_{g_3}, K_{g_4}]$ тогда и только тогда, когда $[g_1, g_2, g_3, g_4]$. Если в группе G оба подмножества F и D являются пустыми, то G/H разделительно изоморфна подгруппе аддитивной группы вращений окружности при естественном отношении разделимости последней. Рабочим аппаратом при доказательстве этого утверждения является введенная автором функция, принимающая действительные значения и названная «логарифмом», определенная для всех элементов группы и обладающая свойствами, подобными свойствам обычного логарифма. Группа G с отношением разделимости и без кручения может быть превращена в упорядоченную группу с отношением упорядочения, расширяющим индуцированное отношением разделимости упорядочение ее нормального делителя H. В работе также показывается, что во всех случаях группа с упорядоченным нормальным делителем, удовлетворяющим определенным структурным условиям, может быть превращена в группу с отношением разделимости, а именно: 1. Группа G может быть превращена тогда и только тогда в группу с отношением разделимости с пустыми множествами F и D, когда G содержит нормальный делитель H такой, что G/H изоморфна подгруппе аддитивной группы вращений окружности, а подгруппа H может быть упорядочена так, что каждый внутренний автоморфизм группы G индуцирует автоморфизм в H, сохраняющий ее упорядочение. 2. Группа G может

быть превращена в группу с отношением разделимости с непустым множеством F и пустым множеством D тогда и только тогда, когда G содержит нормальный делитель H, который может быть упорядочен таким образом, что всякий внутренний автоморфизм группы G индуцирует автоморфизм в H, сохраняющий ее упорядочение, и или G/H является циклической группой порядка 2, или G/H есть четверная группа. 3. Группа G может быть превращена в группу с отношением разделимости с непустым множеством D тогда и только тогда, когда G является расширением абелевой группы H без кручения посредством ее автоморфизма, переводящего всякий ее элемент в обратный ему.

А. А. Виноградов

6512. **Фактор-полугруппы.** **Вакселъ** (Faktorhalbgruppen. Vakselj Anton), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1957, 12, № 1-2, 9—16 (нем.; рез. сербо-хорв.)

Пусть K — полугруппа, элементами которой являются все непустые подмножества конечной группы G, являющиеся объединениями каких-либо правосторонних смежных классов H_i группы G по некоторой ее подгруппе H. Действие в полугруппе — умножение подмножеств. Рассмотрены некоторые свойства подполугруппы полугруппы K, порожденной всеми классами H_i. Л. М. Глускин

6513. **Дополнительный A-модуль коммутативной S-полугруппы.** **Боччони** (A-modulo supplementare di un S-semigruppo commutativo. Boccioni Domenico), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte 1, 1957, **27**, 48—59 (итал.)

Пусть G — аддитивно записанная коммутативная полугруппа с сокращением, имеющая в качестве области (левых) операторов полукольцо S (РЖМат, 1956, 7207), M — полугруппа сократимых элементов из S. Пусть для S существует дополнительное слева кольцо A относительно подполугруппы M (см. там же). Левый A-модуль $\overline{G}$, содержащий G, называется дополнительным слева A-модулем модуля G относительно M, если всякий элемент $\xi \in G$ можно представить в виде $\xi^{-1}(u-v)$ $\gamma \in M$, $u, v \in G$. Доказывается, что для существования такого модуля необходимо и достаточно, чтобы для любых $\gamma \in M$, и $u_1 \in G$ из $\gamma u = \gamma u_1$ следовало $u = u_1$. С точностью до изоморфизма модуль G определяется однозначно. Л. М. Глускин

6514. **Главные представления в коммутативных полугруппах.** **Перел** (Principal representations in commutative semigroups. Perel W. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 957—960 (англ.)

Пусть $\mathfrak{M}$ — коммутативная полугруппа с условием минимальности для ко-идеалов (РЖМат, 1956, 233). Ко-идеал T взаимно прост с ко-идеалом S, если существует элемент $a \in T$ такой, что $a \cdot S \subset S$. Доказывается, что минимальный ко-идеал P, не взаимно простой с S, прост. $S:P$ называется главной компонентой S. Всякий ко-идеал является объединением своих главных компонент. Л. М. Глускин

6515. **Структура правых идеалов полугруппы с единицей и с левым сокращением.** **Драгунова Т. Е.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 4, 285—288

Элемент a структуры L называется особым, если L изоморфна подструктуре всех элементов $x \in L$ таких, что $x \leqslant a$. Структура L называется полуоднородной, если: 1) всякий ее ненулевой элемент можно представить в виде суммы особых элементов, 2) из $\sum_i a_i = \sum_j b_j$, где a_i, b_j — особые элементы из L, следует, что для каждого a_i найдется элемент b_j, удовлетворяющий условию $a_i \leqslant b_j$.

Развивая результаты Риса (Rees D., Quart. J. Math., 1948, 19, 101—109), автор доказывает следующую теорему. Полная дистрибутивная структура L тогда и только тогда изоморфна структуре всех правых идеалов некоторой полугруппы S с единицей и с левым сокращением, если она полуоднородна. Л. М. Глускин

6516. **Представление мультипликативного группоида посредством групповых матриц.** **Климеску** (Reprezentărea prin matrici grupale a unui grupoid multiplicativ. Climescu A.), Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1956, 2, № 3-4, 9—18 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть (неассоциативная) алгебра A над полем вещественных чисел содержит такой элемент e, что: 1) $e(ex) = x$, 2) $e(xy) = (ex)(ey)$, 3) $x(yz) = e[(xy)z]$, 4) $xe = \lambda(x)e$. (Здесь x, y, z — любые элементы из A; $\lambda(x)$ — вещественное число). Доказывается, что e — идемпотент; отображение $x \to \lambda(x)$ является гомоморфизмом A в поле вещественных чисел. Множество E всех элементов $x \in A$ таких, что $ex = x$ является подалгеброй A, а множество F элементов $x \in A$, удовлетворяющих условию $ex = -x$, — подгруппой аддитивной группы A' алгебры A. A' является прямой суммой групп E и F. Если A — алгебра конечного ранга, то она обладает базисом, содержащимся в $E \cup F$.

Существует 3 неизоморфные алгебры ранга 2 рассматриваемого класса; две из них ассоциативны. Для неассоциативной алгебры ранга 2 найдены все гомоморфные матричные представления ее мультипликативного группоида. Л. М. Глускин

6517. **Поправка к «Объединениям полугрупп».** **Ямада** (Correction to compositions of semigroups. Yamada Miyuki), Kodai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 4, 189 (англ.)

Теорема 2′, приведенная автором без доказательства в предыдущей статье (РЖМат, 1958, 145), справедлива при дополнительном предположении о том, что при любом δ идемпотент полугруппы S_δ является ее единицей. Л. М. Глускин

6518. **Регулярно упорядоченные полугруппы. I.** **Ямада** (Regularly totally ordered semigroups I. Yamada Miyuki), Симанэ дайгаку ронсю (сидзэн кагаку), Bull. Shimane Univ. (Natur. Sci.), 1957, № 7, 14—23 (англ.)

Коммутативная полугруппа S называется регулярно упорядоченной, если: 1) для любых $a, b \in S$ ($a \neq b$) либо $aS \subset bS$ (т. е. $aS \subseteq bS$, $aS \neq bS$), либо $bS \subset aS$, 2) при $aS \subset bS$ существует такое натуральное число n, что $a^n \in b^n S$. Регулярно упорядоченная полугруппа просто упорядочена отношением $\leqslant$: $a \leqslant b$, если $aS \supseteq bS$. Полугруппа S называется дискретной, если она содержит наименьший элемент.

Пусть α — вещественное неотрицательное число. Множество $G[\alpha] = [\alpha, \alpha+1)$ является группой относительно действия $x \circ y = x + y - [x + y - \alpha]$, где $[z]$ — целая часть числа z; множество $L[\alpha]$ всех пар (x, n), где $x \in G[\alpha]$, а n — неотрицательное целое число, является полугруппой относительно действия $(x, n)\cdot(y, m) = (x \circ y, n + m + [x + y - \alpha])$. Полугруппа $L[\alpha]$ изоморфна аддитивной полугруппе всех вещественных чисел $x \geqslant \alpha$ и называется замкнутой полупрямой. Если $G^*[\alpha]$ — подгруппа группы $G[\alpha]$, то подполугруппа $L^*[\alpha] \subseteq L[\alpha]$, состоящая из всех пар (x, n), где $x \in G^*[\alpha]$, называется I-подгруппой полугруппы $L[\alpha]$. Аналогично определяется открытая полупрямая $L(\beta)$ и ее I-подгруппы $L^*(\beta)$. $L^*(\beta)$ называется β-плотной, если для любой пары $(x, 0) \in L(\beta)$ существует такая пара $(y, 0) \in L^*(\beta)$, что $y < x$.

Регулярно упорядоченная полугруппа S называется локально нильпотентной, если $\bigcap_n a^n S$ не содержит ненулевых элементов. Пусть S — произвольная локально нильпотентная регулярно упорядоченная полугруппа без нуля. Если S дискретна, то она изоморфна не-

которой I-подгруппе замкнутой полупрямой L [1]. Если S недискретна, то она изоморфна β-плотной I-подгруппе открытой полупрямой $L(\beta)$, где $\beta < 1$.

Пусть S — локально нильпотентная регулярно упорядоченная полугруппа с нулем 0. Если S не содержит делителей нуля и $S \setminus 0$ не пусто, то $S \setminus 0$ является локально нильпотентной регулярно упорядоченной полугруппой без нуля. Если S — полугруппа с сокращением, содержащая хотя бы один делитель нуля, то S является плотным в себе сегментом (РЖМат, 1956, 237).

Л. М. Глускин

6519. К теории полугруппы в группе. II. Контторович П. Г., Уч. Зап. Уральского ун-та, 1956, вып. 19, 3—20

Начало см. РЖМат; 1955, 5630; 1956, 5121. Пусть Γ — инвариантная, чистая подполугруппа группы без кручения G; если P — простой идеал полугруппы Γ, то подполугруппа Γ/P полугруппы Γ называется выпуклой. Доказывается, что $I(AB) = I(A) \cap I(B)$ для любых идеалов A, B полугруппы Γ ($I(A)$ — изолятор идеала A). Пусть $w(M)$ — минимальная выпуклая подполугруппа Γ, содержащая подмножество M полугруппы Γ. Для любого элемента $a \in \Gamma$ множество $w(a)$ состоит из всех элементов $x \in \Gamma$, для которых $I(\Gamma x) \supseteq I(\Gamma a)$. Если x, y — любые элементы из Γ, то $w(x) \cup w(y) \subseteq w(x, y)$. $w(a)$ тогда и только тогда коммутативна, когда I-класс, содержащий a, коммутативен (РЖМат, 1957, 1174). $w(a) = w(b)$ тогда и только тогда, когда $I(\Gamma a) = I(\Gamma b)$. Из свойств подполугрупп $w(x)$ делаются различные заключения о свойствах Γ и G.

Пусть A — идеал полугруппы Γ. Множество $D(A)$ всех элементов $d \in \Gamma$, удовлетворяющих условию $A \cap \Gamma d = Ad = dA$, называется дизъюнктором идеала A; $D(\Gamma a)$ называется дизъюнктором элемента a и обозначается через $D(a)$. Если $N(M)$ — нормализатор множества M, то $D(A) \subseteq N(A) \subseteq N(D(A))$. Рассмотрен ряд других свойств дизъюнкторов. Множество a всех элементов $x \in \Gamma$, для которых $D(x) = D(a)$, называется D-классом. Полугруппа Γ расщепляется на непересекающиеся D-классы. D-класс есть изолированная подполугруппа, являющаяся суммой I-классов; при этом $a \subseteq N(a) \subseteq N(D(a))$. Если все D-классы коммутативны, то полугруппа Γ коммутативна.

Если $w(u) = \Gamma$, то u называется сильной единицей; если $D(v) = 1$, то v называется слабой единицей. Множество V всех слабых единиц и U — всех сильных единиц полугруппы Γ являются инвариантными изолированными идеалами, причем $U \subseteq V$. U является пересечением всех изолированных идеалов из Γ и пересечением всех простых идеалов. Если в Γ нет слабых единиц и все дизъюнкторы коммутативны, то Γ коммутативна.

Идеал Q полугруппы Γ называется примарным идеалом, принадлежащим простому идеалу P, если $I(Q) = \Gamma \setminus D(Q) = P$. Для полугруппы Γ в работе развита теория, аналогичная теории Крулля примарных идеалов в кольцах.

Л. М. Глускин

6520. Компактные монотетические полугруппы. Хьюитт (Compact monothetic semigroups. Hewitt Edwin), Duke Math. J., 1956, 23, № 3, 447—457 (англ.)

Топологическая полугруппа H называется монотетической, если в ней всюду плотна некоторая циклическая полугруппа. Существует три типа компактных монотетических полугрупп — компактные монотетические группы, полугруппы, состоящие из компактной монотетической группы G, порожденной элементом b с единицей l, и конечного множества элементов a, a^2,... a^s, для которых $al = b$, $a^{s+1} \in H$, и, наконец, полугруппы, состоящие из компактной монотетической группы G и счетной подполугруппы a, a^2,..., a^s, такой, что $ae = b$. При этом алгебраическая и топологическая структура полугруппы H вполне определяется строением группы G и выбором элемента b (а в случае 2 и числом s). Строение монотетических компактных групп задается подгруппами дискретной группы комплексных чисел, модуль которых равен единице. Рассматриваются также инвариантные меры на монотетических полугруппах.

Н. Я. Виленкин

6521. Квадраты Эйлера и неполные квадраты Эйлера четных порядков. Ямамото (Euler squares and incomplete Euler squares of even degrees. Yamamoto Koichi), Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ. A, 1954, 8, № 2, 161—180 (англ.)

Пусть $S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n\}$ — множество из n элементов. Множество L/n^2 векторов (x_1, x_2, x_3) называется латинским квадратом размерности $n \times n$, а множество $E\,n^2$ векторов (x_1, x_2, x_3, x_4) называется квадратом Эйлера размерности $n \times n$, если два различных вектора из L и E соответственно имеют не более одной общей соответствующей компоненты, а $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ пробегает все множество S, причем каждая возможная пара x_1, x_2 входит в один вектор. Каждый латинский квадрат можно сопоставить таблице Кэли некоторой квазигруппы. Каждому квадрату Эйлера соответствуют два латинских квадрата, называемых составляющими. Пусть $n = 2m$. Подмножество K множества S называется полумножеством, если оно состоит из m элементов. Наименьшее число векторов (x_1, x_2, x_3) из L, где $x_i \in K_i$ ($i = 1, 2, 3$), K_i — любые полумножества, называется дефектом латинского квадрата. Доказывается, что латинский квадрат размерности $n \times n$, $n = 2m$, который является составляющим некоторого квадрата Эйлера, имеет дефект $\geqslant \frac{m+1}{2}$. Пользуясь этим результатом, автор доказывает более простым способом известную теорему о том, что не существует квадратов Эйлера размерности 6×6. В § 3 дается пример неполного квадрата Эйлера размерности 6×6 с 4 пустыми клетками, обладающего тем свойством, что на любые 2 места можно поставить 2 пары из недостающих четырех. Такие квадраты названы квадратами типа Эйлера. Доказывается существование квадратов типа Эйлера размерности $n \times n$, где $n = 4m + 2$, если только $4m + 1$ является степенью простого числа.

В. Д. Белоусов

6522 Д. Потенциальные свойства полугрупп. Шутов Э. Г. Автореф. дис. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т им. А. И. Герцена, Л., 1958

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

6523. Об одном классе алгебраически разрешимых уравнений пятой степени. Крыговский (Sur une classe des équations du cinquième degré résolubles algébriquement. Krygowski Z.), Bull. Soc. amis sci. e lettres Poznan, 1954—1955 (1956), B13, 295—299 (франц.; рез. русск.)

Бинарная форма 5-й степени

$$f(x, y) = a_0 x^5 + 5a_1 x^4 y + 10a_2 x^3 y^2 + 10a_3 x^2 y^3 + 5a_4 x y^4 + a_5 y^5 \quad (1)$$

путем подстановки

$$\xi = \frac{P_x + Q_y}{2\sqrt{I_{12}}}, \qquad \eta = \frac{P'_x + Q'_y}{2\sqrt{I_{12}}}$$

преобразуется к виду

$$f(x, y) = (\sqrt{I_{12}})^{-5} (A_0 \xi^5 + 5A_1 \xi^4 \eta + 10A_2 \xi^3 \eta^2 + 10A_3 \xi^2 \eta^3 + 5A_4 \xi \eta^4 + A_4 \eta^5), \quad (2$$

при этом коэффициенты A_i определенным образом выражаются через инварианты I_4, I_8, I_{12}, I_{18} формы (1); инварианты эти, так же как и коэффициенты P, Q, P', Q', вычислены Кэли и Фаа ди Бруно (Fàa di Bruno, Einleitung in die Theorie der binären Formen, Zeipzig, 1881). В случае $I_{18}=0$ обращаются в нуль A_1, A_3, A_5 и (2) принимает вид

$$f(x, y) = (\sqrt{I_{12}})^{-5}\,\xi\,(A_0\,\xi^4 + 10A_2\,\xi^2\,\eta^2 + 5A_4\,\eta_4). \quad (3)$$

Из (3) следует, что уравнение 5-й степени $f(x, 1)=0$ в случае, когда $I_{18}=0$, разрешимо в радикалах. В качестве примера рассматривается уравнение

$$x^5 + 2pqx^2 - p = 0 \quad (4)$$

при произвольных p и q. Уравнение это в том случае, когда p и q — целые положительные и простые, различные между собой числа, имеет своей группой Галуа симметрическую группу подстановок 5-й степени (группа транзитивна, так как уравнение неприводимо, и содержит транспозицию, ибо уравнение имеет 3 действительных и 2 мнимых корня) и потому неразрешимо в радикалах. Далее предполагается, что p и q — любые числа; вычисляя для уравнения (4) инвариант I_{18} и приравнивая его нулю, приходят к соотношению:

$$1 + 81\,p^2\,q^5/5^5 - 729\,p^4\,q^{10}/5^{10} = 0. \quad (5)$$

Таким образом, если коэффициенты уравнения (4) удовлетворяют соотношению (5), то уравнение это разрешимо в радикалах. А. Г. Школьник

6524. Несколько замечаний о теории Галуа. Дионизиу (Some remarks on Galois theory. Dionísio J. J.), Rev. Fac. cienc. Univ. Coimbra, 1955, 24, 12—17 (англ.)

На основании известного изложения Артина (Artin E. Galois Theory, 2ed. Notre Dame. Indiana, 1948) доказывается ряд хорошо известных предложений теории конечных сепарабельных расширений полей. Статья не содержит никаких новых результатов. Имеется ряд неверных утверждений (теоремы 6 и 8).

Л. А. Калужнин

6525. О группе некоторых примитивных разрешимых уравнений с комплексными корнями. Ёлкин Ю.Г., Уч. зап. Краснодарск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 15, 45—58

Исследуется вопрос о возможных максимальных группах примитивных разрешимых уравнений степени p^n (p — нечетное простое число; $n = q_1q_2q_3$, где q_1, q_2, q_3 — различные простые числа) в случае наличия у этих уравнений комплексных корней. Исследование проводится с помощью следующих теорем:

1. Если алгебраическое уравнение имеет t пар комплексных корней, то группа этого уравнения содержит подстановку, состоящую из произведения t независимых транспозиций.

4. Максимальный абелев нормальный делитель максимальной неприводимой разрешимой группы степени p^n — 1 при $p>2$ содержит подстановки второго порядка только с t независимыми транспозициями, причем $2t = p^n - p^{rm(s-\mu)}$, где $\mu = 1,2,\ldots,s$, а числа m, r, s связаны соотношением $mrs = n$.

Используя классификацию Д. А. Супруненко (Матем. сб., 1947, 20 (62); 2), автор определяет возможное число комплексных корней уравнения для 10 существенно различных типов максимальных абелевых нормальных делителей максимальных неприводимых разрешимых подгрупп полной линейной группы $GL(n, P)$ над конечным полем $GF[p^m]$ $(=P)$. В. К. Туркин

6526. Об одном способе построения уравнений с импримитивной группой. Ёлкин Ю. Г., Уч. зап. Краснодарск. гос. пед. ин-та, 1957; вып. 15, 41—43

Излагается способ построения неприводимого над полем P уравнения заданной степени и с заданной импримитивной группой. При этом требуется определить подгруппы заданной группы и функции, принадлежащие к этим подгруппам. Подробно рассмотрен случай уравнения 6-й степени: для этого случая дана таблица максимальных импримитивных подгрупп 6-й степени и их транзитивных подгрупп, а также соответствующих функций. В. К. Туркин

6527. Максимальные цепочки идеалов кольца. Герендон (Sur les chaînes maximales d'idéaux dans les anneaux. Guérindon J.), Sémin. A. Châtelet. et P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1953—1954 (1956), 7, № 10, 1—11 (франц.)

Работа в основном посвящена покрываемым и квазимаксимальным идеалам коммутативного кольца с единицей. Идеал I коммутативного кольца R называется покрываемым идеалом J, если $J \supset I$ и не существует ни одного идеала кольца R, строго содержащегося между идеалами I и J. Для идеала I коммутативного кольца R с единицей тогда и только тогда существует по крайней мере один покрывающий его идеал J, когда существует по крайней мере один такой максимальный идеал M, что $I : M \neq I$. (На примере показывается, что для колец без единицы эта теорема не верна.) Каждый идеал J, покрывающий идеал I, имеет вид $J = I + Rx$, где $x \in I : M - I$, а M — произвольный максимальный идеал кольца R, для которого $I : M \neq I$. (Идеал I, для которого существует по крайней мере один такой максимальный идеал M, что $I : M \neq I$, автор называет квазиоднообразным). Передоказывается теорема о том, что если идеал J покрывает идеал I, то фактор-кольцо J/I является либо полем, либо кольцом с нулевым умножением. Для любого максимального идеала M кольца R, для которого $0:M \neq 0$, следующие свойства равносильны: 1) $(0:M)^2 = 0$; 2) $0 : M \subseteq \subseteq \alpha$ (где α — джекобсоновский радикал кольца R); 3) $0:M \subseteq M$; 4) $0 : M \cap M \neq 0$. Каждое из этих четырех свойств равносильно тому, что все минимальные идеалы кольца R, порождаемые элементами идеала $0 : M$, являются кольцами с нулевым умножением. Если же $(0 : M)^2 \neq 0$, то идеал $0 : M$ сам является минимальным идеалом кольца R и является полем. Указанные выше результаты далее естественным образом уточняются в случаях, когда R является нетеровым кольцом или кольцом Артина. В частности, если среди простых идеалов, соответствующих некоторому идеалу I нетерова кольца R, имеется максимальный идеал M, не содержащий никакой другой простой идеал, соответствующий идеалу I, фактор-кольцо $(I:M)/I$ тогда и только тогда является полем, когда идеал M сам является примарной компонентой идеала I. Идеал Q кольца R называется квазимаксимальным, если каждый содержащий его простой идеал P является максимальным идеалом. Приводится ряд свойств квазимаксимальных идеалов. В частности, если кольцо R нетерово, то пересечение всех квазимаксимальных идеалов, содержащих данный идеал I, совпадает с I. При доказательстве этой теоремы используется следующая лемма: если M — максимальный идеал нетерова кольца R, то пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} M^k$ состоит из всех тех элементов $x \in R$, для которых $0 : R \not\subset M$. Множество всех квазимаксимальных идеалов нетерова кольца R может служить полной системой окрестностей нуля, и определяемая таким образом в кольце R топология будет сепарабельной. В этой топологии каждый идеал кольца R замкнут. Если R' — пополнение кольца R, то для любого идеала I' кольца R' и любого идеала I кольца R имеют место равенства $I' = R'(I' \cap R)$ и $I = R'I \cap R$. Е. Г. Шульгейфер

6528. Заметка о кольцах, в которых каждый истинный левый идеал является циклическим. Сас (Note on rings in which every proper left-ideal is cyclic. Szász F. A.), Fundam. math., 1957, 44, № 3, 330—332 (англ.)

Доказывается, что тогда и только тогда всякий истинный левый идеал кольца R является кольцом с циклической аддитивной группой, когда R или тело, или кольцо с циклической аддитивной группой типа p^∞, или же произвольное кольцо порядка p^2, где p — простое число. А. П. Мишина

6529. Некоторые свойства кососимметрических элементов кольца. Барнетт, Эйбиан (Some properties of skew-symmetric elements of a ring. Barnett I. A., Abian S.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, 52, № 3, 549—553 (англ.)

Пусть R^*— кольцо с единицей, в котором определена инволюция $A \to A'((A+B)' = A' + B'; (AB)' = B'A'; (A')' = A)$. Элемент $C \in R^*$ называется симметрическим, если $C = C'$, и кососимметрическим, если $C = -C'$. Доказывается, что если для элемента $A \in R^*$ найдется такой симметрический элемент C, что существует элемент $(A-C)^{-1} = B$, то элемент A является кососимметрическим тогда и только тогда, когда $2B'CB + B' + B = 0$. Отсюда, в частности, вытекает, что обратный к кососимметрическому элементу также кососимметричен. Рассмотрены приложения этих результатов к теории матриц, теории интегральных уравнений и матрицам, элементами которых являются интегральные операторы. С. Д. Берман

6530. О полиномах от алгебраического над полем элемента, содержащихся в группе. Барнс, Шнейдер (The group membership of a polynomial in an element algebraic over a field. Barnes W. E., Schneider H.), Arch. Math., 1957, 8, № 3, 166—168 (англ.)

Пусть $q(x)$ — полином над полем $F \subseteq R$, где R — кольцо, а $m(x)$ — полином наименьшей степени над F, которому удовлетворяет алгебраический над F элемент $a \in R$. Элемент $q(a)$ называется групповым элементом, если $q(a)$ содержится в подгруппе мультипликативной полугруппы кольца R. Оказывается, что $q(a)$ является групповым элементом тогда и только тогда, когда $(m(x), q(x)) = (m(x), q^2(x))$, причем в этом случае $q(a)$ — групповой элемент уже в кольце $F[a]$, и некоторая степень элемента a также является групповым элементом. Отсутствие у полинома $m(x)$ кратных корней является необходимым и достаточным условием для того, чтобы элемент $q(a)$ был групповым элементом для любого полинома $q(x)$. Из последнего результата вытекает теорема Фарахата и Мирского (РЖМат, 1957, 4610) о минимальном полиноме комплексной матрицы. Авторы отмечают, что приведенные результаты могут быть обобщены: пусть I и I' — коммутативные кольца главных идеалов, а $a \to a'$ — гомоморфное отображение I в I' с ядром $m \neq 0$. (Последнее условие является существенным). Элемент $q' \in I'$ тогда и только тогда является групповым элементом в произвольном надкольце $R \supseteq I'$, когда $(q, m) = (q^2, m)$. С. Д. Берман

6531. О регулярных групповых кольцах. Ауслендер (On regular group rings. Auslander Maurice), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 4, 658—664 (англ.)

Изучаются гомологические свойства группового кольца $K(G)$ группы G над кольцом с единицей K. Кольцо R с единицей называется регулярным, если для любого $x \in R$ найдется такой элемент $y \in R$, что $xyx = X$. Слабая левая размерность w. l. $\dim_R A$ левого R-модуля A определяется условиями — $1 \leqslant$ w. l. $\dim_R A \leqslant \infty$; w. l. $\dim_R A < n$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Tor}_n^R(C, A) = 0$ для любого правого R-модуля C, а слабая глобальная размерность w. gl. dim R кольца R определяется так: $0 \leqslant$ w. gl. dim $R \leqslant \infty$; w. gl. dim $R < n$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Tor}_n^R = 0$ (РЖМат, 1956, 6427). Оказывается, что равенство w. gl. dim $R = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы кольцо R (с единицей) было регулярным. Для локально-конечной группы G следующие утверждения эквивалентны: а) w. l. $\dim_{K(G)} K = 0$; б) w. l. $\dim_{K(G)} K < \infty$; с) уравнение $nx = 0$, где n — порядок произвольного элемента группы G, имеет в K только нулевое решение. Если G — локальная конечная группа и w. l. $\dim_{K(G)} K < \infty$, то w. gl. dim $K(G) =$ w. gl. dim K, и в этом случае кольцо $K(G)$ регулярно тогда и только тогда, когда K регулярно и выполняется условие с). Из регулярности кольца $K(G)$ вытекает, что G — периодическая группа, а кольцо $K(G)$ удовлетворяет условию с). Если G — коммутативная группа, а K — поле, характеристика которого не делит порядки элементов группы G, то ранг этой группы равен w. gl. dim $K(G)$. С. Д. Берман

6532. О теории радикала. Се Бан-цзе, Дунбэй женьминь дасюэ цзыжань-кэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., 1957, № 1, 177—214 (кит.)

Обзорная статья. Библ. 100 назв.

6533. Об индексуемых кольцах. Тинх-Куат Фам (Sur les anneaux indexables. Tinh-Quat Pham Daniel), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 20, 1683—1685 (франц.)

Рассматриваются кольца с единицей. Элементы кольца A разбиваются на классы транзитивности: класс $\{x\}$ содержит, вместе с элементом x, также все элементы кольца A вида $\lambda x \mu$, где λ и μ пробегают все множество обратимых элементов кольца A. Кольцо называется индексуемым, если множество его классов транзитивности может быть упорядочено хотя бы одним способом, причем так, чтобы выполнялись следующие три аксиомы: 1) $\{0\} \lesnsim \{x\}$ $(x \neq 0)$; 2) $\{x \cdot y\} \leqslant \{x\}$, $\{x \cdot y\} \leqslant \{y\}$; 3) между $\{0\}$ и классом $\{x\}$, отличным от единичного класса, существует конечное число классов. Если число всех классов транзитивности конечно, то оно, уменьшенное на единицу, называется индексом кольца. Если упорядочение множества классов транзитивности возможно лишь единственным образом, то кольцо называется строго индексуемым. Автор утверждает: если два данных кольца A и A' являются кольцами конечных индексов, то произведение $A \times A'$ с операциями $(x, x') + (y, y') = (x + y, x' + y')$, $(x, x') \cdot (y, y') = (x \cdot y, x' \cdot y')$ является (не строго) индексуемым кольцом конечного индекса. Возможно обобщение этого результата на произвольное число индексуемых колец. В индексуемом кольце всякий двусторонний идеал, обладающий единицей, является индексуемым подкольцом и только кольца конечного индекса могут обладать такими идеалами. Всякий класс $\{a\}$ индекса 1 в некоторой индексикации называется минимальным, а двусторонний идеал U, порожденный элементами класса $\{a\}$, называется ядром. Индексуемое кольцо, не обладающее минимальными классами, называется одноузловым. Всякое индексуемое кольцо обладает следующими свойствами: а) если V есть двусторонний идеал и если ядро U не содержится в V, то $UV = VU = 0$ и $(VnU)^2 = 0$; в) если два различных ядра имеют пересечение, отличное от нуля, то квадрат одного из них равен нулю, а само кольцо содержится в другом; с) квадрат неидемпотентного ядра равен нулю. Изучается разложение индексуемых колец в прямую сумму одноузловых колец. Индексуемое кольцо конечного индекса с идемпотентными ядрами тогда и только тогда разложимо в прямую сумму одноузловых (взаимно уничтожающихся) колец, когда двусторонний идеал, уничто-

жающий какое-либо ядро, является одновременно главным левым идеалом и главным правым идеалом. Два ядра U и U' называются связанными, если существует такая соединяющая их (конечная или бесконечная) цепь ядер, в которой каждые два соседних ядра имеют ненулевое пересечение. Множество попарно связанных ядер, не содержащее в себе никакого нильпотентного ядра, разложимого в прямую сумму, называется множеством первой категории. Утверждается, что индексуемое кольцо конечного индекса разложимо в прямую сумму индексуемых неразложимых (взаимно уничтожающихся) колец, если дополнительно выполняются следующие условия: множества связанных ядер всегда являются множествами первой категории и аннулятор двустороннего идеала, порожденного всяким множеством связанных ядер, обладает идемпотентной степенью, которая является одновременно главным левым идеалом и главным правым идеалом. Доказательства не приводятся. А. А. Виноградов

6534. Гомологическая размерность в нетеровых кольцах. Ауслендер, Буксбаум (Homological dimension in Noetherian rings. Auslander Maurice, Buchsbaum David A.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 1, 36—38 (англ.)

Предполагается, что кольцо R нетерово. Ранг идеала I кольца R обозначается через $\dim I$ ($\dim R = \sup \dim I$), а гомологическая размерность идеала I, рассматриваемого как R-модуль (в смысле книги Картана и Эйленберга (РЖМат, 1956, 6427)), — через $h\cdot\dim I$. В виде леммы формулируется утверждение о том, что если $I:(x) = I$, то, $h\cdot\dim(I, x) = 1 + h.\dim I$. Множество элементов $x_1, \ldots, x_p \in R$, удовлетворяющих условиям $I:(x_1) = I$, $(I, x_1, \ldots, x_i):(x_{i+1}) = (I, x_1, \ldots, x_i)$, $i = 1, \ldots, p-1$ и $(I, x_1, \ldots, x_p) \neq R$, называется R/I-последовательностью. Для случая, когда кольцо R локально, доказывается, что все максимальные R/I-последовательности состоят из одного и того же числа элементов; это число авторы называют коразмерностью R-модуля R/I. Утверждается, что коразмерность локального кольца R равна $\sup h\cdot\dim M$, где M пробегает все R-модули с конечным числом M образующих, имеющих конечную гомологическую размерность. Формулируется теорема: Локальное кольцо R регулярно тогда и только тогда, когда глобальная размерность $\mathrm{gl.dim}\ R$ кольца R конечна (в этом случае $\mathrm{gl.dim}\ R = \dim R$). Отмечается, что если S — произвольная мультипликативно замкнутая система кольца R, не содержащая 0, то $\mathrm{gl.dim}\ R \geqslant \mathrm{gl.dim}\ R_s$. Отсюда, согласно теореме, следует, что если локальное кольцо R регулярно, то для любого простого идеала P кольца R локальное кольцо R_p также регулярно. Принимая это во внимание, авторы кольцо R называют регулярным, если для каждого простого идеала P кольца R локальное кольцо R_p регулярно. Отмечается, что каждое регулярное кольцо разлагается в конечную прямую сумму регулярных областей целостности. Идеал I регулярного кольца R называется совершенным, если $h.\dim R/I = \dim I$. Каждый совершенный идеал является несмешанным. В заключении формулируются следующие две теоремы: 1. Если кольцо R регулярно, а $I = (x_1, \ldots, x_n)$ — идеал кольца R, ранг которого равен n, то элементы $x_1, \ldots, x_n$ составляют R-последовательность и, следовательно, идеал I совершенен. 2. Если R — кольцо Зариского, то для любого R-модуля M имеет место неравенство $h.\dim_R M \geqslant h.\dim_{R^*} M^*$, где R^* и M^* — пополнения кольца R и модуля M соответственно. В случае, когда кольцо R локальное, вместо неравенства имеет место равенство и $\mathrm{gl.dim}\ R = \mathrm{gl.dim}\ R^*$. Е. Г. Шульгейфер

6535. Одна теорема из гомологической алгебры. Рис (A theorem of homological algebra. Rees D.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 4, 605—610 (англ.)

Основная теорема. Пусть A — коммутативное кольцо, N — некоторый A-модуль и $g_1, \ldots, g_k$ — такие элементы кольца A, что $(g_1, \ldots, g_{i-1})A: g_i = (g_1, \ldots, g_{i-1})A$ и $(g_1, \ldots, g_{i-1})N: g_i = (g_1, \ldots, g_{i-1})N$ $(i = 1, \ldots, k)$. Тогда для любого A-модуля M, аннулируемого идеалом $\mathfrak{g} = (g_1, \ldots, g_k)$, *a)* $\mathrm{Ext}_A^p(M, N) = 0$, если $p < k$; *b)* $\mathrm{Ext}_A^p(M, N) \simeq \mathrm{Ext}_B^{p-k}(M, N/\mathfrak{g}N)$, если $p \geqslant k$, где $B = A/\mathfrak{g}$. Доказательство теоремы опирается на аксиоматическое определение связанной последовательности производных функторов Ext^p. Приводится формулировка этой теоремы в случае, когда A — нетерово градуированное кольцо, M и N — градуированные A-модули с конечным числом образующих, а $g_1, \ldots, g_k$ — однородные элементы. Далее, при предположении, что кольцо A нетерово, указываются некоторые приложения основной теоремы. Идеал $\mathfrak{g}$ кольца A называется общим идеалом ранга k, если в качестве его образующих можно выбрать k таких элементов $g_1, \ldots, g_k$, что $(g_1, \ldots, g_{i-1}):g_i = (g_1, \ldots, g_{i-1})$ $(i = 1, \ldots, k)$. Классом произвольного идеала $\mathfrak{a}$ кольца A (обозначение: $\mathrm{gr}\,\mathfrak{a}$) называется такое число k, что идеал $\mathfrak{a}$ содержит по крайней мере один общий идеал ранга k, но не содержит ни одного общего идеала ранга $> k$ (по определению, нулевой идеал является общим идеалом ранга нуль). Доказывается ряд утверждений, связанных с понятием класса. В частности: 1) Если $\mathfrak{a}$ — произвольный идеал класса k, то $\mathrm{Ext}_A^k(A/\mathfrak{a}, A) = (\mathfrak{g}:\mathfrak{c})/\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ — произвольный общий идеал ранга k, содержащийся в идеале $\mathfrak{a}$. 2. Класс радикала идеала $\mathfrak{a}$ равен классу идеала $\mathfrak{a}$. 3. $\mathrm{gr}(\mathfrak{b}) = \mathrm{gr}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \min(\mathrm{gr}\,\mathfrak{a}, \mathrm{gr}\,\mathfrak{b})$. 4. Каждый максимальный (минимальный) простой идеал, соответствующий некоторому общему идеалу ранга k, является максимальным (минимальным) идеалом класса k, и обратно: произвольный максимальный (минимальный) идеал $\mathfrak{b}$ класса k является максимальным (минимальным) простым идеалом, соответствующим произвольному общему идеалу ранга k, содержащемуся в идеале $\mathfrak{b}$. Е. Г. Шульгейфер

6536. Ограниченность в топологических кольцах. Уэйсс (Boundedness in topological rings. Weiss Edwin), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 1, 149—158 (англ.)

Топологическое кольцо R называется ограниченным слева, если для любой окрестности нуля U найдется такая окрестность нуля V, что $VR \subset U$. Аналогично определяются ограниченность справа и двусторонняя ограниченность. В работе для ограниченных слева колец вводится понятие, аналогичное радикалу Джекобсона для дискретных колец, и изучаются свойства такого радикала. Н. Я. Виленкин

6537. Первая лемма Уайтхеда для альтернативных алгебр. Тафт (The Whitehead first lemma for alternative algebras. Taft Earl Jay), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 950—956 (англ.)

Если A — сепарабельная подалгебра альтернативной алгебры B конечного ранга над полем Φ характеристики $\neq 2, 3$, то всякое дифференцирование A в B может быть продолжено до дифференцирования f алгебры B, имеющего форму

$$f(a) = ag - ga + \sum_i [(ax_i)y_i - (ay_i)x_i + y_i(ax_i) - x_i(ay_i) + y_i(x_i a) - x_i(y_i a)],$$

где g лежит в ассоциативном центре алгебры B, x_i, $y_i \in B$. Если характеристика P равна 0, то g всегда можно сделать равным нулю. Этот результат для случая характеристики нуль был ранее получен Шафером (Schafer R., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **72**, 1—17), использовавшим результаты Джейкобсона об алгебрах (Jacobson N., Trans. Amer. Math. Soc., 1951, **70**, 509—530). В реферируемой работе дается прямое доказательство.

Л. А. Скорняков

6538. Ассосимметрические кольца. Клейнфельд (Assosymmetric rings. Kleinfeld Erwin), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 5, 983-986 (англ.)

Если характеристика кольца R отлична от 2 и 3, в R нет ненулевых идеалов, квадрат которых равен нулю, и выполняется тождество

$$[[t, y, z], w, x] = [w, x, y]\,[z, s, t] = 0 \qquad (1),$$

то R — ассоциативно ($[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$). Устанавливается, что (1) справедливо во всяком кольце S, в котором $[x_1, x_2, x] = [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}]$ для любых $x_1, x_2, x_3 \in S$ и любой перестановки $(i_1 i_2 i_3)$ (такое кольцо называется ассосимметрическим), а характеристика отлична от 2 и 3.

Л. А. Скорняков

6539. Новые классы ненормальных простых лиевых алгебр над произвольным полем. Сюй И-чао (Hsu Yi-chao), Бэйцзин дасюэ сюэбао. Цзыжань кэсюэ, Acta Scient. natur. Univ. pekinensis, 1957, **3**, № 3, 291—316 (кит.; рез. англ.)

Пусть G — абелева группа и V — векторное n-мерное пространство с базисом $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ над полем F. Пусть σ — гомоморфизм группы G в аддитивную подгруппу G^* пространства V:

$$\alpha \xrightarrow{\sigma} \sum_{i=1}^{n} \zeta(\alpha, i)\, e_i, \quad (\alpha \in G,\ \zeta(\alpha, i) \in F).$$

Пусть еще $L_G = \Big\{ \sum_{\alpha \in G} \sum_{i=1}^{u} a_{\alpha i} e_\alpha^i,\ a_{\alpha i} \in F$, где только конечное число $a_{\alpha i}$ отлично от нуля и e_α^i — символы$\Big\}$. В множестве L_G естественным образом определяются равенство и сумма элементов, а также произведение на скаляр из F. Коммутирование в L_G определяется следующим образом:

$$\Big[\sum_{\alpha, i} a_{\alpha i} e_\alpha^i,\ \sum_{\beta, j} b_{\beta j} e_\beta^j\Big] =$$

$$= \sum_{\alpha, \beta, i, j} a_{\alpha i} b_{\beta i} [\zeta(\alpha, j)\, e_{\alpha+\beta}^i - \zeta(\beta, i)\, e_{\alpha+\beta}^j].$$

При этом L_G становится nt-мерной лиевой алгеброй над F, где t — порядок группы G, который может быть и бесконечным. Ранг группы G^* называется индексом алгебры L_G и обозначается через r. В зависимости от различных n, r, характеристики p поля F и корней из единицы, лежащих в F, изучаются простые идеалы алгебры L_G. Среди них имеются простые алгебры, изоморфные найденным раньше Капланским простым лиевым алгебрам. Имеются также и новые классы. Приводятся условия, когда соответствующие простые лиевы алгебры оказываются ограниченными алгебрами Ли.

Б. И. Плоткин

6540. *O*-системы. Оплуштил (Die *O*-Systeme. Opluštil Karel), Spisy vyd. přírodověd. fak. Masarykovy univ., 1957, № 2, 69—86 (нем.; рез. русск.)

Множество M с двумя ассоциативными операциями (названными сложением и умножением) называется *O*-системой, если эти операции связаны левым дистрибутивным законом и если для любых элементов $a, b \in M$ $(a \neq b)$ в M разрешимо одно и только одно из уравнений $a + x = b$, $b + x = a$. Кроме того, *O*-система должна обладать нулем.

Рассмотрен ряд свойств *O*-систем; в частности, рассмотрены гомоморфизмы *O*-систем; *O*-подсистемы; *O*-системы без делителей нуля и т. д. *O*-система M линейно упорядочена отношением: $a \leqslant b$, если разрешимо уравнение $a + x = b$. Трансфинитные числа образуют вполне упорядоченную *O*-систему.

Л. М. Глускин

6541. Частично упорядоченные множества и теорема Шрейера об уплотнении. I. Бенадо (Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier. I. Benado Mihail), Čehoslovack. Math. Ž., 1954, **4(79)**, №2, 105—129 (франц.; рез. русск.)

Четырехугольником $(\Omega, \omega; a, b)$ в частично упорядоченном множестве P называются четыре элемента Ω, ω; a, b этого множества, удовлетворяющие условиям $\Omega \geqslant a \geqslant \omega$, $\Omega \geqslant b \geqslant \omega$. Четырехугольник $(M, d; a, b)$ называется подчетырехугольником четырехугольника $(\Omega, \omega; a, b)$, если $\Omega \geqslant M$, $d \geqslant \omega$. На частично упорядоченное множество накладывается следующее условие. H. Существует такой элемент ω_0 частично упорядоченного множества P, что для всякого четырехугольника $(\Omega, \omega_0; a, b)$ найдется подчетырехугольник $(M, d; a, b)$, для которого имеют место изоморфизмы $\eta, \tilde{\eta}: M / a \rightleftarrows b / d\ (\eta)$, $M / b \rightleftarrows a / d\ (\tilde{\eta})$. При этом условии доказывается, что две цепи с общими концами $\Omega \geqslant \omega_0$ в частично упорядоченном множестве P обладают изоморфными уплотнениями. Приводятся два доказательства этой теоремы. Выделяется класс структур (W-структуры), удовлетворяющих условиям доказанной Шрейером теоремы о существовании изоморфных уплотнений. Приводятся условия, при которых W-структура является модулярной. Доказывается теорема: для того чтобы множество Π главных идеалов области целостности R с единичным элементом было структурой с условием обрыва возрастающих цепочек, необходимо и достаточно, чтобы в R каждый элемент был единственным образом представим в виде произведения неразложимых элементов; в этом случае структура Π дистрибутивна.

А. Х. Лившиц

6542. Частично упорядоченные множества и теорема Шрейера об уплотнениях. II. Бенадо (Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier. II. Benado Mihail), Чехосл. матем. ж., 1955, **5**, № 3, 308—344 (франц., рез. русс.)

Ч. I см. реф. 6541.

Частично упорядоченное множество $\mathfrak{M}$ называется мультиструктурой, если: 1) для любых двух элементов $b, c \in \mathfrak{M}$ либо не существует таких элементов $\Omega \in \mathfrak{M}$, что $\Omega \geqslant b$, $\Omega \geqslant c$, либо среди таких элементов существует хотя бы один наименьший, т. е. такой элемент l, что из соотношений $x \leqslant l$, $x \geqslant b$, $x \geqslant c$ следует $x = l$; 2) для любых двух элементов $b, c \in \mathfrak{M}$ либо не существует таких элементов $\omega \in \mathfrak{M}$, что $\omega \leqslant b$, $\omega \leqslant c$, либо среди таких элементов существует хотя бы один наибольший, т. е. такой элемент $m \in \mathfrak{M}$, что из соотношений $y \geqslant m$, $y \leqslant b$, $y \leqslant c$ следует $y = m$. Совокупность предусмотренных условием 1) элементов l обозначается через $b \vee c$, а предусмотренных условием 2) элементов m — через $b \wedge c$. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы две бинарные (вообще говоря, неоднозначные и не всюду определенные) операции $\vee$ и $\wedge$ определялись бы некоторой мультиструктурой.

Частично упорядоченное множество P называется фильтруемым, если для каждой пары его элементов $a, b \in P$ существуют такие элементы Ω и ω, что $\Omega \geqslant a$, $\Omega \geqslant b$; $\omega \leqslant a$, $\omega \leqslant b$. Частично упорядоченное множе-

ство P обладает свойством интерполирования, если для любых элементов a_1, a_2, b_1, b_2, удовлетворяющих условиям $a_i \leqslant b_j$ $(i, j = 1, 2)$, найдется такой элемент c, что $a_i \leqslant c \leqslant b_j$ $(i, j = 1, 2)$. Для того чтобы мультиструктура была структурой, необходимо и достаточно, чтобы она была фильтруемым множеством и обладала свойством интерполирования.

Частные x/y и x'/y' мультиструктуры $\mathfrak{M}$ называются прямо подобными (обозначения: $x/y \simeq x'/y'$), если $x \geqslant x'$, $y \geqslant y'$ и $x \in (x' \vee y)$, $y' \in (x' \wedge y)$. Частные x/y и x'/y' называются прямо T-подобными ($x/y \sim x'/y'$), если $x \geqslant x'$, $y \geqslant y'$ и если существует такая конечная последовательность частных a_i/b_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, r;\ a_0/b_0 = x/y,\ a_r/b_r = x'/y')$, что $x/y \simeq a_1/b_1 \simeq a_2/b_2 \simeq \ldots \simeq a_{r-1}/b_{r-1} \simeq x'/y'$. Частные x/y и x'/y' называются T-подобными снизу (сверху), если найдется такое частное s/t, что $x/y \sim s/t$, $x'/y' \sim s/t$ ($s/t \sim x/y$, $s/t \sim x'/y'$). Частное s/t называется промежуточным частным для пары частных x/y, x'/y'.

Для четырехугольников $(\Omega, \omega;\ a, b)$ (определение см. реф. 6541) определяются многозначные дедекиндовы связи. Если дедекиндовы связи каждого неприводимого четырехугольника мультиструктуры $\mathfrak{M}$ являются однозначными, то мультиструктура $\mathfrak{M}$ называется сильной. Даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы мультиструктура была сильной.

Мультиструктура $\mathfrak{M}$ называется модулярной, если для каждого ее четырехугольника $(\Omega, \omega;\ a, b)$ существует такой подчетырехугольник $(M_0, d_0;\ a, b)$, где $M_0 = a \vee b$ и $d_0 \in a \wedge b$ (через $(a \vee b)_\Omega$ обозначается множество элементов $x \in a \vee b$ (соответственно через $(a \wedge b)_\omega$ обозначается множество элементов $y \in a \wedge b$), для которых $x \leqslant \Omega$ (соответственно $y \geqslant \omega$)), что 1) для любых элементов $p \in M_0/a$ и $p_i' \in (b \wedge p)\, d_0$ существует такой элемент $\overline{p}_0 \in (a \vee p_i')$, что $\overline{p}_0 = p$; 2) для любых элементов $p' \in b/d_0$ и $p_j \in (a \vee p')_{M_0}$ существует такой элемент $p_0' \in (b \wedge p_j)_{p'}$, что $\overline{p}_0' = p'$. В модулярной мультиструктуре любые две цепи с общими концами обладают по крайней мере одной системой канонических уплотнений одинаковой длины, частные которых соответственно либо T-подобны снизу, либо T-подобны сверху.

Изучаются мультиструктуры, удовлетворяющие следующим условиям полумодулярности: (σ') если частные a/ω и b/ω четырехугольника $(\Omega, \omega;\ a, b)$ мультиструктуры $\mathfrak{M}$ просты и $a \neq b$, то просты и частные M/a и M/b для любого $M \in (a \vee b)_\Omega$; (σ'') если частные Ω/a Ω/b четырехугольника $(\Omega, \omega;\ a, b)$ мультиструктуры $\mathfrak{M}$ просты и $a \neq b$, то просты и частные a/d и b/d для любого $d \in (a \wedge b)_\omega$. Доказывается, в частности, что в мультиструктуре $\mathfrak{M}$ с конечными цепями условие (σ'') является необходимым и достаточным для того, чтобы для любых двух цепей, имеющих общие концы $\Omega > \omega$ и одинаковую длину, существовало взаимно однозначное соответствие между всеми частными, при котором соответствующие частные были бы T-подобными снизу, а их промежуточные частные s/t удовлетворяли бы условиям $\Omega \geqslant s > t \geqslant \omega$.

Функция $v[a]$, определенная на мультиструктуре $\mathfrak{M}$, называется: 1) оценкой первого рода, если для каждой пары элементов $a, b \in \mathfrak{M}$, для которой определены $a \vee b$ и $a \wedge b$, найдутся такие элементы $M \in a \vee b$ и $d \in a \wedge b$, что $v[a] + v[b] = v[M] + v[d]$; 2) оценкой второго рода, если для любого элемента $M \in a \vee b$ найдется такой элемент $d \in a \wedge b$, что $v[a] + v[b] = v[M] + v[d]$, 3) оценкой третьего рода, если $v[a] + v[b] = v[M] + v[d]$ для любых элементов $M \in a \vee b$ и $d \in a \wedge b$. Оценка v называется изотонной (соответственно позитивной), если из $a \geqslant b$ $(a > b)$ следует, что $v[a] \geqslant v[b]$ (соответственно $v[a] > v[b]$). Мультиструктура называется нормированной, если в ней задана позитивная оценка третьего рода. Каждая нормированная мультиструктура, являющаяся фильтруемым множеством, будет метрическим пространством с метрикой $\partial(a, b) = v[M] - v[d]$. Каждая нормированная мультиструктура модулярна.

Мультиструктура $\mathfrak{M}$ называется дистрибутивной, если из условий $\Omega \geqslant a, b, b' \geqslant \omega$, $(a \vee s)_\Omega = (a \vee b)_\Omega = \Omega$, $(a \wedge b)_\omega = (a \wedge b')_\omega = \omega$ следует равенство $b = b'$. Каждая нормированная и фильтруемая мультиструктура $\mathfrak{M}$, являющаяся транзитивным метрическим пространством, дистрибутивна. Дистрибутивная мультиструктура $\mathfrak{M}$ является модулярной и сильной и, следовательно, любые две ее цепи с общими концами обладают изоморфными (каноническими) уплотнениями. А. Х. Лившиц

6543. Исправление к моей работе «Частично упорядоченные множества и теорема Шрейера об уплотнении». II. (Теория мультиструктур). Benado (Rectification à mon travail «Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier». II. (Théorie des multistructures). Benado Mihail), Чехосл. матем. ж., 1956, **6**, № 2, 287—288 (франц.)

6544. Дальнейшее уплотнение системы постулатов Уайтхеда — Хентингтона для булевой алгебры. Миллер (A further condensation of the Whitehead — Huntington postulate set for Boolean algebra. Miller Donald G.), Trans. Kentucky Acad. Sci., 1954, **15**, № 3, 88—91 (англ.)

Приводится определение булевой алгебры, как множества, состоящего из K, $+$, $\cdot$, и удовлетворяющего следующим постулатам: P_1. $a + b$ — единственный элемент из K, если a и b принадлежат K. P_2. $a \cdot b$ — единственный элемент из K, если a и b принадлежат K. P_3. $[(a + c)\cdot(a + b)]\cdot d = (b\cdot c)\cdot d + a\cdot d$, если a, b, c, d принадлежат K. P_4. Для каждого b из K существует b' из K, для которого

a) $a + bb' = bb' + a = a$,

b) $a(b + b') = (b + b')\cdot a = a$. P_5. В K существуют по крайней мере 2 различных элемента. Доказывается, что система аксиом $P_1 - P_5$ эквивалентна системе аксиом Диамонда (Diamond A. H., Bull. Amer. Math. Soc., 1934, **40**, 599). Приводятся примеры, показывающие независимость каждого из постулатов от остальных.

А. Х. Лившиц

6545. Вложение дистрибутивной структуры в булеву алгебру. Переманс (Embedding of a distributive lattice into a Boolean algebra. Peremans W.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. **A60**, № 1, 73—81 Indagationes math., 1957, **19**, (англ.)

Доказывается, что для каждой дистрибутивной структуры D существует булева алгебра, содержащая D как подструктуру. Доказательство конструктивное: строится булева алгебра $B(I)$, являющаяся свободным расширением структуры I (если B_1 — булева алгебра, содержащая D как подструктуру, то существует гомоморфное отображение $B(D)$ в B_1, тождественное на D). Дилуорс (Dilworth R. P., Trans Amer. Math. Soc., 1945, **57**, 123—154) доказал, что произвольную структуру P можно вложить в структуру N, каждый элемент которой обладает единственным дополнением. Доказывается, что если P — дистрибутивная структура, имеющая не менее 2 элементов, то структура N, получающаяся из P конструкцией Дилуорса, не дистрибутивна.

А. Х. Лившиц

6546. Геометрия структур, получаемая из B-покрытий. Мацусима (The geometry of lattices by B-covers. Matsushima Yataro), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 6, 328—332 (англ.)

Пусть $B(a, b)$ — множество таких элементов x структуры L, что $ax + bx = x = (a + x)(b + x)$. Положим

$B^*(a, b) = \{x;\ b \in B(a, x)\}$, $B^+(a, b) = \{x;\ a \in B(b, x)\}$. Исследуются связи множеств B, B^* и B^+ между собой и с некоторыми структурными свойствами. Приведем некоторые результаты: 1. $B^+(a, B(a, b)) = B^+(a, b)$; 2. Структура L является дедекиндовой тогда и только тогда, когда $B^*(a, b) = B^*(a, B(a, b))$ и $B(a, b) = B(a, B^*(a, b))$. Если $B^*(b, B(b, a + b)) = a + b$, то $a + b$ — максимальный элемент: 4. $B^*(a, b) = B^*(a + b, b) \cap B^*(ab, b)$.

Л. А. Скорняков

6547. Полные гомоморфизмы полных структур. Дуингер (Complete homomorphisms of complete lattices. Dwinger Ph.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch, 1957, **A60**, № 4, 412—420; Indagationes math., 1957, **19**, № 4, 412—420 (англ.)

Отношение конгруэнтности θ полной структуры L называется полным, если из $x_\alpha \equiv y_\alpha \pmod\theta$ вытекает $\Sigma x_\alpha = \Sigma y_\alpha \pmod\theta$ и $\Pi x_\alpha \equiv \Pi y_\alpha \pmod\theta$ при любом наборе индексов α. Структура, являющаяся образом структуры L при гомоморфизме, задаваемом отношением конгруэнтности, оказывается полной структурой. Отношение конгруэнтности θ является полным тогда и только тогда, когда классами вычетов по модулю θ являются замкнутые интервалы. Структура γ полных отношений конгруэнтности является Π-полной подструктурой всех отношений конгруэнтности (Π-полнота означает, что из $x_\alpha \in \gamma$ вытекает $\Pi x_\alpha \in \gamma$ при любой системе индексов). Если θ_1 и θ_2 — отношения конгруэнтности полной структуры с относительными дополнениями, то: 1. Из $x \equiv y \pmod{\theta_1}$ и $y \equiv z \pmod{\theta_2}$ вытекает существование такого элемента y', что $x \equiv y' \pmod{\theta_2}$ и $y' \equiv z \pmod{\theta_1}$; 2. $x \equiv y \pmod{\theta_1}$ тогда и только тогда, когда $x + a = y + a$ и $xb = yb$ для некоторых $a \equiv 0 \pmod{\theta_1}$ и $b \equiv 1 \pmod{\theta_1}$; 3. $x \equiv y \equiv \pmod{\theta_1 \cup \theta_2}$ тогда и только тогда, когда $x + a_1 + a_2 = y + a_1 + a_2$ и $xb_1b_2 = yb_1b_2$ для некоторых $a_i \equiv 0 \pmod{Q_i}$ и $b_i \equiv 1 \pmod{\theta_i}$; 4. Следующие свойства отношения конгруэнтности θ_1 равносильны: а) образ структуры L при соответствующем гомоморфизме является прямым сомножителем для L, б) θ_1 — полно; б) элементы, сравнимые с 0 по модулю θ_1, образуют главный идеал.

Л. А. Скорняков

6548. Несимметрический ассоциативный закон в теории структур. Фельшер (Ein unsymmetrisches Assoziativ-Gesetz in der Verbandstheorie. Fellscher Walter), Arch. Math., 1957, 8, № 3, 171—174 (нем.)

Исследуются следующие аксиомы для универсальной алгебры с двумя бинарными операциями $+$ и $\cdot$: K_1. $x + y = y + x$; B_1. $x \cdot x = x(x + y)$; A_1. $(x + y) + z = x + (y + z)$; U_1. $x + (y + z) = (x + y) + (x + z)$; I_1. $x \cdot x + x = x$; G_1. Если $x + y = x$, то $xy = y$. Аксиомы, дуальные перечисленным, обозначим соответствующей буквой с индексом 2. Было известно, что системы аксиом

$$\begin{pmatrix} K_1 B_1 A_1 \\ K_2 B_2 A_2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} K_1 I_1 G_1 A_1 \\ K_2 I_2 G_2 A_2 \end{pmatrix}$$

эквивалентны между собой. Устанавливается, что они эквивалентны также любой системе аксиом, получаемой из них заменой одного или обоих A_i на соответствующие U_i.

Л. А. Скорняков

6549. Операторы замыкания на c-структурах. Кришнан (Closure operations on c-structures. Krishnan Viakalathur S.), Proc. Koninkl. nederl. Akad. wetensch., 1953, **A56**, № 4, 317—329; Indagationes Math., 1953, **15**, № 4, 317 — 329 (англ.)

Аксиоматизируются отношения, существующие, например, между некоторым классом алгебраических систем, рассматриваемым с гомоморфизмами, существующими между этими системами (l-структуры и l-гомоморфизмы), и классом топологических или частично упорядоченных образований, определяемых на указанных алгебраических системах, причем рассматриваются уже лишь непрерывные или, соответственно, монотонные гомоморфизмы (c-структуры и c-гомоморфизмы). Основная идея работы состоит в рассмотрении естественной частичной упорядоченности между возможными типами c-структур и во введении операторов замыкания для типов относительно этой частичной упорядоченности. В основной теореме 3 указываются некоторые операторы замыкания, определяемые при помощи одного набора основных бинарных отношений и операций над типами, а также выделяется один из этих операторов замыкания, самый слабый. Точная формулировка этой теоремы потребовала бы многочисленных определений; ограничимся указанием тех конкретных следствий, которые получены автором при помощи теоремы 3. Следствие 1. Структура тогда и только тогда дистрибутивна, если она удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий: она погружается в произведение цепей; она является структурным произведением цепей, определенных на множествах одинаковой мощности; она погружается в предел инверсной направленной системы конечных булевых алгебр; она изоморфна пределу инверсной направленной системы конечных булевых алгебр. Аналогичные критерии получены в следствиях 2—5 для того, чтобы структурно-упорядоченная группа была регулярной (т. е. из $a \cap xax^{-1} = 1$ следовало бы $a' = 1$), чтобы топологическое пространство был вполне регулярным, чтобы топологическая абелева группа была компактной и чтобы на множестве была определена равномерная топология.

А. Г. Курош

6550. Прямые произведения в модулярных структурах. Дуингер (Direct products in modular lattices. Dwinger Ph.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. 1956, **A59**, № 4, 435—443; Indagationes math., 1956, **18**, № 4, 435—443 (англ.)

Наряду с прямыми суммами в модулярных структурах изучается двойственное понятие прямого произведения: элемент a модулярной структуры L является прямым произведением элементов x и x', $a = x \otimes x'$, если $a = x \cdot x'$ и $1 = x + x'$. Элемент $a \in L$ является прямым произведением подмножества $X \subset L$, состоящего не менее чем из двух элементов, $a = \Pi^*_{x \in X} x$, если для каждого элемента $x \in X$, $a = x \otimes x^*$, где x^* для каждого $x \in X$ есть произведение всех элементов из X, отличных от x. Доказывается ряд свойств прямых сумм и прямых произведений, а также следующие свойства, связывающие эти понятия: если $\Sigma^*_{x \in X} x = 1$ и множество X конечно, то (1) $x_\alpha = \Pi_{x \neq x_\alpha} x'$ (через x' для каждого $x \in X$ обозначается сумма всех элементов множества X, отличных от x) для каждого $x_\alpha \in X$, следовательно, $x'^*_\alpha = x_\alpha$ для каждого $x_\alpha \in X$; (2) $\Pi_{x \in X} x' = \Pi^*_{x \in X} x = 0$, а также двойственные свойства. Если в структуре L выполняется условие Бэра (B): для множества $X \subset L$ и $y < z < \Sigma_{x \in X} x$ существует конечное множество элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_i \in X$, для которого $y(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) < z(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$, то свойства (1) и (2) выполняются и для бесконечного множества X. Если в структуре L выполняется условие (B), $\Sigma^*_{x \in X} x = 1$ и $X_1 \subset X$, где множества X и X_1 могут быть бесконечными, то 0 есть прямое произведение a_1 и всех элементов x', $x \in X_1$, где a_1 — прямое произведение всех элементов x', $x \in X_1$. Доказывается также, что если в модулярной структуре выполняется условие (B), то в ней выполняется и условие вполне

дедекиндовости: для двух систем элементов x_α и y_α ($\alpha \in M$), удовлетворяющих условию $x_\alpha \leqslant y_\alpha$ для $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in M$, выполняется равенство $(\Sigma_{\alpha \ni M} x_\alpha) \times \times \Pi_{\alpha \in M} y_\alpha = \Sigma_{\alpha \in M} x_\alpha y_\alpha$. А. Х. Лившиц

6551. Центр бикомпактной структуры вполне несвязан. Уоллес (The center of a compact lattice is totally disconnected. Wallace Alexander Doniphan), Pacif. J. Math., 1957, № 7, 2, 1237—1238 (англ.)

Доказывается теорема, указанная в заглавии. Под топологической структурой понимается хаусдорфово пространство, на котором определены непрерывные структурные операций. Л. А. Скорняков

6552. О структурах с относительными дополнениями. Сас (On relatively complemented lattices. Szász G.), Acta scient. math., 1957, 18, № 1—2, 48—51 (англ.)

Рассматривается структура L с относительными дополнениями, с нулем и единицей. Если $a \leqslant r \leqslant b$ и s — относительное дополнение r в $[ab]$, то существует хотя бы одно дополнение t элемента r такое, что $s = (a + t)b = a + bt$. Если, кроме того, a', s', s' — какие-либо дополнения элементов a, b, s, соответственно, а L—дедекиндова, то элемент $L = (a's + r')(s + b') = a's + s'(s + s')$ является дополнением элемента r. При этом каждое дополнение элемента r может быть представлено таким образом. Л. А. Скорняков

6553. Характеризация T-модулей с дистрибутивной структурой подмодулей для полупримарного T. Беренс (Eine Charakterisierung der T-Moduln mit distributivem Untermodulverband bei halbprimärem T. Behrens Ernst-August), Arch. Math., 1957, 8, № 4, 265—273 (нем.)

Пусть T — ассоциативное кольцо с единицей, удовлетворяющее условию минимальности для правых идеалов, m — правый T-модуль, $\mathfrak{r}$ — структура подмодулей модуля m. Радикал кольца S будем обозначать через $R(S)$. Далее обозначим через Σ систему таких примарных подколец кольца T, которые представимы в форме eTe с каким-либо идемпотентом e.

Теорема 1. Если T — простое кольцо, то дистрибутивность структуры $\mathfrak{r}$ равносильна простоте модуля m. Теорема 6. Структура $\mathfrak{r}$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда для каждого максимального кольца P системы Σ все факторы ряда $mP \supset R(P) \supset \supset mR^2(P) \supset \ldots \supset mR^r(P) = 0$ являются простыми правыми P-модулями. Теорема 7. Структура правых идеалов кольца T дистрибутивна в том и только в том случае, когда T является прямой суммой вполне примарных колец T_i, а для каждого i факторы ряда $T_i \supset R(T_i) \supset R^2(T_i) \supset \ldots \supset R^{r_i}(T_i) = 0$ просты и изоморфны между собой как правые $T_i / R(T_i)$-модули. Л. А. Скорняков

6554. Центр замыканий и разложение структуры. Накамура (Center of closure operators and a decomposition of a lattice. Nakamura Masahiro), Math. Japon., 1954, 3, № 2, 49—52 (англ.)

Центром замыканий структуры L называется совокупность замкнутых операторов, перестановочных с любым другим таким оператором (РЖМат, 1955, 3104). Структура L называется разрешимой, если центр ее замыканий содержит не менее трех элементов. Кардинальной l-суммой структур M и N с общими нулем и единицей называется объединение M и N, где $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant y$ справедливо в M или в L. Полная структура размерности $\geqslant 3$ разрешима в том и только в том случае, когда она разложима в кардинальную l-сумму своих подструктур. Центр замыканий такой структуры оказывается атомной булевой алгеброй B^k, где k — мощность множества неразрешимых слагаемых, а B — простая цепь порядка 2. Л. А. Скорняков

6555. Полнота в полуструктурах. Уорд (Completeness in semi-lattices. Ward L. E., Jr), Canad. J. Math., 1957, 9, № 4, 578—582 (англ.)

Полуструктурой называется частично упорядоченное множество, в котором для любых двух элементов существует точная верхняя грань. Полуструктура называется полной, если верхней гранью обладает любое непустое множество (полная полуструктура автоматически оказывается структурой). Доказывается, что полнота полуструктуры эквивалентна каждому из следующих условий: а) для каждого a множество $L_a = \{x; x \leqslant a\}$ компактно в интервальной топологии; б) Для каждого a множество L_a является полной структурой. Для того чтобы полуструктура была компактной в своей интервальной топологии, необходимо и достаточно, чтобы всякое ее изотопное отображение обладало неподвижной точкой. Л. А. Скорняков

6556. Несколько замечаний относительно категорий и подпространств. Исбелл (Some remarks concerning categories and subspaces. Isbell J. R.), Canad. J. Math., 1957, 9, № 4, 563—577 (англ.)

Рассматриваются преимущественно конкретные категории, т. е. категории, объектами которых являются множества, а отображениями — некоторые отображения этих множеств друг в друга. Вводятся понятия гомоморфизма категорий, подкатегории, отношения конгруэнтности на категории и т. д. Доказывается некоторый аналог первой теоремы об изоморфизмах, выясняется невозможность получения хорошего аналога второй теоремы об изоморфизмах. Если X и Y — объекты конкретной категории, то функция $f : X \to Y$ называется функцией вложения, если $X \subseteq Y$ и $f(x) = x$ для всех $x \in X$. Устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы абстрактная категория A, в которой выделено некоторое множество отображений I, допускала такое представление в виде конкретной категории, при котором отображения из I и только они будут функциями вложения. Скелетом категории называется подкатегория, состоящая из объектов, взятых по одному из каждого класса эквивалентных объектов, со всеми отображениями, связывающими взятые объекты. Все скелеты данной категории изоморфны между собой. Две категории с изоморфными скелетами называются коэкстенсивными. Отображение f конкретной категории называется инъекцией, если оно получено умножением функции вложения слева и справа на некоторые эквивалентности. Устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы абстрактная категория, в которой выделено некоторое множество отображений I, была коэкстенсивна конкретной категории, причем так, чтобы множество I переходило при изоморфизме между скелетами в класс всех инъекций. Условиям этой теоремы удовлетворяют, в частности, бикатегории в смысле Маклейна, если в качестве I берется множество всех инъекций данной бикатегории. Устанавливаются, далее, необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять категория для того, чтобы она была бикатегорией, причем инъекциями служили бы все отображения, сократимые слева, а проекциями — все отображения, сократимые справа. Подкатегория D бикатегории C называется регулярной, если из того, что f является инъекцией, а g — проекцией в C и $fg \in D$, следует, что $f, g \in D$. Всякая конкретная категория, являющаяся бикатегорией, может быть вложена в качестве регулярной подкатегории в бикатегорию, обладающую тем свойством,

что всякое ее отображение, сократимое слева и справа, является изоморфизмом (т. е. эквивалентностью).

А. Г. Курош

6557 К. Мемуар об алгебраических уравнениях, где доказывается невозможность разрешения общего уравнения пятой степени. Абель (Mémoire sur les équations algébriques où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré. Abel Niels Henrik. Oslo, «Librarian», 1957, 8 p.) (франц.)

6558 К. Построение и изучение некоторых важных алгебр. Шевалле (The construction and study of certain important algebras. Chevalley Claude. Publs Math. Soc. Japan, 1955, № 1, 64 pp.) (англ.)

Книга, являющаяся записью лекций, прочитанных автором в Токийском университете летом 1954 г., состоит из четырех глав. I. Градуированные алгебры. II. Тензорные алгебры. III. Алгебры Клиффорда. IV. Некоторые применения внешних алгебр. Основная цель — дать внутреннее, инвариантное определение некоторых классических понятий линейной алгебры. В гл. I рассматриваются градуированные алгебры E, в которых индекс градуировки пробегает любую аддитивную группу Γ. Аналогично обычному случаю (когда Γ — группа целых чисел) определяются однородные подалгебры, однородные гомоморфизмы (при этом степенями однородных гомоморфизмов являются элементы группы Γ), градуировки, ассоциированные с данным гомоморфизмом $\Gamma \to \tilde{\Gamma}$, и дифференцирования. Например, дифференцирование $D: E \to E$ некоторой степени $v \in \Gamma$ определяется как однородное отображение $D: E \to E$ степени v, для которого $D(xy) = D(x)\,y + (I^v x)\,Dy$, $xy \in E$, где $I^v x = x$, если v принадлежит некоторой фиксированной подгруппе Γ_+ группы индекса 2, и $I^v x = 2x - x_+$, если $v \notin \Gamma_+$, где x_+ — сумма однородных составляющих элемента x, индексы которых принадлежат подгруппе Γ_+. Описываются некоторые методы построения дифференцирований, и, в частности, доказывается существование дифференцирований свободной алгебры, принимающих на образующих произведениях заданные значения. В гл. II для любого модуля M под коммутативным кольцом A строится тензорная алгебра T модуля M, как свободная (в смысле общей теории алгебраических систем), ассоциативная алгебра, порожденная модулем M. Для однородных составляющих T_h этой алгебры доказывается свойство универсальности по отношению к h-линейным отображениям. С помощью понятия тензорной алгебры определяется тензорное произведение $M \otimes N$ двух A-модулей M и N, как подмодуль тензорной алгебры прямой суммы $M + N$, порожденный элементами вида xy, где $x \in M$, $y \in N$. Доказываются основные свойства тензорного произведения модулей. В заключение определяется тензорное произведение Γ-градуированных алгебр, где Γ — группа второго порядка. В гл. III рассматривается фактор-алгебра тензорной алгебры T по идеалу, порожденному элементами вида $xx - f(x)\,1$, где $f(x)$ — некоторая квадратичная форма, определенная на модуле M. Эта алгебра называется алгеброй Клиффорда модуля M, соответствующей форме f. Для таких алгебр доказывается соответствующая теорема универсальности. Специально отмечается случай, когда форма f тождественно равна нулю; соответствующая алгебра Клиффорда называется внешней алгеброй модуля M. Детально изучается случай, когда модуль M свободен (обладает базой). В заключение, рассматривая группу обратимых элементов алгебры Клиффорда, для которых соответствующие внутренние автоморфизмы переводят модуль M в себя (основное кольцо A предназначается полем), автор дает краткий очерк теории спиноров. В последней главе рассматриваются плюккеровы координаты, экспоненциальное отображение, определители и т. п.

М. М. Постников

6559 Д. Радикалы ассоциативных колец. Андрунакиевич В. А. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

См. также: 6453 К, 6670, 6732, 6880

ТОПОЛОГИЯ

Редакторы *П. С. Александров, А. С. Шварц*

6560. Международный симпозиум по топологии (Symposium internacional de topologia), Rev. Mat., 1957, № 2, 59—64 (исп.)

Отчет о Международном симпозиуме в Мексике по топологии, происходившем в августе 1956 г. Приводится список докладов, сделанных на симпозиуме.

А. С. Шварц

6561. Одна топологическая задача, связанная с вопросами квантовой электродинамики. Боровиков В. А., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 3, 113—118

Рассматриваются схемы (графики), облегчающие некоторые вычисления, связанные с квантовой электродинамикой.

Графиком называется совокупность конечного числа линий двух сортов (электронных и фотонных) и точек (вершин), удовлетворяющая следующим условиям: а) каждая линия может иметь либо оба конца в вершинах, либо может уходить одним концом в бесконечность (тогда она называется свободной); б) в каждой вершине сходится ровно три линии: две электронных и одна фотонная.

Из рассмотрения исключаются несвязные графики, графики, разбивающиеся на две подсхемы, соединенные одной линией, а также графики, не имеющие свободных линий.

Подсхема, не содержащая вершин, из которых исходят свободные линии, и соединенная с остальной частью графика двумя линиями (очевидно, эти линии автоматически одноименные), называется S-подсхемой (энергетическая часть).

Подсхема, не содержащая вершин, из которых исходят свободные линии, и соединенная с остальной частью графика тремя линиями (одной фотонной и двумя электронными), называется V-подсхемой (вершинная часть).

Допускаются следующие упрощения графиков:

1) Исключается из графика S-подсхема, а вершины, из которых исходят ребра α и β, соединяющие S-подсхему с остальной частью графика, соединяются ребром того же вида, что α и β.

2) Исключается V-подсхема и вместо нее вводится новая вершина, из которой выходят те же (того же сорта и к тем же точкам) линии, что и из исключенной V-подсхемы.

Над графиком P производятся первая и вторая операции, пока это возможно. В конце концов получается график Q, не содержащий ни S-подсхем, ни V-подсхем.

Такой график называется эквивалентным неприводимым графиком для графика P.

Из изложенного следует, что для любого графика P существует эквивалентный ему неприводимый график Q. Автор доказывает, что график Q однозначно определяется по графику P. В статье кратко рассказан физический смысл графиков.

Примечание референта. Определения графиков S- и V-подсхем в заметке сформулированы неточно. В реферате приведены исправленные определения. С. С. Рышков

6562. **Одна топологическая задача, связанная с вопросами квантовой электродинамики.** Боровиков (O problemă de topologie legată de problemele electrodinamicii cuantice. Borovikov V. A.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1957, **11**, № 2, 31—37 (рум.)

Перевод с русского (реф. 6561).

6563. **Прямолинейные пределы функции, определенной внутри сферы.** Багемил (Rectilinear limits of a function defined inside a sphere. Bagemihl F.), Michigan Math. J., 1957, **4**, № 2, 147—150 (англ.)

Пусть E — открытый трехмерный шар, T — его граница. Автор показывает, что на E существует однозначная действительная функция f, удовлетворяющая следующему условию: для всякой точки $x \in T$ существует плоскость, проходящая через точку x, не касающаяся T и содержащая $2\,\aleph_0$ прямолинейных отрезков, на каждом из которых функция f постоянна, а на различных отрезках принимает различные значения.

А. С. Пархоменко

6564. **Точки неопределенности функции, непрерывной внутри сферы.** Пиранян (Ambiguous points of a function continuous inside a sphere. Piranian George), Michigan Math. J., 1957, **4**, № 2, 151—152 (англ.)

Пусть f — функция, определенная на открытом множестве G. Точка x границы Γ множества G называется точкой неопределенности функции f, если существует две простых дуги I и J, все точки которых лежат в G, за исключением общей конечной точки этих дуг $x \in \Gamma$, и на которых пределы $\lim_{y \to x,\ y \in I_x} f(y)$ и $\lim_{y \to x,\ y \in J} \times$ $\times f(y)$ существуют и различны.

Автор строит действительную непрерывную функцию, определенную на открытом трехмерном шаре E, для которой каждая точка граничной сферы T является точкой неопределенности. А. С. Пархоменко

6565. **Точки неопределенности отображения, гомеоморфного внутри сферы.** Черч (Ambiguous points of a function homeomorphic inside a sphere. Church P. T.), Michigan Math. J., 1957, **4**, № 2, 155—156 (англ.)

Строится такой гомеоморфизм h открытого трехмерного куба на себя, что каждая точка нижнего основания этого куба является точкой неопределенности гомеоморфизма h. А. С. Пархоменко

6566. **О топологических пространствах, вес которых больше мощности.** Паровиченко И. И., Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 6, 1074—1076

Показано, что мощность множества всех T_5-пространств мощности m равна 2^m, а мощность множества всех T-пространств мощности и веса $\leqslant m$ равна 2^m. Далее строятся следующие примеры:

1) T_5 — пространства, мощности m, веса $> m$ (для произвольной мощности m).

2) $T_5(T_3)$ — пространства регулярной (иррегулярной) мощности, вес в каждой точке которого больше мощности самого пространства.

3) Счетного $T_2(T_5)$ пространства с несчетным весом в каждой (в одной) точке.

4) Счетного связного T_2-пространства с несчетным весом в каждой точке.

Показывается на примере, что различные определения [$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$]-компактности не эквивалентны между собой, если $\mathfrak{a}$ — иррегулярное кардинальное число (доказательство противоположного утверждения, указанное Ю. М. Смирновым (Изв. АН СССР, 1950, **14**, 155) содержит пробел) А. Д. Тайманов

6567. **Размерности фактор-пространств.** Карубэ, Гифу дайгаку когакубу кэнкю хококу, Res. Repts Fac. Engng Gifu Prefect. Univ., 1953, № 3, 50—51 (японск.; рез. англ.)

Доказывается, что если G — конечномерная локально бикомпактная топологическая группа, H — ее замкнутая подгруппа, то $\dim G - \dim H \ll \dim G/H \ll \dim G$. А. Л. Онищик

6568. **О дифференцируемости изометрий.** Палейс (On the differentiability of isometries. Palais Richard S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 4, 805—807 (англ.)

Риманово многообразие естественным образом превращается в метрическое пространство. Показывается, что знание метрики этого метрического пространства позволяет однозначно восстановить дифференцируемую структуру и риманову метрику. А. Л. Онищик

6569. **Группы преобразований с двумя классами орбит.** Борель (Transformation groups with two classes of orbits. Borel Armand), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, **43**, № 11,983—985 (англ.)

Пусть G — связная компактная группа Ли, эффективно действующая на пространстве X. Автор говорит, что орбиты точек $x, y \in X$ принадлежат одному и тому же классу, если стационарные подгруппы этих точек сопряжены в группе G. Намечены доказательства следующих теорем: 1) Если $X = S^n$, а G имеет только один класс орбит и не транзитивна, то G действует без неподвижных точек, $G = U(1)$ или $SU(2)$ к $n+1$ делится соответственно на 2 или 4. 2) Пусть Y — обобщенное компактное ориентируемое n-мерное многообразие, когомологически локально связное и имеющее такие же целочисленные когомологии, как S^n. Если $X \subset Y$ и $Y \setminus X$ состоит из одной точки, а группа G имеет ровно два класса орбит на пространстве X, то один из этих классов состоит из неподвижных точек. 3) Пусть G действует дифференцируемым образом на связном n-мерном дифференцируемом многообразии X и пусть множество F неподвижных точек группы G не пусто и G имеет на $X \setminus F$ один класс орбит. Тогда орбиты в $X \setminus F$ гомеоморфны S^m. Если при этом $m = n - \dim F - 1$, то $G = U$ (1) и действует на $X \setminus F$ без неподвижных точек. А. Л. Онищик

6570. **Пространство подмножеств, обладающее свойством неподвижной точки.** Кейпел, Стротер (A space of subsets having the fixed point property. Capel C. E., Strother W. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 4, 707—708 (англ.)

Через $S(X)$ обозначено пространство всех подмножеств пространства. Доказывается теорема: Если X — ретракт тихоновского куба, то любое отображение пространства $S(X)$ в себя имеет неподвижную точку.

С. С. Рышков

6571. **Теорема о неподвижной точке для произведения упорядоченных пространств.** Коэн (Fixed points in products of ordered spaces. Cohen H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 4, 703—706 (англ.)

Доказывается, что для топологического произведения двух бикомпактных, связных упорядоченных пространств верна теорема о неподвижной точке. (Упорядоченным пространством называется просто упоря-

доченное множество с топологией, определенной системой окрестностей $O = \{x/x_1<x<x_2\}$). С. С. Рышков

6572. Теорема о неподвижной точке. Дайер (A fixed point theorem. Dyer Eldon), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 662—672 (англ.)

Доказывается теорема о неподвижной точке для континуумов специального вида. Континуум, в котором для каждого $\varepsilon>0$ существует такое открытое ε-покрытие $\{D_1, D_2, \ldots D_n\}$, что D_i пересекается с D_j тогда и только тогда, когда $|i-j|\leqslant 1$, называется змеевидным (Bing R. H., Duke Math J., 1951, 18, 653—663).

Примером змеевидного континуума, не являющегося простой дугой, может служить замыкание графика функции $y = \sin(1/x)$ при $0<x\leqslant 1$.

Дано очень простое прямое доказательство того, что для топологического произведения конечного числа змеевидных континуумов верна теорема о неподвижной точке. Кроме того, доказано, что произведение конечного числа змеевидных континуумов является ациклическим квазикомплексом, откуда снова следует, что для него верна теорема о неподвижной точке (Lefschetz S., Algebraic topology, New York, 1942). С. С. Рышков

6573. Топологические свойства локально одно-однозначных отображений. Ваккаро (Proprietà topologiche delle rappresentazioni localmente biunivoche. Vaccaro Michelangelo), Math. Ann., 1957, 133, № 2, 173—184 (итал.)

Строится достаточно простой и наглядный пример непрерывного и взаимно однозначного в окрестности каждой точки отображения двумерной сферы на ациклический (в частности, не разбивающий трехмерного пространства) полиэдр. Это отображение симплициально в некоторой триангуляции сферы. С другой стороны, показывается, что при всяком дифференцируемом отображении класса C^1 n-мерного дифференцируемого многообразия V^n, имеющем матрицу Якоби со всюду максимальным рангом (и, значит, локально гомеоморфном), на кривой полиэдр P^n, лежащий в дифференцируемом многообразии W^m, n-мерная группа Бетти по модулю 2 этого полиэдра P^n нетривиальна; в случае, когда W^m есть $(n+1)$-мерное евклидово пространство, это значит, что P^n разбивает его по крайней мере на две части. М. Ф. Бокштейн

6574. Об одном типе полиэдров. Нагами (On some types of polyhedra. Nagami Keiô), Proc. Japan Acad., 1956, 32, № 4, 245—247 (англ.)

Пусть n — натуральное число, P — абстрактное множество мощности $\geqslant n+1$ («множество вершин»). Автор называет n-полным полиэдром с множеством вершин P и обозначает через $K(n, P)$ комплекс со слабой топологией, образованной всеми m-мерными симплексами ($m\leqslant n$), натянутыми на попарно различные точки множества P. Например, n-мерный симплекс и n-мерная сфера являются полиэдрами типа $K(n, P)$ (в случае, когда P содержит соответственно $n+1$ и $n+2$ точки).

Доказываются теоремы следующего типа. Пусть C — замкнутое подмножество пространства Y, имеющее сколь угодно тесные окрестности G, удовлетворяющие условию $\dim(Y \setminus G)\leqslant n$. Тогда любое непрерывное отображение множества C в полиэдр типа $K(n, P)$ может быть продолжено на все пространство Y. В случае, когда множество P бесконечно, пространство Y предполагается метрическим, если множество P конечно, достаточно предположить нормальность пространства Y. (Автор формулирует это утверждение следующим образом: n-полный полиэдр $K(n, P)$ является пространством типа n-ES для метрических пространств, если множество P бесконечно, и для нормальных пространств, если множество P конечно.) С. С. Рышков

6575. Теоремы о продолжении деформации. Даукер (Homotopy extension theorems. Dowker C. H.), Proc. London Math. Soc., 1956, 6, № 21, 100—116 (англ.)

Обобщается теорема Борсука о продолжении деформации (Гуревич, Волмен. Теория размерности, М. Изд-во ин. лит., 1948, стр. 120). С. С. Рышков

6576. Об отображениях n-мерной сферы в прямую. Ливси (Concerning real valued maps of the n-sphere. Livesay G. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 989—991 (англ.)

Пусть S^n — единичная сфера в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E^{n+1}, $f: S^n \to E^1$ — отображение этой сферы в прямую, P^n — n-мерное проективное пространство, $p: S^n \to P^n$ отображение накрытия. Для каждого числа d обозначим через X_d совокупность таких точек $x \in S^n$, для которых существует точка $y \in S^n$, удовлетворяющая условиям $\rho(x, y) = d$ и $f(x) = f(y)$ (через ρ обозначена метрика в пространстве E^{n+1}). Доказывается, что при $0\leqslant d\leqslant 2$ множество $p(X_d)$ содержит негомологичный нулю $(n-1)$-мерный истинный цикл пространства P^n. А. С. Шварц

6577. О действии конечной группы на $S^n \times S^n$. Коннер (On the action of a finite group on $S^n \times S^n$. Conner P. E.), Ann. Math., 1957, 66, № 3, 586—588 (англ.)

Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. На произведении $S^n \times S^n$ двух n-мерных сфер не может действовать без неподвижных точек группа $Z_m + Z_m + Z_m$ (через Z_m обозначается циклическая группа порядка m).

Теорема 2. Фундаментальная группа дополнительного пространства полигонального простого узла не может содержать абелевой подгруппы ранга больше двух.

Теорема 1 может быть обобщена следующим образом: на произведении k сфер S^n не может действовать без неподвижных точек прямая сумма $(k+1)$-й циклической группы порядка m. Доказательство этого обобщения не приводится. А. С. Шварц

6578. Теорема о накрывающей гомотопии. Кертис (The covering homotopy theorem. Curtis M. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 682—684 (англ.)

Пусть E и B — топологические пространства, $p: E \to B$ — непрерывное отображение. Обозначим через $\widetilde{E}$, снабженное компактно-открытой топологией, пространство непрерывных отображений отрезка $[0; 1]$ в пространство B. Через C обозначим множество пар $(f, e) \in \widetilde{E} \times E$, удовлетворяющих условию $f(0) = p(e)$.

Будем говорить, что для отображения $p: E \to B$ справедлива теорема о накрывающей гомотопии относительно пространства X, если для каждого отображения $f: X \to E$ и каждой деформации Φ_t отображения $\Phi_0 = pf: X \to B$ существует накрывающая деформация F_t, удовлетворяющая условиям $pF_t = \Phi_t$, $F_0 = f$.

Доказывается, что в случае, когда теорема о накрывающей гомотопии справедлива для отображения $p: E \to B$ относительно построенного выше пространства C, то она справедлива также относительно любого топологического пространства.

Из этого предложения и из результатов Хюбша (РЖМат, 1956, 7235) вытекает теорема: Если $p: E \to B$ — локально тривиальное расслоенное пространство и пространство C, построенное для отображения p, паракомпактно, например, если E и B — метрические пространства, то теорема о накрывающей гомотопии

справедлива для отображения $p: E \to B$ относительно любого топологического пространства. С. С. Рышков

6579. О топологической степени. Вейер (On the topological degree. Weier Joseph), Compositio math., 1957, **13**, № 2, 119—127 (англ.)

Пусть M^k — замкнутое ориентируемое k-мерное многообразие, лежащее в евклидовом пространстве. Пара отображений g и $g'M^{n+1}$ в M^n называется нормальной, если множество $B(g,g')$ точек совпадения отображений g и g' состоит из конечного числа попарно непересекающихся топологических окружностей, т. е. границ топологических симплициальных отображений круга. Для каждой такой окружности $A \subset B(g,g')$ определяется степень пары отображений (g,g'). Доказывается, что в случае, когда степень A равна нулю и U — открытое множество, удовлетворяющее условию $U \cap B(g, g') = A$, g можно так продеформировать в отображение f, а g' — в отображение f', что вне U деформация является тождественной и множество точек совпадения f и f' внутри U состоит из одной точки. Р. Л. Фрум-Кетков

6580. Соотношение между степенью отображения и коэффициентами зацепления. Фуллер (A relation between degree and linking numbers. Fuller F. B.), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 258—262 (англ.)

Пусть f и g — такие два отображения n-мерного ориентируемого многообразия M в $(n+1)$-мерное евклидово пространство E^{n+1}, что множества $f(M)$ и $g(M)$ не пересекаются. Векторное поле $f(x) - g(x)/|f(x) - g(x)|$ задает отображение M в S^n. Приводится формула, связывающая степень этого отображения с коэффициентами зацепления образов циклов из M при отображениях f и g. С помощью этой формулы дано доказательство теоремы Лефшеца об алгебраическом числе неподвижных точек при отображении полиэдра в себя. Р. Л. Фрум-Кетков

6581. Гомотопическая классификация векторных полей. Болтянский В. Г., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 1, 13—16

Пусть K^n — симплициальное (или клеточное) разбиение n-мерного многообразия M^n. Два векторных поля на M^n будем называть $(n-1)$-гомотопными, если они, рассматриваемые только на $(n-1)$-одномерном остове K^{n-1}, гомотопны между собой. Тогда $(n-1)$-гомотопические классы векторных полей на M^n находятся во взаимнооднозначном соответствии с элементами $(n-1)$-мерной целочисленной группы когомологий $H^{n-1}(M^n, Z)$. При $n \geqslant 4$ каждый $(n-1)$-гомотопический класс векторных полей распадается ровно на два гомотопических класса. Это дает полную гомотопическую классификацию векторных полей на M^n при $n \geqslant 4$. При $n \leqslant 3$ эта классификация получается из известных результатов. Здесь под векторным полем понимается непрерывное поле ненулевых векторов. Многообразие M^n предполагается имеющим нулевую эйлерову характеристику (только на таких многообразиях, как известно, существуют векторные поля), замкнутым и ориентируемым.

При доказательстве используется теорема автора о втором препятствии для косого произведения (РЖМат, 1956, 8687).

Примечание референта. Основная лемма заметки содержится в результатах У Вэнь-цзюня (Wu Wen-tsun, C. r. Acad. sci., 1950, **230**). А. С. Шварц

6582. Накрывающая гомотопия. Хюбш (Covering homotopy. Huebsch William), Duke Math. J., 1956, **23**, № 2, 281—291 (англ.)

Статья состоит из двух частей. В первой части передоказывается теорема из предыдущей статьи автора (РЖМат, 1956, 7235) с небольшими усилениями. Во второй части доказываются некоторые теоремы, аналогичные «теореме униформизации» Гуревича (РЖМат, 1957, 5420). С. С. Рышков

6583 Д. О функционально-замкнутых пространствах. Кубенский А. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, Л., 1958

См. также: 6387, 6499, 6500, 6507, 6536, 6664

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков*

6584. Об интегрировании, сохраняющем упорядочение. Кристиан (On order-preserving integration. Christian R. R.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **86**, № 2, 463—488 (англ.)

В частично упорядоченном векторном пространстве $\mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X}$ может не быть структурой), полном по Дедекинду (это значит, что каждое направленное по возрастанию (по убыванию), ограниченное сверху (снизу) подмножество имеет в $\mathfrak{X}$ верхнюю (нижнюю) грань), вводится определение сходимости более общее, чем (o)-сходимость направленных множеств (РЖМат, 1955, 5168). С этой целью вводится понятие k-башни $\omega_{\geqslant}$ с базисом B; это — набор k классов Φ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, направленных по возрастанию множеств $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{X}$, причем Φ_1 состоит из одного множества, sup которого равен B, а если $M \in \Phi_n$ (т. е. $M \in \mathfrak{M} \in \Phi_n$) при некотором $n < k$, то существует $\mathfrak{M}' \in \Phi_{n+1}$, для которого $M = \sup \mathfrak{M}'$. Аналогично определяется k-башня $\omega^{\leqslant}$, состоящая из классов множеств, направленных по убыванию.

Направленное множество $\{X_\alpha\}$ $(X_\alpha \in \mathfrak{X}, \alpha \in A, \prec)$ называется k-сходящимся к $X \in \mathfrak{X}$, если существуют k-башни $\omega^{\geqslant}$ и $\omega^{\leqslant}$ с базой X такие, что для любых $\prec$ $M \in \omega^{\leqslant}$ и $N \in \omega^{\geqslant}$ существует $\alpha_0 \in A$ такое, что $M \leqslant X_\alpha \leqslant N$ при $\alpha \succ \alpha_0$. Ясно, что 1-сходимость и есть (o)-сходимость направленных множеств. В полной структуре k-сходимость при некотором k эквивалентна 1-сходимости.

В абстрактном множестве S выделяется поле Σ^* «измеримых» множеств; Σ — идеал в Σ^* (т. е. $e \cap E \in \Sigma$, если $e \in \Sigma$ и $E \in \Sigma^*$). Множества, составляющие Σ, называются интегрируемыми. На Σ задана аддитивная мера $\mu(e) \geqslant 0$ со значениями в $\mathfrak{X}$. С помощью этой меры и общего понятия сходимости в $\mathfrak{X}$ естественным образом определяется сходимость по мере направленного множества вещественных функций, заданных на S. Вещественная функция f на S называется простой, если она принимает лишь конечное число различных значений α_i (не исключаются $\alpha_i = \infty$ или $-\infty$) и $f^{-1}(\alpha_i) \in \Sigma^*$ при всех i. Если же все $f^{-1}(\alpha_i) \in \Sigma$, то функция f называется μ-интегрируемой простой. Пополнение класса простых функций их пределами относительно сходимости по мере составляет класс вполне μ-измеримых функций.

Если $f \geqslant 0$ вполне μ-измерима, то $\int_E f$ ($E \in \Sigma^*$) определяется как $\sup\{\int_E f_\alpha\}$, где $\{f_\alpha\}$ — направленное по возрастанию множество всех интегрируемых простых функций $f_\alpha \leqslant f$. Для функций со значениями любого знака интеграл определяется естественным образом с помощью f^+ и f^-. Изучаются свойства этого интеграла.

Пусть S — нормальное топологическое пространство, Σ — поле, порождаемое совокупностью всех замкнутых множеств из S, $C(S)$ — пространство всех ограниченных непрерывных функций на S. Устанавливается обобщенная теорема Рисса об общей форме линейного (положительного) оператора T из $C(S)$ в $\mathfrak{X}$. Если же $\mathfrak{X}$ — частично упорядоченная алгебра, полная по Дедекинду, то для того чтобы оператор T оказался еще и мультипликативным, необходима и достаточна «мультипликативность» меры: $\mu(E_1 \cap E_2) = \mu(E_1)\mu(E_2)$.

Б. З. Вулих

6585. Об интегрировании по мере. Уэстон (On integration with respect to a measure. Weston J. D.), Math. Z., 1957, 67, № 5, 467—473 (англ.)

Аксиоматически строится абстрактная теория интеграла, охватывающая различные методы построения интеграла Лебега.

Пусть X — абстрактное пространство, в котором на некотором классе множеств, обозначаемом $\mathscr{A}$, задана счетноаддитивная, вполне σ-конечная мера μ (Халмош П., Теория меры, 35 — РЖМат, 1954, 3653 К). Вещественная функция f на X называется измеримой, если для всякого борелева множества B на вещественной прямой $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$. Простой функцией называется всякая линейная комбинация конечного числа характеристических функций χ_E множеств класса $\mathscr{A}$.

Пусть $\mathscr{L}$ — класс измеримых функций, удовлетворяющий условиям: а) $\chi_E \in \mathscr{L}$ для всякого $E \in \mathscr{A}$ с $\mu(E) < \infty$, б) если $f, g \in \mathscr{L}$, а α, β — любые вещественные числа, то $\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}$; в) $f \in \mathscr{L}$ влечет $|f| \in \mathscr{L}$. Существует наименьший класс $\mathscr{L}_0$, обладающий этими свойствами: он состоит из всех простых функций, носителями которых являются множества конечной меры. Каждая измеримая функция представима как предел последовательности функций из $\mathscr{L}_0$,.

Интегралом называется вещественная функция $\int$, заданная на $\mathscr{A} \times \mathscr{L}$ и удовлетворяющая условиям:

1) если $f \in \mathscr{L}$ и $f(x) = c$ на E, причем $\mu(E) < \infty$, то $\int_E f = c\mu(E)$;

2) для каждого $E \in \mathscr{A}$ и любых $f, g \in \mathscr{L}$ $\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$ (α, β — числа);

3) если $f \in \mathscr{L}$, то $\int |f|$ — мера на $\mathscr{A}$.

Из этого определения выводятся простейшие свойства интеграла, связанные с неравенствами, а также его полная аддитивность. На $\mathscr{A} \times \mathscr{L}_0$ существует единственный интеграл; он определяется формулой

$$\int_E f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E \cap E_i), \text{ если } f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}.$$

Мера ν, заданная на том же классе $\mathscr{A}$, называется непрерывной (относительно μ), если $\nu(X) < \infty$ и из $\mu(E) = 0$ следует, что $\nu(E) = 0$. Последовательность функций $\{f_n\} \subset \mathscr{L}$ называется ограниченной (относительно интеграла), если существует такая непрерывная мера ν, что $\int_E |f|_n \leqslant \nu(E)$ для всех n и всех $E \in \mathscr{A}$. Далее определяется класс измеримых функций $\mathscr{L}_1$: $f \in \mathscr{L}_1$, если существуют множество E с $\mu(E) = 0$ и ограниченная последовательность функций $\{f_n\} \subset \mathscr{L}_0$ такие, что $f(x) = \lim f_n(x)$ на $X \setminus E$. На $\mathscr{A} \times \mathscr{L}_1$ определяется интеграл $\bar{\int}_E f = \lim \int_E f_n$ (доказывается существование этого предела и его независимость от выбора ограниченной последовательности $\{f_n\}$). Этот интеграл удовлетворяет всем аксиомам интеграла 1) — 3).

Основной результат: Для того чтобы на $\mathscr{A} \times \mathscr{L}$ существовал интеграл $\int$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}_1$. В этом случае на $\mathscr{A} \times \mathscr{L}$ существует единственный интеграл $\int_E f = \bar{\int}_E f$.

Устанавливаются некоторые теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Автор замечает, что требование полной σ-конечности меры не влечет серьезного уменьшения общности его теории. Б. З. Вулих

6586. Об интегральных операторах. Канторович Л. В., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 2, 3—29

В первой части работы устанавливаются некоторые теоремы об интегральных операторах вида

$$U(P) = \int_{D'} K(P, Q) V(Q)\, dQ. \tag{1}$$

По теореме 2, интегральный оператор (1) является линейным и вполне непрерывным оператором из L^p в L^s, если его ядро K суммируемо со степенью r', где $r = \min(p, s')$, $1/r + 1/r' = 1$, при этом $\|U\|_{L^s} < C\|V\|_{L^p}$. Далее, рассматривается пространство $\mathrm{Lip}\,\beta$ функций, определенных в области D и удовлетворяющих условию Липшица с показателем $0 < \beta \leqslant 1$, в котором норма определяется следующим образом:

$$\|U\|_{\mathrm{Lip}\beta} = \sup_{P; P+\Delta P \in D} \frac{|U(P+\Delta P) - U(P)|}{|\Delta P|^\beta},$$

и доказывается такой результат:

Пусть

$$\left\{\int_{D'} [|\mathrm{grad}_P K(P, Q)|\, R^{1-\beta}(P, Q)]^r\, dQ\right\}^{1/r} \leqslant E,$$

где $R(P, Q)$ — расстояние между P и Q, grad_P обозначает градиент, вычисленный по переменной P, и пусть

$$\left\{\int_{D'} \left[\frac{K(P, Q)}{R^\beta(P, Q)}\right]^r dQ\right\}^{1/r} \leqslant F.$$

Тогда интегральный оператор (1) переводит пространство $L^{r'}$ в $\mathrm{Lip}\beta$, при этом:

$$\|U\|_{\mathrm{Lip}\,\beta} \leqslant [E + (2^\beta + 3^\beta) F]\, \|V\|_{L^{r'}}.$$

В случае ядра

$$K(P, Q) = \frac{B(P, Q)}{R^m(P, Q)}, \tag{2}$$

где $B(P, Q)$ — ограниченная функция точек P и Q, непрерывная при $P \neq Q$, имеет место теорема: Если

$$s < kp/[n - (n-m)p], \quad k > n - (n-m)p,$$

то интегральный оператор (1) с ядром вида (2) представляет линейную, вполне непрерывную операцию из пространства $L^p_{D'}$ в L^s_D, где D' — n-мерная область евклидова пространства, а D — k-мерное многообразие в нем. При этом, если это многообразие непрерывно меняется в зависимости от параметра τ, в частности, если мы рассмотрим его трансляцию на ΔP, то $U(P)$ представляет сильно непрерывную в L^s_D функцию сдвига, т. е.

$$\lim_{|\Delta P| \to 0} \left[\int_D |U(P+\Delta P) - U(P)|^s\, dP\right]^{1/s} = 0.$$

Вторая часть работы посвящена связи общей теории интегральных операторов с теоремами вложения. В частности, доказывается неравенство С. Л. Соболева: Если $U(P)$ — непрерывно дифференцируемая функция в выпуклой области D и $s < np/(n-p)$, то справедливо неравенство

$$\|U - \bar{U}\|_{L_D^s} \leqslant A \|\operatorname{grad}\|_{L_D^p},$$

где

$$\bar{U} = \frac{1}{|D|}\int_D U(P)\,dP, \quad A = \text{const}.$$

Для функций, принадлежащих пространству $\widetilde{W}_p^{(l)}$ функций, l раз непрерывно дифференцируемых с нормой:

$$\|U\|_{\widetilde{W}_p^{(l)}} = \left|\frac{1}{|D|}\int U dP\right| + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|D|}\left|\int_D \frac{\partial U}{\partial x_i}\,dP\right| + \ldots$$
$$\ldots + \sum_{i_1\ldots i_{l-1}}\left|\frac{1}{|D|}\int_D \frac{\partial^{l-1}U}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{l-1}}}\,dP\right| +$$
$$+ \left\{\int_D\left[\sum_{i_1,\ldots i_l}\left(\frac{\partial^l u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_l}}\right)^2\right]^{p/2} dP\right\}^{1/p},$$

доказана следующая теорема: Оператор вложения из пространства $\widetilde{W}_p^{(l)}(D')$ в пространство L_D^s суммируемых функций, определенных на k-мерной поверхности D при условиях

$$s < kp/(n-lp), \quad k > n - lp,$$

линеен и вполне непрерывен.

Если $n < lp$, то линеен и вполне непрерывен оператор вложения из $\widetilde{W}_p^{(l)}(D')$ в $C(D)$.

В заключение доказываются полнота и сепарабельность пространств $W_p^{(l)}$, где производные понимаются в обобщенном смысле. Н. И. Мозжерова

6587. Замечания о римановых суммах. Цутикура (Remarques sur les sommes riemanniennes. Tsuchikura Tamotsu), J. Math., 1953, 1, № 2-3, 155—160 (франц.)

Пусть $f(x)$—действительная функция с периодом 1 и $F_n(x, f)$ — ее римановы суммы, т. е.

$$F_n(x) = F_n(x, f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x + k/n) \quad (n = 1,2,..).$$

Теорема 1. Пусть $f(x) \in L^r$ $(r \geqslant 1)$; если

$$\Delta f = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

и выполнено одно из двух условий:

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2}\int_0^1 |\Delta f|^r dx < \infty, \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^{1+1/r}}\left(\int_0^1 |\Delta f|^r dx\right)^{1/r} < \infty,$$

то последовательность $\{F_n(x, f)\}$ стремится почти всюду к интегралу $\int_0^1 f(t)\,dt$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. В тех же обозначениях, как в теореме 1, если

$$\int_0^1 \frac{dt}{t}\int_0^1 |\Delta f|^r dx < \infty,$$

то $\{F_n(x, f)\}$ суммируется (C, α) к $\int_0^1 f(t)\,dt$ почти всюду при любом $\alpha > 0$; если $\{n_k\}$ — любая лакунарная последовательность, то $\{F_{n_k}(x)\}$ сходится к $\int_0^1 f(t)\,dt$ почти всюду.

Следствием этой теоремы является один результат Марцинкевича и Салема о римановых суммах (Marcinkiewicz J., Salem R., Compositio math., 1940, 7, 376—389).

Теорема 3. Существует неизмеримая функция, у которой римановы суммы сходятся к нулю в каждой точке. Н. К. Бари

6588. Об определении функции по ее производным числам. Сунье-р-и-Балагер (Sur la détermination d'une fonction par ses nombres dérivés. Sunyeri Balaguer Ferran), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 20, 1690—1692 (франц.)

Статья касается следующей задачи:

Пусть в каждой точке множества $E \subset (a, b)$ дано конечное значение одного из производных чисел некоторой непрерывной функции $f(x)$. Какова структура множества E, для того чтобы функция $f(x)$ была определена с точностью до постоянной?

Функция $f(x)$ называется полунепрерывной сверху (снизу) справа в точке x_0, если для $\varepsilon > 0$ существует такое число $\eta > 0$, что из неравенств $x_0 \leqslant x \leqslant \eta$ вытекает неравенство $f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$ $(f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon)$. Аналогично определяется полунепрерывность сверху (снизу) слева в точке x_0. Множество $A \subset (a, b)$ называется вполне несовершенным, если оно не содержит совершенного подмножества, за исключением пустого.

Из доказанных теорем отметим следующую: Пусть функция $g(x)$ полунепрерывна снизу слева и полунепрерывна сверху справа в каждой точке $x \in (a, b)$ и пусть функция $h(x)$ полунепрерывна сверху слева и полунепрерывна снизу справа в каждой точке $x \in (a, b)$. Если одно из четырех производных чисел функции $g(x)$ всегда не больше соответствующего производного числа функции $h(x)$, и в случае равенства производные числа конечны, кроме, быть может, вполне несовершенного множества A, то разность $g(x) - h(x)$ будет невозрастающей функцией на (a, b).

А. Г. Джваршейшвили

6589. О функциях, локально монотонных в обобщенном смысле. Часар (Sur les fonctions localement monotones au sens généralisé. Császár Ákos), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, 6, № 3-4, 451—461 (франц.; рез. русск.)

Пусть R —числовая прямая; $\mathfrak{N}$ —семейство множеств, состоящих из точек R, удовлетворяющее условиям: 1) если $A \in \mathfrak{N}$, $B \subset A$, то $B \in \mathfrak{N}$; 2) если $A_i \in \mathfrak{N}$, то $\sum_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{N}$.

Обобщается ряд элементарных понятий и свойств, относящихся к конечным действительным функциям $f(x)$, определенным на R, как, например, возрастание или убывание, экстремум, предел, непрерывность и другие. Обобщение состоит в том, что соответствующее условие может не выполняться в точках, образующих множество из семейства $\mathfrak{N}$.

Функция $f(x)$ локально $\mathfrak{N}$-монотонна в точке x_0, если для некоторого $\delta > 0$

$$E_x\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0,\ 0 < |x - x_0| < \delta\right] \in \mathfrak{N}$$

(условие возрастания),
или же

$$E_x\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,\ 0 < |x - x_0| < \delta\right] \in \mathfrak{N}$$

(условие убывания).

Функция $f(x)$ обладает свойством $\mathfrak{N}$-непрерывности в точке x_0, если

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \mathfrak{N} f(x),$$

где предел понимается в указанном выше обобщенном смысле.

Пусть U — множество всех точек x_0, для которых интервалы $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$ не принадлежат $\mathfrak{N}$ ни при каком $\delta > 0$.

Главные результаты работы состоят в следующем:

Пусть функция $f(x)$ локально $\mathfrak{N}$-монотонна во всех точках множества $S \subset U$. Тогда 1) $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$, где $S_n \subset S_{n+1}$ и $f(x)$ кусочно монотонна на каждом из множеств S_n (в классическом смысле); 2) функция $f(x)$ принадлежит на множестве S классу Бэра не выше второго; 3) функция $f(x)$ обладает свойством $\mathfrak{N}$-непрерывности во всех точках S, исключая, может быть, счетное множество точек.

Пусть функция $f(x)$ локально $\mathfrak{N}$-монотонна во всех точках множества $S \subset U$, причем S измеримо. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество S_ε, на котором функция кусочно-монотонна (в классическом смысле), причем $\operatorname{mes}(S - S_\varepsilon) < \varepsilon$.

В. М. Дубровский

6590. Элементарное доказательство оценки области существования обратного преобразования и неявной функции. Кухажевский (Elementarny dowód na oszacowanie obszaru istnienł transformacji odwrotnej i funkcji uwikłanej. Kucharzewski Mieczysiaw), Zesz. Nauk. Uniw. Jagiell., 1957, № 14, 25—39 (польск.; рез. русск., англ.)

Оценки, указанные в заглавии работы, получены с помощью понятий верхнего и нижнего удлинений преобразования, введенных Важевским (Ważewski T., Ann. Soc. polon math., 1947, 20, 81—120). Много опечаток.

С. Ф. Пашковский

6591. Заметки по анализу Фурье. XL. Идзуми (Notes on Fourier analysis. (XL). Izumi Shinichi), J. Math., 1953, 1, № 2-3, 80—86 (англ.)

Работа состоит из трех частей. В первой части рассматриваются два класса последовательностей $\{f_n(x)\}$ функций, определенных на $[0,1]$.

Класс A. Если $\{c_n\}$ — последовательность действительных чисел таких, что $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leqslant 1$, то

$$\int_0^1 \left(\sum_1^{\infty} c_i f_i(x)\right)^2 dx \leqslant 1.$$

Класс B. Для $M = 1, 2, \ldots$

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=M+1}^{M+N} f_n(x)\right)^2 dx = O(N).$$

Последовательности класса A называются квазиортогональными. Легко видеть, что класс A содержится в классе B. Автор показывает, что классы A и B не совпадают. Во второй части доказывается следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_n(t)\}$ — последовательность функций, определенных на $(0,1)$, такая, что для любого $M = 1,2, \ldots$ имеет место

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{k=M+1}^{M+N} \varphi_k(t)\, \varphi_k(u)\right)^2 dt\, du = O(N).$$

Тогда

$$L_n(t) = \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\, \varphi_k(u)\right| du = O\left(\sqrt{n \lg^{1+\varepsilon} n}\right) \quad (1)$$

почти всюду для любого $\varepsilon > 0$.

Соотношение (1) было установлено Качмажем и Штейнхаусом в том случае, когда $\{\varphi_k(t)\}$ есть ортонормированная система.

Из части III приведем теорему:

Теорема 3. Пусть $\{f_k(x)\}$ есть последовательность функций, интегрируемых с квадратом на $[0,1]$, такая, что

$$\left(\int_0^1 \left| f_k(x) - f_k(x+u)\right|^2 dx\right)^{1/2} = O(\varphi(u)),$$

где O не зависит от индекса k и $\varphi(t) \downarrow 0$ при $t \downarrow 0$. Тогда, если $\{n_k\}$ — последовательность целых чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\varphi(n_k^{-1})]^2 < \infty,$$

то почти всюду

$$\lim_{k \to \infty} \left(F_{n_k, k}(x) - \int_0^1 f_k(x)\, dx\right) = 0,$$

где

$$F_{n,k}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_k\left(x + \frac{i}{n}\right).$$

А. А. Талалян

6592. Об ортогональных функциях. I. Тандори (Über die orthogonalen Funktionen. I. Tandori Károly), Acta scient. math., 1957, 18, № 1-2, 57—130 (нем.)

Доказаны теоремы:

I. Пусть $\{a_n\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n = \infty. \quad (1)$$

Тогда можно определить на любом сегменте $[a,b]$ ортонормированную систему функций $\{\Phi_n(x)\}$, для которой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$$

расходится всюду на $[a,b]$.

Если принять во внимание теорему Радемахера — Меньшова, то из теоремы I следует, что для невозрастающей последовательности положительных чисел $\{a_n\}$ условие $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty$ является необходимым и достаточным для того, чтобы ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ сходился почти всюду для любой ортонормированной системы функций $\{\varphi_n(x)\}$.

II. Пусть $\{a_n\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию (1). Тогда на любом сегменте $[a,b]$ можно определить такую ортонормированную систему функций $\{\Phi_n(x)\}$, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \Phi_n(x)$ расходится всюду на $[a,b]$ для произвольной последовательности коэффициентов $\{a_n^*\}$, удовлетворяющих условию

$$a_n^* \geqslant \eta a_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ \eta > 0.)$$

III. Пусть $w(n)$ — неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $w(n) = o(\log n)$. Тогда можно определить такую последовательность коэффициентов $\{a_n\} \in l^2$ и такую ортонормированную систему функций $\{\Phi_n(x)\}$ на $[a,b]$, что

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{1}{w(N)} \left|\sum_{n=0}^{N} a_n \Phi_n(x)\right| = \infty$$

всюду на $[a,b]$.

IV. Пусть $\{l_n\}$ — неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{n=2}^{\infty} l_n^{-2}\log^2 n=\infty$. Тогда на произвольном сегменте $[a, b]$ можно определить такую ортонормированную систему функций $\{\Phi_n(x)\}$, что

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\ \frac{1}{l_N}\left|\sum_{n=0}^{N}\Phi_n(x)\right|=\infty$$

всюду на $[a, b]$.

В теоремах I — IV функции системы $\{\Phi_n(x)\}$ можно считать ограниченными в своей совокупности на $[a, b]$.

V. Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{-2}=\infty$.

Тогда на любом сегменте $[a, b]$ можно определить такую ортонормированную систему функций $\{\Phi_n(x)\}$, что

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\ \frac{1}{\lambda_N}\left|\Phi_N(x)\right|=\infty$$

всюду на $[a, b]$.

VI. Пусть $\{w(n)\}$ — неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n\log n)\,w^2(n)}=\infty.$$

Тогда на любом сегменте $[a, b]$ можно определить такую ортонормированную систему функций $\{\rho_n(x)\}$, что

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\ \frac{1}{\lambda_N}\int_a^b\left|\sum_{n=0}^{N}\rho_n(x)\,\rho_n(t)\right|dt=\infty$$

всюду на $[a, b]$, где

$$\lambda_N=\sqrt{N\log N}\,w(N).$$

VII. Пусть $\{a_n\}\in l^2$ и пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система функций на некотором сегменте $[a, b]$. Положим

$$\sigma_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{A_n^{(\alpha)}}\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{(\alpha)}a_\nu\varphi_\nu(x),\qquad(2)$$

где

$$A_m^{(\alpha)}=\binom{m+\alpha}{m}\ (\alpha\neq-1,-2,\ldots).$$

Тогда для любого $\alpha>0$

$$\sigma_N^{(\alpha)}(x)=o(\log\log N)$$

почти всюду на $[a, b]$.

VIII. Пусть $\{w(n)\}$ — неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $w(n)=o(\log\log n)$. Тогда можно определить такую последовательность чисел $\{a_n\}\in l^2$ и такую ортонормированную систему функций $\{\Phi_n(x)\}$, ограниченных в своей совокупности на основном сегменте $[a, b]$, что

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\ \frac{1}{w(N)}\left|\frac{1}{A_N^{(\alpha)}}\sum_{\nu=0}^{N}A_{N-\nu}^{(\alpha)}a_\nu\Phi_\nu(x)\right|=\infty$$

всюду на $[a, b]$.

IX. Пусть $\{\lambda_n\}$ — неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{-2}<\infty$.

Тогда для любого $\alpha>0$ справедливо равенство $\sigma_N^{(\alpha)}(x)=o(\lambda_N)$ почти всюду на $[a, b]$, где $\sigma_N^{(\alpha)}(x)$ определяется из равенства (2) и $\{\varphi_n(x)\}$ — произвольная ортонормированная система функций на $[a, b]$.

X. Пусть $\{\lambda_n\}$ — неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{-2}=\infty$.

Тогда на любом сегменте $[a, b]$ можно определить такую ортонормированную систему функций $\{\Phi_n(x)\}$, что для произвольного $\alpha>0$ справедливо равенство

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\ \frac{1}{\lambda_N}\left|\frac{1}{A_N^{(\alpha)}}\sum_{\nu=0}^{N}A_{N-\nu}^{(\alpha)}\Phi_\nu(x)\right|=\infty$$

всюду на $[a, b]$.

XI. Пусть $\{w(n)\}$ — произвольная неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n\log n)w^2(n)}=\infty.$$

Тогда на любом сегменте $[a, b]$ можно определить такую ортонормированную систему функций $\{\rho_n(x)\}$, что справедливо равенство

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\ \frac{1}{\sqrt{N\log N}\,w(N)}\times$$
$$\times\int_a^b\left|\frac{1}{A_N^{(\alpha)}}\sum_{\nu=0}^{N}A_{N-\nu}^{(\alpha)}\rho_\nu(x)\rho_\nu(t)\right|dt=\infty$$

для произвольного $\alpha>0$ и для всякого $x\in[a,b]$. Кроме того, для любого $\alpha>0$ можно определить такую ортонормированную систему функций $\{r_n^{(\alpha)}(x)\}$, ограниченных в своей совокупности на $[a, b]$, что

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\ \frac{1}{\sqrt{N}}\int_a^b\left|\frac{1}{A_N^{(\alpha)}}\sum_{\nu=0}^{N}A_{N-\nu}^{(\alpha)}r_\nu^{(\alpha)}(x)r_\nu^{(\alpha)}(t)\right|dt>\delta$$

всюду на $[a, b]$, где $\delta>0$ не зависит от x.

Д. Е. Меньшов

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

6593. Конечные множества. Рибейру Албукерке (Finite sets. Ribeiro Albuquerque José), Gaz. mat., Lisboa, 1955, **15**, № 60-61, 24—28 (порт.)

Рассматриваются конечные и бесконечные множества; определение бесконечного множества, данное автором, является видоизменением (эквивалентным) определения Дедекинда. S. Ginsburg

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 352.

6594. Замечание к теории регрессивных функций. Фодор (Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen. Fodor G.), Acta scient. math., 1956, **17**, № 3-4, 139—142 (нем.)

Если Λ — порядковое число второго рода, то $W(\Lambda)$ обозначает множество всех порядковых чисел ξ, $\xi<\Lambda$. Пусть M, N — множества в $W(\Lambda)$, не имеющие наибольших элементов. Множества M, N называются дружными (zusammengehörig), если для каждого элемента одного множества найдется превосходящий его элемент другого множества.

Предельное число μ конфинально предельному числу γ, если μ есть предел возрастающей последовательности типа γ.

Множество $M\subseteq W(\Lambda)$ называется замкнутым в $W(\Lambda)$, если оно содержит предел всякой фундамен-

тальной последовательности чисел из M, коль скоро этот предел $< \Lambda$. Множество, замкнутое в $W(\Lambda)$ и дружное с $W(\Lambda)$, называется связкой (Band) множества $W(\Lambda)$.

Множество $M \subset W(\Lambda)$ называется стационарным, если $W(\Lambda) \setminus M$ не содержит никакой связки множества $W(\Lambda)$. Трансфинитная функция $\varphi(\xi)$, определенная на $M \subset W(\Lambda)$, называется регрессивной, если $\varphi(\xi) < \xi$ для всех $\xi \in M$ при $\xi \geqslant 1$ (при $0 \in M$, $\varphi(0) = 0$).

Теорема 1. Пусть λ — предельное число, неконфинальное с ω, и $M \subset W(\lambda)$. Если M — стационарное множество, то для любой регрессивной функции f, определенной на M, существуют стационарное множество $N \subset M$ и число $\beta \leqslant \lambda$ такие, что $f(\alpha) \leqslant \beta$ при $\alpha \in N$.

Теорема 2. Пусть λ — регулярное предельное число $> \omega$, M — стационарное множество, $M \subset W(\lambda)$. Тогда для любой регрессивной функции, определенной на M, найдется стационарное множество $N \subset M$, на котором функция постоянна. А. Д. Тайманов

6595. О теореме Мало относительно антиоднородных множеств. Гилман (On a theorem of Mahlo concerning anti-homogeneous sets. Gillman Leonard), Michigan Math. J., 1955—1956, 3, № 2, 173—177 (англ.)

Линейно упорядоченное множество называется антиоднородным, если никакие два его элемента не имеют одинакового характера. Характер элементов определяется следующим образом. Рассматриваются упорядоченное множество A всех элементов, предшествующих данному элементу x, и упорядоченное множество B всех элементов, следующих за элементом x. Если множество A является непустым и не имеет последнего элемента, а множество B также является непустым и не имеет первого элемента, то множество A конфинально единственному регулярному начальному порядковому числу, например ω_α, и множество, инверсное множеству B, также конфинально единственному регулярному начальному порядковому числу, например ω_β. В этом случае говорят, что элемент x имеет характер $c_{\alpha\beta}$.

В реферируемой статье рассматриваются теоремы, связанные с проблемой существования непрерывных антиоднородных множеств. Здесь описывается результат Мало, который показывает, что непрерывные множества, даже удовлетворяющие значительно более слабым условиям, чем антиоднородность, должны иметь фантастически большую мощность, и выводится ряд других необходимых условий.

Как известно, регулярные предельные кардинальные числа $\aleph_\lambda > \aleph_0$ и соответствующие начальные порядковые числа ω_λ называются недостижимыми; говорят также, что они имеют «эксорбитантную» мощность. Мало ввел понятие p-чисел; недостижимые числа $\aleph_\lambda$ и ω_λ называются p-числами, если каждая возрастающая последовательность, пределом которой является ω_λ, имеет сегмент с недостижимым пределом. p-числа огромны даже в сравнении с недостижимыми числами.

Теорема 1 и следствия из нее, включающие результаты Мало, показывают, что при выполнении некоторого гораздо более слабого, чем антиоднородность, условия, мощность непрерывного множества E не меньше, чем первое p-число. (Это более слабое условие состоит в том, что множество S_σ нигде не плотно в E; здесь через S_π обозначается множество всех элементов, имеющих характер $c_{\pi\pi}$, а σ — наименьшее из тех τ, для которых $S(\tau) = \bigcup_{\pi \leqslant \tau} S_\pi$ не является нигде не плотным в E.)

Автором получен ряд результатов относительно мощности множеств, удовлетворяющих некоторым другим условиям, также более слабым, чем антиоднородность. При этом рассматриваются, в основном, мощностно-однородные множества. Вводится понятие полусильно недостижимых p-чисел и доказывается, что при выполнении некоторых условий, более слабых, чем антиоднородность, мощностно-однородное непрерывное множество E имеет мощность, являющуюся полусильно недостижимым p-числом.

Вопрос о том, существуют ли среди непрерывных множеств указанной мощности антиоднородные или хотя бы удовлетворяющие упомянутым более слабым условиям, остается открытым. Р. Ю. Мацкина

6596. Об отношениях циклического порядка. Сверчковский (On cyclic ordering relations. Świerczkowski S.), Bull. Acad. polon. sci., 1956, Cl. 3, 4, № 9, 585—586 (англ.)

О реляциях циклического упорядочения. Сверчковский С., Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, 4, № 9, 575—576

Трехчленное отношение $[x, y, z]$, определенное для целых чисел, удовлетворяющее условиям: 1) когда x, y, z различны, то имеет место точно одно из двух отношений $[x, y, z]$ или $[x, z, y]$; 2) если $[x, y, z]$, то $[z, x, y]$; 3) если $[x, y, z]$ и $[z, u, x]$, то $[u, y, z]$; 4) если $[x, y, z]$, то $[x + k, y + k, z + k]$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, автор называет циклическим порядком; отношение со свойствами 1)—4), определенное только лишь для $x, y, z \in N = \{0, 1, \ldots, n\}$, — частичным циклическим порядком; оно обозначается через $[x, y, z]_N$.

В заметке сформулированы следующие теоремы:

1) Всякое отношение $[x, y, z]_N$ можно продолжить до $[x, y, z]$.

2) Пусть ξ — иррациональное число. Отношение между тройками $x, y, z \in N$, обозначающее, что при обходе окружности $e^{i\varphi} = 1$ в направлении возрастания φ точки $e^{i2\pi\xi x}$, $e^{i2\pi\xi y}$, $e^{i2\pi\xi z}$ будут встречаться в приведенном здесь порядке, есть, очевидно, частичный циклический порядок и наоборот, всякий частичный циклический порядок $[x, y, z]_N$ равносилен вышеописанному отношению (иначе говоря, реализуем таким отношением) при соответствующем ξ.

3) Дуги, на которые окружность $e^{i\varphi} = 1$ разделена точками $e^{i2\pi\xi x}$, $x \in N$, при данных ξ и N, имеют самое большее три различных длины. H. Fast

6597. Разделительное исчисление в теории множеств. Эрдёш, Радо (A partition calculus in set theory. Erdös P., Rado R.), Bull. Amer. Math. Soc., 1956, 62, № 5, 427—489 (англ.)

Подробное изложение результатов, сообщенных ранее Радо (РЖМат, 1957, 2185). Рамзи было доказано (Ramsey F. P., Proc. London Math. Soc., 1930, 30, 264—286), что если множество всех пар натуральных чисел распределить произвольно по двум классам, то найдется такое бесконечное множество натуральных чисел, что пары, составленные из чисел этого множества, входят в один и тот же класс. В реферируемой работе исследуются обобщения и аналоги этой теоремы. Исследование идет вокруг некоторого отношения между кардинальными числами или порядковыми типами, называемого авторами разделительным отношением.

Для каждой конечной или трансфинитной последовательности кардинальных чисел r, a, b_0, $b_1, \ldots, b_\lambda, \ldots$, $\lambda < k$, где r конечно, разделительное отношение $a \to (b_0, b_1, \ldots)^r_k$ определяется так: оно имеет место тогда и только тогда, когда при любом представлении множества $[S]^r$ всех подмножеств, содержащих по r элементов, любого множества S мощности a в виде суммы

$\Sigma_{\lambda<k}K_\lambda$ классов K_λ найдется такое $B\subset S$, что мощность его равна некоторому b_ν, $\nu<k$ и $[B]^r\subset k_\nu$. Отрицание разделительного отношения $a\to(b_0, b_1,\ldots)^r_k$ записывается так: $a\not\to(b_0, b_1, \ldots)^r_k$. Аналогично определяется разделительное отношение $\alpha\to(\beta_0, \beta_1, \ldots)^r_k$ между порядковыми типами. Из разделительных отношений, установленных авторами, укажем на следующие.

1. Если $n<\omega_0$ и $\alpha<\omega_0 2$, то $\omega_0 n\to(n,\alpha)^2_2$ и $\omega_0 n+(n+1, \omega_0+1)^2_2$.

2. Пусть $m\geqslant 2$, $0<n<\omega_0$ и $l=(1+3^{2m+n-5})/2$. Тогда $\omega_0 l\to(m, \omega_0 n)^2_2$ и $\gamma\not\to(m, \omega_0 n)^2_2$, если $\gamma<\omega_0 l$

3. Пусть φ есть порядковый тип несчетного упорядоченного множества, не содержащего подмножества типа ω_1 или ω_1^*. Тогда, если $\alpha<\omega_0 2$, $\beta<\omega_0^2$ и $\gamma<\omega_1$, то $\varphi\to(\alpha,\alpha,\alpha)^2_3$, $\varphi\to(\alpha,\beta)^2_2$, $\varphi\to(\omega_0,\gamma)^*_2$, $\varphi\to(4,\alpha)^3_2$.

4. Если $\alpha<\omega_0 2$, то $\omega_1\to(\alpha, \alpha)^2_2$.

5. Если $l\to(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)^r_k$ и $|m|>\Sigma_{\lambda<l}|k||\lambda|^r$, где $|m|$ обозначает мощность порядкового типа m, то

$$m\to(\alpha_0+1, \alpha_1+1, \ldots)^{r+1}_k .$$

Если $r>0$, $\omega_n\to(\alpha_0,\alpha_1, \ldots)^r_k$ и $2^{\aleph_\nu}\leqslant\aleph_n$, $\nu<n$, то $\omega_{n+1}\to(\alpha_0+1, \alpha_1+1, \ldots)^{r+1}_R$.

6. Если $r<s\leqslant\beta_0$, $\alpha\to(\beta_0, \beta_0, \beta_0, \ldots)^r_k$ и $\beta_1\to(s, s, s, \ldots)^r_k$, то $\alpha\to(\beta_0, \beta_1)^s_2$.

Вводится далее понятие канонического разделительного отношения $\alpha\to*(\beta)^r$, имеющего следующий смысл. Пусть S есть упорядоченное множество и

$$[S]^r=\sum_{\lambda<k}K_\lambda,\ K_\nu\cdot K_\mu=0. \qquad (1)$$

Множества $X\in[S]^r$ и $Y\in[S]^r$ называются Δ-эквивалентными, если они входят в один и тот же класс K_λ. Представление (1) и определяемая им Δ-эквивалентность называются каноническими, если существует система чисел $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r-1})$, $\varepsilon_\nu=0,1$, такая, что два подмножества $X=\{x_0<x_1<\ldots<x_{r-1}\}$ и $Y=\{y_0<y<\ldots<y_{r-1}\}$ множества S Δ-эквивалентны тогда и только тогда, когда $x_\nu=y_\nu$ как только $\varepsilon_\nu=1$. Отношение $\alpha\to*(\beta)^r$ имеет место тогда и только тогда, когда для любого множества S типа α и представления вида (1) существует такое $B\subset S$ типа β, что Δ-эквивалентность, определяемая представлением (1) между элементами множества $[B]^r$, является канонической.

Наконец, разделительное отношение $a\to(b_0,b_1, \ldots)^r_k$ обобщается так. Обозначим через $[S_0, S_1, \ldots, S_{t-1}]^{r_0,r_1,\ldots,r_{t-1}}$ множество всех таких систем $(X_0, X_1, \ldots, X_{t-1})$, что $X_\lambda\in[S_\lambda]^{r_\lambda}$, $\lambda<t$. Отношение

$$\begin{vmatrix} a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{t-1}\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix} b_{00} & b_{01}\ldots\\ b_{10} & b_{11}\ldots\\ \vdots & \vdots\\ b_{t-1,0} & b_{t-1,1}\ldots\end{vmatrix}^{r_0,r_1,\ldots,r_{t-1}}$$

имеет место по определению, тогда и только тогда, когда для любого представления $[S_0, S_1, \ldots, S_{t-1}]^{r_0,r_1,\ldots,r_{t-1}}=\Sigma_{\lambda<k}K_\lambda$, где S_λ имеет мощность a_λ, существуют для каждого $\lambda<t$ $B_\lambda\subset S_\lambda$ и $\nu<k$ такие, что мощность множества B_λ равна $b_{\lambda\nu}$ и $[B_0, B_1,\ldots, B_{t-1}]^{r_0,r_1,\ldots,r_{t-1}}\subset K_\nu$.

Из нерешенных вопросов авторы указывают на следующий: верно или нет разделительное отношение $\lambda\to(\omega_0 2,\omega_0 2)^2_2$, где λ есть порядковый тип линейного континуума. Б. С. Содномов

6598. **Прямое разложение разбиений. Радо** (Direct decomposition of partitions. Rado R.), J. London Math. Soc., 1954, 29, part 1, № 113, 71-83 (англ.)

Пусть $A=B_1\times B_2\times\ldots\times B_l$ — декартово произведение данных множеств. Рассмотрим разбиение Δ множества A на непересекающиеся части $A=\Sigma A_\rho$, $\rho\in R$. Исследуется вопрос о существовании «больших» подмножеств $B'_\lambda\subset B_\lambda$, $\lambda=1,2,\ldots,l$ таких, что ограничение Δ в $A'=B'_1\times B'_2\times\ldots\times B'_l$, т. е. разбиение $A'=\Sigma A_\rho A'$, может быть представлено как прямое произведение разбиений Δ_λ множеств B'_λ. Последнее означает, что два элемента из A' принадлежат к одной части $A_\rho A'$ тогда и только тогда, когда все их составляющие принадлежат к одним и тем же частям в разбиениях Δ_λ множеств B'_λ.

В 1-ой теореме доказывается, что если B_1 бесконечно, а B_λ, $2\leqslant\lambda\leqslant l$ конечны и достаточно велики, то всегда найдутся бесконечное B'_1 и сколь угодно большие B'_λ, $2\leqslant\lambda\leqslant l$.

На примере показывается, что если при $l\geqslant 2$ все B_λ бесконечные, то не всегда можно выбрать B'_λ так, чтобы два из них были бесконечными, а остальные не пустыми.

В теореме 2 устанавливается, при каких ограничениях можно говорить о представлении разбиения Δ в виде произведения разбиений Δ_λ, если потребовать, чтобы все множества B'_λ были бесконечными. В частности из этой теоремы при $l=2$ следует, что любая бесконечная матрица, элементы которой равны 0 или 1, содержит в себе одну из следующих четырех бесконечных матриц

$$\begin{pmatrix}0000\ldots\\ 0000\ldots\\ 0000\ldots\\ 0000\ldots\\ \ldots\ldots\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0111\ldots\\ 0011\ldots\\ 0001\ldots\\ 0000\ldots\\ \ldots\ldots\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1000\ldots\\ 1100\ldots\\ 1110\ldots\\ 1111\ldots\\ \ldots\ldots\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1111\ldots\\ 1111\ldots\\ 1111\ldots\\ 1111\ldots\\ \ldots\ldots\end{pmatrix}.$$

Теорема 3 является финитным аналогом теоремы 2 и применяется при доказательстве теоремы 1.

В работе используются результаты, полученные в статьях Рамзи (Ramsey F. P., Proc. London Math. Soc., 1930, **30**, 264—286) и Эрдёша и Радо (Erdös P., Rado R., J. London Math. Soc., 1950, 25, 240—255; Proc. London Math. Soc., 1952, 2, 417—439). А. А. Киселев

6599. **Некоторые результаты и проблемы, касающиеся конгруэнтности точечных множеств. Серпинский** (Quelques résultats et problèmes concernant la congruence des ensembles de points. Sierpinski W.), Matematiche, Catania, 1955, **10**, 71—79 (франц.)

Популярная лекция.

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 6, 592

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

6600. **Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов. Темко К. В.**, Матем. сб., 1957, **43**, № 3, 401—408

Пусть $\{\lambda_n\}$ — выпуклая последовательность положительных чисел, причем $\lambda_n \downarrow 0$ и $\Sigma\lambda_n = \infty$. В заметке автора (РЖМат, 1957, 4703) было введено понятие выпуклой емкости множества, порожденной последовательностью $\{\lambda_n\}$. В реферируемой статье, установив некоторые свойства выпуклой емкости, автор применяет его к проблеме абсолютной сходимости тригонометрических рядов. Доказывается теорема: Если $\rho_n = O\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\right)$ и $\Sigma\rho_n = \infty$, то при любых α_k $(k = 1, \ldots, n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \rho_k |\cos(kx+\alpha_k)|}{\sum_{k=1}^{n} \rho_k} = \frac{2}{\pi},$$

исключая, быть может, множество нулевой выпуклой емкости, порожденной последовательностью $\{\lambda_n\}$.

Отсюда вытекает такое обобщение теоремы Данжуа—Лузина: Если тригонометрический ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} \rho_n \times \cos(nx+\alpha_n)$ сходится абсолютно на множестве положительной выпуклой емкости относительно последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\rho_n = O\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\right)$, то $\Sigma_{n=1}^{\infty}\rho_n < \infty$.

Кроме того, обобщается теорема Яно (Yano S., Tôhoku Math. J., 1949, 1, 44—49), где рассматривается аналогичная теорема для множеств положительной α-емкости.

Н. К. Бари

6601. Замечание к одной теореме Зигмунда. Кеннеди (Remark on a theorem of Zygmund. Kennedy P. B.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 1, 71—72 (англ.)

Как известно, существуют тригонометрические ряды, расходящиеся в каждой точке, хотя их коэффициенты стремятся к нулю. Такие ряды не могут быть лакунарными, так как Зигмунд показал, что если $\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda > 1$ и $\alpha_k \to 0$, $\beta_k \to 0$, то ряд $\Sigma_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos n_k x + \beta_k \sin n_k x)$ сходится на множестве, имеющем мощность континуума на любом интервале. Автор показывает, что в этой теореме требование $\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda > 1$ в известном смысле нельзя ослабить, а именно имеет место теорема: Пусть $\varphi(t) \downarrow 0$ при $t \to \infty$. Существует тригонометрический ряд, расходящиеся в каждой точке и имеющий вид $\Sigma(\alpha_k \cos n_k x + \beta_k \sin n_k x)$, где $\alpha_k \to 0$, $\beta_k \to 0$ и

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} > 1 + \varphi(n_k).$$

Н. К. Бари

6602. Некоторые тригонометрические ряды. I. Идзуми, Мацуяма (Some trigonometrical series. I. Izumi Shin-ichi, Matsuyama Noboru), J. Math., 1953, **1**, № 2-3, 110—116 (англ.)

Рассматриваются ряды

$$a_0/2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x \qquad (1)$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin \nu x \qquad (2)$$

и находятся достаточные условия, при которых эти ряды сходятся равномерно в $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Доказываются теоремы:

1. Пусть $-1 < \alpha < 1$, $\Sigma_{\nu=1}^{n} \nu b_\nu = o(n^\alpha)$ и $\Sigma_{\nu=n}^{\infty} |\Delta b_\nu| = o(n^{-(\alpha+1)/2})$ $(\Delta b_\nu = b_\nu - b_{\nu+1})$, тогда ряд (2) сходится равномерно в $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

2. Пусть $-1 < \alpha \leqslant 1$, ряд $\Sigma_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ сходится, $\Sigma_{\nu=1}^{n} \nu r_\nu = o(n^\alpha)$ $(r_\nu = \Sigma_{\mu=\nu}^{\infty} a_\mu)$ и $\Sigma_{\nu=n}^{\infty} |\Delta a_\nu| = o(n^{-(\alpha+1)/2})$. Тогда ряд (1) сходится равномерно в $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

3. Пусть $-1 < \alpha \leqslant 1$, ряд $\Sigma_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ сходится, $\Sigma_{\nu=1}^{n} r_\nu = o(n^\alpha)$ и $\Sigma_{\nu=n}^{\infty} |\Delta a_\nu| = o(n^{-(\alpha+1)/2})$, тогда ряд (1) сходится равномерно в $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Дается также оценка порядка функции $\psi(x) = \Sigma_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin \nu x$ при $x \to 0$, доказываются принадлежность функции $\psi(x)$ классу L^r и интегрируемость функции $x^{-\gamma}\psi(x)$, где r и γ зависят от условий, налагаемых на коэффициенты b_ν. Полученные результаты примыкают к результатам Саса (Szasz O., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, 856—867), относящимся к равномерной сходимости рядов (1) и (2).

В статье имеется много опечаток.

А. В. Ефимов

6603. Некоторые тригонометрические ряды. II. Мацуяма (Some trigonometrical series. II. Matsuyama Noboru), J. Math., 1953, **1**, № 2-3, 117—127 (англ.)

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \qquad (2)$$

— ряды Фурье соответственно четной функции $f(x)$ и нечетной $g(x)$.

В статье устанавливаются условия, накладываемые на функции $f(x)$ и $g(x)$, при которых сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} a_n, \qquad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu, \qquad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^r}{n^r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu-n}^{r-1} a_\nu \ (0 < r < 1). \qquad (5)$$

Доказываются теоремы:

Теорема 1. Пусть (1) является рядом Фурье функции $f(x)$. Тогда необходимым и достаточным условием сходимости ряда (3) является существование интеграла в смысле Коши

$$\int_{+0}^{\pi} t^{-r} f_r(t)\, dt,$$

где $f_r(t)$ — интеграл порядка r $(0 < r \leqslant 1)$ от функции $f(x)$.

Теорема 3. Пусть (2) является рядом Фурье функции $g(x)$, $g(+0) = 0$ и $\int_{+0}^{\pi} t^{-1} g(t)\, dt = 0$.

Тогда необходимым и достаточным условием сходимости ряда (4) является существование интеграла в смысле Коши:

$$\int_{+0}^{\pi} \frac{dt}{t} \int_{t}^{\pi} \frac{g(u)}{2 \operatorname{tg} \frac{u}{2}}\, du.$$

Теорема 4. Пусть (2) является рядом Фурье функции $g(x)$ и $g(+0) = 0$. Тогда необходимым и достаточ-

ным условием сходимости ряда (5) при любом $0<r<1$ является существование интеграла в смысле Коши:

$$\int_{\to 0}^{\pi} t^{-1} g(t)\, dt.$$

Доказанные теоремы являются обобщением результатов Харди и Литлвуда (Hardy G. H., Littlewood J. E., Math. Z., 1924, 19, 67—96) и Боаса (Boas R. P., Duke Math. J., 1951, 18, 787—793).

В статье имеется много опечаток. А. В. Ефимов

6604. Некоторые тригонометрические ряды. III. Идзуми (Some trigonometrical series. III. Izumi Shin-ichi), J. Math., 1953, 1, № 2-3, 128—136 (англ.)

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (2)$$

— ряды Фурье соответственно нечетной функции $g(x)$ и четной $f(x)$.

В статье даются условия, накладываемые на коэффициенты ряда (1), при которых из ограниченной сходимости (1) и существования интеграла в смысле Коши $\int_{\to 0}^{\pi} g(x)\, dx$ вытекает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} a_n. \qquad (3)$$

Доказывается, что (3) сходится, если

$$\sum_{\nu=n}^{2n} |\Delta a_\nu| = O(1)$$

или $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = o(n^\alpha)$ и $\sum_{\nu=n}^{2n} |\Delta a_\nu| = O(n^{1-\alpha})$

при любом α, $-1<\alpha\leqslant 1$.

Устанавливаются также условия, накладываемые на коэффициенты ряда (2), при которых из ограниченной сходимости (2) и существования интеграла в смысле Коши $\int_{\to 0}^{\pi} t^{-1} f(t)\, dt$ вытекает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} s_n \quad (s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu). \qquad (4)$$

Показывается, что (4) сходится, если

$$(A)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 \text{ и } \sum_{\nu=n}^{2n} |a_\nu| = O(1),$$

или

$$\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu = o(n^\alpha),\ s_n = O(1),\ \sum_{\nu=n}^{2n} |a_\nu| = O(n^{1-\alpha})$$

при любом α, $-1<\alpha<1$, где $(A)\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ означает абелевскую сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Даны также условия, накладываемые на коэффициенты рядов (1) и (2), при которых из ограниченной сходимости этих рядов и существования пределов для интегралов порядка α от функций $f(x)$ и $g(x)$, т. е. пределов $\lim_{x\to 0} f_\alpha(x)$ и $\lim_{x\to 0} g_\alpha(x)$, вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} a_n$.

Результаты, приведенные в статье, дополняют результаты Боаса (Boas R. P., Duke Math. J, 1951, 18, 787—793). А. В. Ефимов

6605. О некоторых тригонометрических рядах. Йосихиро (Yoshihiro Takashi), Гифу дайгаку когакубу кэнкю хококу Res. Repts Fac. Engng Gifu Prefect. Univ., 1957, № 7, 9—10 (японск.; рез. англ.)

Доказывается теорема: Пусть $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, $b_n>-(n+1/2)^{-2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} nb_n$ сходится. Тогда $x^{-1}f(x)\to\sum_{n=1}^{\infty} nb_n$ при $x\to 0$. Кроме того, дается другое доказательство следующей теоремы Саса: Пусть $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, $\sum_{\nu=n}^{2n}(|b_\nu|-b_\nu)=O(1)$, $\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu = O(1)$ $(n\to\infty)$. Тогда $x^{-1}f(x)=O(1)$ $(x\to 0)$. По резюме автора

6606. О чезаровской суммируемости ряда Фурье. (II). Канно (On the Cesàro summability of Fourier series (II). Kanno Kôsi), Tôhoku Math. J., 1955, 7, № 3, 265—278 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1956, 7392.

Доказываются следующие достаточные условия суммируемости (C,α) к нулю в точке $t=0$ ряда Фурье для четной периодической функции $\varphi(t)$:

1. Условия

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t \varphi(u)(t-u)^{\beta-1}\, du = o\{t^\beta/(\log t^{-1})^{1/\gamma}\} \qquad (1)$$

$$(\beta,\ \gamma>0;\ t\to 0),$$

$$\int_0^t |d\{t\varphi(t)(\log t^{-1})^{-\Delta}\}| = O(t) \quad (\Delta>0,\ 0<t<\eta)$$

достаточны для суммируемости (C,α) при $\alpha=(\Delta\gamma\beta-1)/(1+\Delta\gamma)$.

2. Условие (1) и условие

$$\varphi(t) = O\{(\log t^{-1})^{\Delta}\}\ (\Delta>0,\ t\to 0)$$

достаточны для суммируемости (C,α) при $\alpha=\Delta\gamma\beta/(1+\Delta\gamma)$.

3. Условие (1) с заменой в нем правой части на $o(t^\gamma)$ $(\gamma>\beta>0)$ и условие

$$\varphi(t) = O(t^{-\delta})\ (0<\delta<1,\ t\to 0)$$

достаточны для суммируемости (C,α) при $\alpha=\beta\delta/(\gamma+\delta-\beta)$.

В доказательствах используется суммирование методом Бесселя, равносильное методу Чезаро.

Теоремы аналогичного типа (исходным является результат Харди и Литлвуда о сходимости ряда Фурье в точке $t=0$) рассматривались Идзуми, Суноути и другими авторами. Условия 3 были высказаны Суноути, но доказаны им в ослабленном виде: для $\alpha=\beta\delta/(\gamma+\delta-\beta)+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$. А. А. Шнейдер

6607. О чезаровской суммируемости ряда Фурье. III. Канно (On the Cesàro summability of Fourier series (III). Kanno Kôsi), Tôhoku Math. J., 1957, 9, № 1, 27—36 (англ.)

Обозначим через S_n^β (C,β)-средние ряда Фурье $\sum a_n\cos nt$ четной функции $\varphi(t)$ в точке $t=0$. Положим

$$\varphi_\mu(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^t \varphi(u)(t-u)^{\mu-1}\, du,\ \mu>0.$$

Доказывается теорема: Если

$$a_n>-K(\log n)^\alpha/n,\ \alpha>0,$$

и

$$S_n^\beta = o\{n^\beta/(\log n)^\gamma\},\quad \beta>0,\ \gamma>0,$$

то

$$\varphi_\mu(t) = o(t^\mu)\ (t\to 0),$$

где $\mu=\alpha(1+\beta)/(\gamma+\alpha)$.

Эта теорема того же типа, что и результат Лу (C. T. Loo): если $S_n^\beta = o(n^\beta/\log n)$, то $\varphi_\mu(t)=o(t^\mu)$, где $\mu=1+\beta$. А. А. Шнейдер

6608. **Заметки по анализу Фурье (XLVII). Теоремы о выпуклости и суммируемость средними Чезаро рядов Фурье.** Суноути (Notes on Fourier analysis (XLVII): Convexity theorems and Cesàro summability of Fourier series. Sunouchi Genichiro), J. Math., 1953, 1, № 2-3, 104—109 (англ.)

Пусть $\varphi(t)$ — интегрируемая по Лебегу четная функция и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt \qquad (1)$$

— ее ряд Фурье. Через S_n^α обозначим средние Чезаро порядка α для частичных сумм Фурье ряда (1) при $t=0$, т. е. $S_n^\alpha = \Sigma_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^\alpha a_\nu$.

Пусть далее

$$\Phi_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-u)^{\beta-1} \varphi(u)\, du \quad (\beta > 0).$$

Опираясь на теорему о выпуклости Рисса (Riesz M., Acta Szeged, 1922, 1, 114—126) и ее следствия, полученные рядом других авторов, в работе дается связь между порядками a_n, S_n^α, $\Phi_\beta(t)$ и $\varphi(t)$. Доказываются теоремы:

Теорема 6. Если $a_n = O(n^{-(1-\delta)})$ и $S_n^\beta = o(n^\gamma)$, где $\gamma > \beta \geqslant 0$, $1 \geqslant \delta \geqslant 0$, то для $\alpha = (\beta - \gamma + \delta\gamma)/(\gamma + \delta - \beta) + \varepsilon$ будет $S_n^\alpha = o(n^\alpha)$.

Теорема 7. Если $a_n = O(n^{-(1-\delta)})$ и $S_n^\alpha = o(n^\gamma)$, где $\alpha > \gamma > -1$, $1 \geqslant \delta \geqslant 0$, то для $\beta = \delta(\alpha+1)/(\alpha + \delta - \gamma) + \varepsilon$ будет $\Phi_\beta(t) = o(t^\beta)$.

Теорема 8. Если $\varphi(x) = O(x^{-\delta})$ и $S_n^\alpha = o(n^\gamma)$, где $\alpha > \gamma > -1$, $\delta > 0$, то для $\beta = \delta(1+\gamma)/(\alpha + \delta - \gamma) + \varepsilon$ ($\delta\gamma < 1 + \alpha$) будет $\Phi_\beta(t) = o(t^\beta)$.

Теорема 9. Если $\varphi(x) = O(x^{-\delta})$ и $\Phi_\beta(t) = o(t^\gamma)$, где $\gamma > \beta > -1$, $1 > \delta > 0$, то для $\alpha = \beta\delta/(\gamma+\delta-\beta)+\varepsilon$ будет $S_n^\alpha = o(n^\alpha)$.

Автор указывает, что при $\varepsilon = 0$ некоторые из этих результатов были получены ранее другими авторами.

А. В. Ефимов

6609. **О функции со скачком.** Яно (On the jump functions. Yano Kenji), Kōdai Math. Semin. Repts, 1957, 9, № 1, 1—11 (англ.)

Пусть для $f(x) \in L(0, 2\pi)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \qquad (1)$$

— ряд, сопряженный к ряду Фурье функции f. Обозначим через $\bar{s}_n$ частные суммы, а через $\bar{\sigma}_n^\alpha = (C, \alpha)$-средние ряда (1) в точке x. Положим $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t) - l$. Доказываются теоремы:

1. Если для точки x

$$\int_0^t \psi(u)\, du = o(t), \qquad (2)$$

и

$$\int_0^t |\psi(u)|\, du = O(t), \qquad (3)$$

то при $\alpha > 0$, $p > 0$ и любом целом положительном k

$$\bar{\sigma}_{[pn]}^\alpha - \bar{\sigma}_n^\alpha = \frac{l}{\pi} \log p + o(1),$$

$$\bar{\sigma}_{[pn]}^\alpha - \bar{\sigma}_n^{\alpha+k} = \frac{l}{\pi}\left(\log p + \frac{1}{\alpha+1} + \ldots + \frac{1}{\alpha+k}\right) + o(1).$$

При $p = 2$ первое из двух утверждений было доказано Чжоу (случай $p=2$, $\alpha = 1$ еще раньше рассматривался Сасом), а при $\alpha = 1$ оно в несколько иной форме было дано Маруяма.

2. При выполнении условий (2) и (3)

$$(\bar{\sigma}_m^\beta - \bar{\sigma}_n^\alpha) / (\log m - \log n) = \frac{l}{\pi} + o(1),$$

где $n \to \infty$, $m/n \to \infty$, $0 < \alpha \leqslant \beta$. При $\alpha = \beta = 1$ этот результат был получен Маруяма.

3. Если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $(0, 2\pi)$, то при $m/n \to 1$ и $m - n \to \infty$

$$(\bar{s}_m - \bar{s}_n) / (\log m - \log n) = \frac{l}{\pi} + o(1).$$

4. Если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $(0, 2\pi)$, и для $-1 < \alpha < 0$ и некоторого $\delta > 0$

$$\int_0^\delta |\, d\{\psi(u) - \psi(u+h)\}\,| = O(h^{|\alpha|/(\alpha+1)}), \qquad (4)$$

то при $n \to \infty$, $m/n \to 1$, $(m-n)/n^{|\alpha|} \to \infty$

$$(\bar{\sigma}_m^\alpha - \bar{\sigma}_n^\alpha) / (\log m - \log n) = \frac{l}{\pi} + o(1).$$

5. В предыдущей теореме условие (4) можно заменить на условие: $\psi(t) \in \mathrm{Lip}(1, p)$ на $(0, \delta)$, $|\alpha| p > 1$.

6. Если выполняется условие (2) и при $0 < t' \leqslant t \to 0$

$$\int_{t'}^t \frac{|\psi(u) - \psi(u+t')|}{u}\, du = O\left(\log \frac{2t}{t'}\right), \qquad (5)$$

то

$$\bar{\sigma}_{2n}^1 - \bar{\sigma}_n^1 = \frac{l}{\pi} \log 2 + o(1).$$

При условии, несколько более сильном, чем (5), этот результат был получен Идзуми.

7. При выполнении условий (2) и (3) последовательность $\{nB_n(x)\}$ суммируется $(C, \alpha+1)$, $\alpha > 0$, к I/π. При $\alpha = 1$ этот результат был получен Сасом.

А. А. Шнейдер

6610. **О порядке чезаровских средних ряда Фурье и рядов, полученных из него дифференцированием несколько раз.** Кумари (On the order of the Cesaro means of Fourier series and its successively derived series. Kumari Sulaxana), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1957, **A23**, № 3, 199—216 (англ.)

Рассмотрим ряд Фурье функции $f(\theta) \in L(-\pi, \pi)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \qquad (1)$$

и r раз продифференцированный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^r}{d\theta^r} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \qquad (2)$$

Положим

$$\varphi_0(t) = \varphi(t) = \frac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t) - 2s\},$$

$$\varphi_\alpha(t) = \alpha t^{-\alpha} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \varphi(u)\, du, \ \alpha > 0$$

Через $P(t)$ обозначим такой полином степени $r-1$, чтобы функция

$$g(t)=2^{-1}t^{-r}[\{f(x+t)-P(t)\}+ +(-1)^r\{f(x-t)-P(-t)\}]$$

была интегрируема на $(-\pi, \pi)$; вне $(-\pi, \pi)$ определим $g(t)$ по периодичности. Функцию $g_\alpha(t)$ определим аналогично $\varphi_\alpha(t)$. Обозначим через $S_\alpha(w)$ и $B_r^\alpha(w)$ (C, α)-средние рядов (1) и (2) в точке $\theta=x$. В формулировках результатов участвуют оценки интегралов:

$$\int_t^\pi \frac{|\varphi_\alpha(u)|}{u}du, \quad (3)$$

$$\int_0^t |\varphi_\alpha(u)|\,du, \quad (4)$$

$$\int_t^\pi \frac{|g_\delta(u)-s|}{u}du, \quad (5)$$

$$\int_0^t |g_\delta(u)-s|\,du. \quad (6)$$

Доказываются две теоремы:

1. Если интеграл (3) равен $o\{(\log t^{-1})^{p+1}\}$, $\alpha\geqslant 0$, $-1<p<\infty$, то $S_\alpha(w)=o\{(\log w)^{p+1}\}$.

2. а) Если интеграл (5) равен $o\{(\log t^{-1})^{p+1}\}$, $\delta\geqslant 0$, $-1<p<\infty$, то $B_r^{r+\delta}(w)=o\{(\log w)^{p+1}\}$; б) если интеграл (6) равен $o\{t(\log t^{-1})^p\}$, $\delta\geqslant 0$, $p\geqslant 0$, то $B_r^{r+\delta_1}(w)-r!\,s=o\{(\log w)^p\}$, $\delta_1>\delta$.

Показывается, что в теореме 1 (являющейся усилением результата Суноути) оценка $S_\alpha(w)$ — наилучшая возможная, и при ее сохранении условие, наложенное на $\varphi_\alpha(t)$, нельзя заменить на более слабое условие того же типа.

В качестве следствий приводятся четыре результата:

1. а) Если интеграл (4) равен $o(t)$, $\alpha\geqslant 0$, то ряд

$$\sum_{n=1}^\infty (a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)/\log(n+1) \quad (7)$$

суммируется (C, α) при $\theta=x$; б) если при $\alpha=0$ интеграл (4) равен $o\{t(\log t^{-1})^p\}$, $0\leqslant p<\infty$, то будет сходиться ряд

$$\sum_{n=1}^\infty (a_n\cos nx+b_n\sin nx)/[\log(n+1)]^{p+1}$$

2. Если интеграл (6) равен $o(t)$, $\delta\geqslant 0$, то r раз продифференцированный ряд (7) суммируется $(C, r+\delta)$ в точке $\theta=x$. При $\delta=0$, $r=1$ этот результат был получен Моханти и Нанда.

Остальные следствия касаются суммируемости методом (R, μ, α).

3. а) Если интеграл (3) равен $o\{(\log t^{-1})^\alpha\}$, $\alpha>0$, и $\varphi_k(t)=o(1)$ при некотором k, то ряд (1) в точке $\theta=x$ суммируется $(R, \log, \alpha)$ к s; б) если интеграл (3) равен $o(1)$, $\alpha>1$, и $\varphi_k(t)=o(1)$, то ряд (1) в точке $\theta=x$ суммируется (R, μ, α) к s, где $\mu(n)=\exp\{(\log n)^{1-1/\alpha}\}$.

4. а) Если интеграл (5) равен $o\{(\log t^{-1})^{r+\delta}\}$, $\delta\geqslant 0$, и $g_k(t)-s=o(1)$, то ряд (2) в точке $\theta=x$ суммируется $(R, \log, r+\delta)$ к $r!\,s$; б) если интеграл (5) равен $o(1)$, $r+\delta>1$, $\delta\geqslant 0$, и $g_k(t)=o(1)$, то ряд (2) в точке $\theta=x$ суммируется $(R, \mu, r+\delta)$, где $\mu(n)=\exp\{(\log n)^{1-1/(r+\delta)}\}$.

А. А. Шнейдер

6611. Ряды Фурье. XIII. Преобразование рядов Фурье. Катаяма (Fourier series. XIII. Transformation of Fourier series. Katayama Miyoko), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 2, 75—78 (англ.)

Пусть $f(x)$ — интегрируемая периода 2π функция с рядом Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^\infty(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \quad (1)$$

и $\|\lambda_{kn}\|(k, n=0, 1, \ldots)$ — некоторая бесконечная числовая матрица. Ряд (1) называется λ-суммируемым к функции $\alpha(x)$, если при любом n сходятся ряды

$$\alpha_n(x)=\frac{1}{2}a_0\lambda_{0n}+\sum_{\nu=1}^\infty\lambda_{\nu n}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x) \quad (2)$$

и $\alpha_n(x)\to\alpha(x)$ при $n\to\infty$.

В тех случаях, когда ряд (2) и последовательность $\alpha_n(x)$ сходятся равномерно, говорят, что ряд (1) равномерно λ-суммируем. Устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы ряд Фурье любой интегрируемой (соответственно принадлежащей классу $L_p(p>1)$) функции $f(x)$ был λ-суммируем (соответственно равномерно λ-суммируем).

Эти условия следующие: 1) при любом ν существует предел $\lambda_{\nu n}$, когда $n\to\infty$; 2) $\left|\frac{1}{2}\lambda_{0n}+\sum_{\nu=1}^\mu\lambda_{\nu n}\cos\nu t\right|\leqslant M$; 3) существует равномерно ограниченная последовательность функций $K_n(t)$ с рядами Фурье

$$K_n(t)\sim\frac{1}{2}\lambda_{0n}+\sum_{\nu=1}^\infty\lambda_{\nu n}\cos\nu t. \quad (3)$$

Для классов L_p, когда $p>1$, условия 2) и 3) заменяются условием существования ограниченной по норме в L_q $(1/p+1/q=1)$ последовательности функций $K_n(t)$ с рядами Фурье (3).

Случай, когда $p=\infty$, изучался в работе Карамата и и Томича (РЖМат, 1957, 2999).

А. Ф. Тиман

6612. Ряды Фурье. XVI. Явление Гиббса для частных сумм и средних Чезаро рядов Фурье. 1, 2. Идзуми, Сато (Fourier series. XVI. The Gibbs phenomenon of partial sums and Cesaro means of Fourier series. 1, 2. Izumi Shin-ichi, Satô Masako), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 6, 284—288, 289—292 (англ.)

Пусть $f(t)$ — интегрируемая периода 2π функция. Если при $h\to 0$

$$\int_0^h\{f(x+u)-f(x-u)\}\,du=o(h/\ln h^{-1})$$

равномерно относительно x, то для последовательности частных сумм ряда Фурье этой функции явление Гиббса не имеет места ни в одной точке.

Существует такая ограниченная функция $f(t)$, что для средних Чезаро $\sigma_n^r(f; x)$ порядка r ее ряда Фурье при любом неотрицательном $r<1$ имеет место явление Гиббса в данной точке. Вместе с тем, если при $h\to 0$

$$\int_0^h\{f(x+u)-f(x-u)\}\,du=o(h)$$

равномерно относительно x, то при $r>0$ для последовательности $\sigma_n^r(f; x)$ в точке $x=0$ явление Гиббса не имеет места.

А. Ф. Тиман

6613. Негармонические тригонометрические ряды. Берг (Unharmonische trigonometrische Reihen. Berg Lothar), Math. Nachr., 1957, 16, № 5-6, 295—308 (нем.)

Относительно заданных сумм

$$f_n(s) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin k_\nu s \qquad (1)$$

предполагается, что коэффициенты a_ν вещественны, а последовательность множителей $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ является положительной, монотонно возрастающей и расходящейся, $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Для сумм вида (1) определяются условия существования предельной функции $f(s)$, удовлетворяющей требованию

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty [f(s) - f_n(s)]^2 \frac{ds}{s^2} = 0.$$

В реферируемой работе сходимость ряда

$$f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin k_\nu s$$

понимается именно в смысле существования указанной функции $f(s)$; данное определение сходимости является отличным от определения сходимости, принятого в теории почти периодических функций.

Условия для существования указанной функции $f(s)$ приводятся в работе в нескольких формах. Отметим следующую форму необходимых и достаточных условий, которую автор считает, по-видимому, наиболее существенной:

а) $\sum_{\nu=1}^{\infty} (k_\nu - k_{\nu-1}) \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} a_\mu\right)^2$ сходится,

б) $\sum_{\mu=n}^{m} a_\mu k_\mu = o\left(\sqrt{k_m}\right)$ $(n \to \infty)$.

В общем случае условия а) и б) являются независимыми; однако в том случае, когда все коэффициенты a_n, за исключением конечного числа, являются неотрицательными, условие б) является следствием а).

Приводятся некоторые более простые необходимые условия, вытекающие из а) и б). Из этих условий отметим: 1) сходимость ряда $\Sigma_{\mu=1}^{\infty} a_\mu$ и 2) $a_n^2 k_n \to 0$ при $n \to \infty$. Сходимость ряда $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n^2 k_n$, а также сходимость ряда $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n^2$ в общем случае не являются обязательными, что поясняется примерами. Однако в частном случае обычных тригонометрических рядов $k_n = kn$, где k — постоянный множитель, ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n^2$ обязательно является сходящимся, в связи с чем в последнем случае мы остаемся в области обычных рядов Фурье.

Указанные условия а) и б), а также равносильные им условия, являются необходимыми и достаточными также для существования предельной функции $\varphi(s) - \varphi(0)$, где $\varphi(0) = \Sigma_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, удовлетворяющей требованию

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \{[\varphi(s) - \varphi(0)] - [\varphi_n(s) - \varphi_n(0)]\}^2 \frac{ds}{s^2} = 0,$$

где

$$\varphi_n(s) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \cos k_\nu s$$

(без свободного члена).

Во втором параграфе работы рассматриваются синустрансформация Фурье $h(t)$ функции $s^{-2} f(s)$ и косинустрансформация Фурье $g(t)$ функции $s^{-1} f(s)$ (существующие в условиях работы — $h(t)$ в обычном смысле, $g(t)$ в смысле среднего квадратичного). В частности, для функции $h(t)$ мы имеем формулу

$$h(t) = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} a_\mu k_\mu + t \sum_{\mu=\nu}^{\infty} a_\mu \quad (k_{\nu-1} \leqslant t \leqslant k_\nu),$$

т. е. $h(t)$ является кусочнолинейной непрерывной функцией, углы графика которой имеют абсциссами значения k_ν. Указанная форма для $h(t)$ является не только необходимой, но также и достаточной для того, чтобы заданная функция $f(s)$ являлась предельной, в смысле работы, для некоторой последовательности сумм вида (1), если только последовательности $\{a_n\}$ и $\{k_n\}$ удовлетворяют условиям а) и б) или им равносильным.

Рассматривается также синустрансформация Фурье для функции $[\varphi(s) - \varphi(0)]/s$.

В третьем параграфе рассматривается вопрос об отыскании коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, приводящих интеграл

$$F_n = \int_0^\infty \left[f(s) - \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \sin k_\mu s\right]^2 s^{-2}\, ds$$

к минимуму, где $f(s)$ — некоторая данная квадратично интегрируемая с весом функция; устанавливается тесная связь, существующая между минимизирующими коэффициентами и синустрансформацией Фурье функции $f(s)\, s^{-2}$. Рассматриваются также оценка интеграла $\int_0^\infty s^{-2} f^2(s)\, ds$ в случае обычных тригонометрических рядов и вкратце одно приложение полученных результатов в теории рядов Дирихле. А. Н. Тверитин

6614. О суммировании двойных рядов Фурье функций двух переменных. Матвеев И. В., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 5, 221—229

Пусть $f(x, y)$ — суммируемая функция периода 2π как по x, так и по y, и пусть

$$U_{mn}(f; x, y) = \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{k0}^{(m,n)} (a_{k0} \cos kx + b_{k0} \sin kx) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \lambda_{0l}^{(m,n)} (a_{0l} \cos ly + c_{0l} \sin ly) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \lambda_{kl}^{(m,n)} (a_{kl} \cos kx \cos ly + b_{kl} \sin kx \cos ly + c_{kl} \cos kx \sin ly + d_{kl} \sin kx \sin ly),$$

где $a_{kl}, b_{kl}, c_{kl}, d_{kl}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$, а $\lambda_{kl}^{(m,n)}$ — система чисел, зависящая от k, l, m и n $(m, n = 1, 2, \ldots; k \leqslant m, l \leqslant n)$.

Доказывается теорема: Если коэффициенты $\lambda_{kl}^{(m,n)}$ удовлетворяют условиям:

1) $\lim\limits_{m,\, n\to\infty} \lambda_{kl}^{(m,n)} = 1$, $|\lambda_{kl}^{(m,n)}| < L$,

2) $\sum\limits_{k=0}^{m-1} \left(\sum\limits_{i=m-k}^{m} \frac{m-k}{i}\right) |\Delta_{kk}^2| < L$,

$\sum\limits_{l=0}^{n-1} \left(\sum\limits_{j=n-l}^{n} \frac{n-l}{j}\right) |\Delta_{ll}^2| < L$,

3) $\sum\limits_{k=0}^{m-1} \sum\limits_{l=0}^{n-1} \left(\sum\limits_{i=m-k}^{m} \frac{m-k}{i}\right)\left(\sum\limits_{j=n-l}^{n} \frac{n-l}{j}\right) |\Delta_{kkll}^4| < L$,

где Δ_{kk}^2, Δ_{ll}^2, Δ_{kkll}^4 — вторые и четвертые конечные разности последовательности $\lambda_{kl}^{(m,n)}$, то в любой точке (x, y), в которой

а) $\lim\limits_{\alpha,\, \beta\to\infty} \frac{1}{\alpha\beta} \int_0^\alpha \int_0^\beta |\varphi_{xy}(t, \tau)|\, dt\, d\tau = 0$,

б) $\sup_{0<\alpha\leqslant\pi}\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}dt\int_0^{\pi}|\varphi_{xy}(t,\tau)|\,d\tau<M,$

в) $\sup_{0<\beta\leqslant\pi}\frac{1}{\beta}\int_0^{\beta}d\tau\int_0^{\pi}|\varphi_{xy}(t,\tau)|\,dt<M,$

$\{\varphi_{xy}(t,\tau)=f(x+t,y+\tau)+f(x+t,y-\tau)+$
$+f(x-t,y+\tau)+f(x-t,y-\tau)-4f(x,y)\},$

справедливо равенство

$$\lim_{m,\,n\to\infty}U_{mn}(f;x,y)=f(x,y).$$

А. Д. Бендукидзе

6615. **О порядке приближения функций линейными положительными операторами. Коровкин П. П.,** Докл. АН СССР, 1957, 114, № 6, 1158—1161

Изучается порядок приближения непрерывных на $[-1,1]$ функций линейными положительными операторами: $\Delta_n=\mathscr{L}_n(f,x)-f(x)$ в случае, когда $\mathscr{L}_n(f,x)$— алгебраический полином степени n.

Теорема 1. Хотя бы одна из последовательностей

$$\{n^2\|\mathscr{L}_n(1,x)-1\|\},\ \{n^2\|\mathscr{L}_n(t,x)-x\|\},$$

$$\{n^2\|\mathscr{L}_n(t^2,x)-x^2\|\}$$

не стремится к нулю при $n\to\infty$.

Таким образом, порядок Δ_n не выше n^{-2}.

Построение оператора, фактически дающего приближение порядка n^{-2}, основывается на следующем утверждении.

Теорема 2. Пусть $\Phi_n(f)=\int_a^b f(x)\,d\varphi_n(x)$, где φ_n не убывают, и пусть $\psi(x)$ — заданная функция, непрерывная на $[a,b]$, $\psi(c)=0$, $\psi(x)>0$ при $x\neq c$. Если $\lim_{x\to c}f(x)/\psi(x)=A(<\infty)$, то необходимое и достаточное условие выполнения равенства $\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi_n(f)}{\Phi_n(\psi)}=A$ заключается в следующем: при всяком $\delta>0$ имеет место $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n(\delta)}{\Phi_n(\psi)}=0$, где $\alpha_n=\int_{|x-c|\geqslant\delta}d\varphi_n(x)$. С помощью этой теоремы доказывается, что оператор Джексона

$$D_n(f,x)=\frac{3}{2n(2n^2+1)}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\left(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4dt$$

дает

$$\lim_{n\to\infty}4n^2[D_n(f,x)-f(x)]=6f''(x).$$

Тем же способом передоказывается асимптотическая формула референта для полиномов С. Н. Бернштейна.

Е. В. Вороновская

6616. **Ряды Фурье. XII. Полиномы Бернштейна. Идзуми, Сато, Утияма** (Fourier series. XII. Bernstein polynomials. Izumi Shin-ichi, Satô Masako, Uchiyama Saburô), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 2, 67—69 (англ.)

Изучаются некоторые свойства обобщенных полиномов С. Н. Бернштейна (впервые введенных Л. В. Канторовичем в 1934 г.):

$$P_n(x)=P_n(x,f)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}(n+1)\binom{n}{\nu}x^{\nu}(1-x)^{n-\nu}\int_{\nu/(n+1)}^{(\nu+1)/(n+1)}f(t)\,dt,\quad(1)$$

где $f(t)$ суммируема на $[0,1]$.

Для полиномов $Q_n(x,f)=(n+1)P_n(x)-nP_{n-1}(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ полиномы (1) являются средними арифметическими. Относительно их доказываются следующие утверждения:

1. Если производная от ряда Фурье $f(t)$ сходится абсолютно, то $\{Q_n(x,f)\}$ сходится к $f(x)$ всюду.

2. Существует непрерывная функция $f(t)$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье, для которой $\{Q_n(x,f)\}$ расходится почти всюду.

Е. В. Вороновская

6617. **О фиксированных точках уклонения решений чебышевских задач с линейно входящими параметрами. II. Ремез Е. Я.,** Укр. матем. ж., 1957, 9, № 3, 310—328 (рез. франц.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 1137.

Для системы линейных уравнений $\varphi(Q,z)\equiv\sum_{k=1}^{n}a_kz_k=l$ (употребляемые здесь обозначения см. в указанном выше реферате) вводится понятие чебышевской точки уклонения (ч. т. у.), более узкое, чем введенное в ч. I понятие фиксированной точки уклонения (ф. т. у.). Конечная система уравнений, соответствующих точкам $Q_1,Q_2,\ldots,Q_h$ замыкания $\mathfrak{M}^{\circ}$ множества $\mathfrak{M}$, называется чебышевской подсистемой, если для некоторого $z^{(0)}\in\mathfrak{C}_0$ удовлетворяются условия: 1) $|\delta(Q_j,z^{(0)})|=\inf_z\sup_{Q\in\mathfrak{M}}|\delta(Q,z)|$ для $j=1,2,\ldots,h$, где $\delta(Q,z)\equiv l-\varphi(Q,z)$; 2) для некоторых $\mu_j>0$ выполняется тождество относительно z

$$\sum_{j=1}^{h}\mu_j\operatorname{sgn}\overline{\delta(Q_j,z^{(0)})}\,\varphi(Q_j,z)=0.$$

Любая точка Q, входящая в чебышевскую подсистему, называется ч. т. у.

При помощи понятия ч. т. у. изучается классическая задача В. А. Маркова, состоящая в нахождении вещественного полинома $p(x)=\sum_{i=0}^{n}p_ix^i$, наименее уклоняющегося от нуля в сегменте $[a,b]$ среди таких же полиномов, подчиненных линейной зависимости $\omega(p)\equiv\alpha_0p_0+$ $+\alpha_1p_1+\ldots+\alpha_np_n=1$ (p — точка с координатами-коэффициентами p). Доказывается, что условия: 1) $\omega(g)=\sum_{s=1}^{q}r_sg(x_s)$ (тождественно относительно полинома g), где $r_s=\frac{\omega(\hat{F}_s)}{\hat{f}'(x_s)}$, $\hat{f}(x)=\prod_{s=1}^{\varkappa}(x-x_s)$, $q\leqslant\varkappa\leqslant n+1$, 2) $\operatorname{sgn}p(x_1):\ldots:\operatorname{sgn}p(x_q)=\operatorname{sgn}r_1:\ldots:\operatorname{sgn}r_q$ для точек $x_1,x_2,\ldots,x_n$ и полинома p, необходимы и достаточны для того, чтобы p было решением задачи Маркова. Точки $x_1,x_2,\ldots,x_q$ являются при этом ч. т. у.

Отмечается, что в задаче Маркова возможно существование ф. т. у., не являющихся ч. т. у. Получены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы вырожденный полином $p(x)=1/\alpha_0$ являлся единственным решением или одним из решений задачи Маркова.

Понятие ч. т. у. применяется автором также к классической экстремальной задаче моментов.

С. Ф. Пашковский

6618. **Некоторые эффективные способы решения задачи П. Л. Чебышева о наилучшем приближении. Буров В. Н.,** Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 67—79

Более подробное изложение результатов, опубликованных автором ранее (РЖМат, 1958, 1976).

С. Ф. Пашковский

6619. **О некоторых задачах наилучшего степенного приближения. Мамедов Ш. Р.,** Уч. зап. Азерб. ун-та, 1957, № 3, 3—14 (рез. азерб.)

Пусть

$$E_{n,q}[f,a,b]_{L_p}=\inf_{P_n\in H_n}\left(\int_a^b q(x)\,|f(x)-P_n(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

где H_n — множество алгебраических многочленов степени $\leqslant n$, $p>0$, $q(x)>0$ для всех $x\in[a,b]$. Если $a=-1$, $b=1$, то будем писать

$$E_{n,q}[f,a,b]_{L_p}=E_{n,q}[f]_{L_p}.$$

Автор распространяет некоторые из неравенств С. Н. Бернштейна (Собр. соч., т. I, М., 1952, гл. V), полученные в метрике C, на пространство L_p ($p\geqslant 1$). Характерные результаты реферируемой работы:

1. Если $0<k_0f^{(n+2)}(x)<f^{(n+1)}(x)<k_1f^{(n+2)}(x)$ и $f^{(n+2)}(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $k_0E_{n,q}[f',a,b]_{L_p}<$ $<E_{n,q}[f,a,b]_{L_p}<k_1E_{n,q}[f',a,b]_{L_p}$.

2. Если $f^{(n+2)}(x)$ непрерывна на $[a,b]$ ($a\geqslant 0$) и $f^{(n+2)}(x)>0$, $f^{(n+1)}(x)>0$ для $x\in[a,b]$, то $E_{n,q}[f,a,b]_{L_p}<\frac{1}{n+1}E_{n,q}[xf',a,b]_{L_p}$.

3. Если $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна на отрезке $[-1,1]$, то

$$E_{n,q}[f]_{L_p}<\begin{cases}\dfrac{1}{2^n}\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!} \text{ при } q(x)\equiv 1,\ p=1,\\[2ex] \dfrac{1}{2^n}\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left[\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}\right]^{1/p}\\[2ex] \text{при } q(x)=(1-x^2)^{-1/2},\ p>1,\end{cases}$$

где $M_{n+1}=\sup\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f^{(n+1)}(x)|$.

4. Если $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна на $[-1,1]$ и $0<N<$ $<f^{(n+1)}(x)<M$, то $\tau_1(n,p)<E_{n,q}[f]_{L_p}<\tau_2(n,p)$, где $\tau_i(n,p)=\frac{1}{2^n}\frac{A_i(p)}{(n+1)!}$, $i=1,2$; $A_i(p)$ не зависит от n,

$$q(x)=\begin{cases}1 & \text{, если } p=1,\\ (1-x^2)^{-1/2}, & \text{если } p>1.\end{cases}$$

Пусть $f(x)$ регулярна на отрезке $[-1,1]$. Обозначим через G область, содержащую отрезок $[-1,1]$, в которой регулярна $f(z)$, через C — контур области G и через δ — расстояние этого контура до отрезка $[-1,1]$. В предположении, что $\delta>1/2$, доказывается теорема 3: Наилучшее степенное приближения аналитической функции $f(x)$ при помощи алгебраических многочленов удовлетворяет неравенству

$$E_{n,q}[f]_{L_p}<\begin{cases}N_1q_1^n \text{ при } p=1\ (q_1<1),\\ N_2q_2^n \text{ при } p>1,\ q(x)=(1-x^2)^{-1/2}\ (q_2>1),\end{cases}$$

где N_1 и N_2 — константы, не зависящие от n.

По теореме 4, для того чтобы существовала почти везде на отрезке $[-1,1]$ совпадающая с $f(x)$ функция $\varphi(x)$, регулярная внутри эллипса с фокусами в точках -1, 1 и полусуммой осей $R>1$, и имела особенность на контуре эллипса, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{E_n[f]_{L_p}}=1/R\ (p\geqslant 1).$$

Эта теорема верна при любом весе $q(x)>0$.

Отметим следствие. Пусть $f(x)=\varphi(x)+\varphi_1(x)$ иррегулярна на эллипсе c с полусуммой осей $R>1$, причем $\varphi_1(x)$ регулярна на эллипсе c и внутри его. В этом случае

1) $$\overline{\lim}\frac{E_n[f]_{L_p}}{E_n[\varphi_1]_{L_p}}=\infty,$$

2) существует бесконечно много значений n, для которых справедливо асимптотическое равенство $E_n[f]_{L_p}\sim$ $\sim E_n[\varphi]_{L_p}$, причем асимптотическое равенство имеет место для всех n, если

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{E_n[f]_{L_p}}=\underline{\lim}\sqrt[n]{E_n[f]_{L_p}}.$$

В работе имеются опечатки и некоторые неточности в формулировках. Г. К. Лебедь

6620. Некоторые эквивалентные отношения в конструктивной теории функций. Мандельбройт (Quelques relations équivalentes dans la théorie constructive des fonctions. Mandelbrojt Szolem), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 22, 1869—1871 (франц.)

Пусть $f(x)$, $\varphi(x)\in L=L(-\infty,\infty)$, $f(x)$ бесконечно дифференцируема и $f^{(n)}(x)\in L(n\geqslant 0)$; $\delta(f)$, $\tau(\varphi)$ и $\delta\tau(f,\varphi)$ обозначают соответственно замыкания в метрике L многообразий линейных комбинаций следующих трех видов: 1) $a_0f+a_1f'+\ldots+a_nf^{(n)}$; 2) $b_1\varphi(x+\xi_1)+\ldots+$ $+b_m\varphi(x+\xi_m)$; 3) $a_0f+\ldots+a_nf^{(n)}+b_1\varphi(x+\xi_1)+\ldots$ $\ldots+b_m\varphi(x+\xi_m)$. Кроме того, вводятся обозначения: $\mathfrak{M}$ — последовательность положительных чисел $\{M_n\}$; $L\{\mathfrak{M}\}$ — класс функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям $\|f^{(n)}\|_L\leqslant M_n$; $s(f)$ — множество, на котором преобразование Фурье функции $f(x)$ отлично от нуля; $\sigma(f)$ — спектр функции $f(x)$ (определение спектра см. Mandelbrojt S., General theorems of closure, The Rice Institute Pamphlet Monograph in Mathematics, Houston, 1951); если E — замкнутое множество на $(-\infty,\infty)$, то $E_a=\bigcup_{x\in E}[x-a,x+a]$ $(a>0)$; если $G\subset(-\infty,\infty)$, то C_1G — дополнение к G относительно $(-\infty,\infty)$, а C_2G — дополнение к G относительно плоскости $z=x+iy$, причем, если $G=(-\infty,\infty)$, то C_2G есть полуплоскость $y>0$.

Рассматриваются следующие три условия, налагаемые на $\mathfrak{M}$, E и $a>0$:

1) условие $R_\delta\{\mathfrak{M},E,a\}$: из того что $f(x)\in L\{\mathfrak{M}\}$, $\sigma(f)\subset E_a$, должно следовать $\tau(f)\subset\delta(f)$;

2) условие $R_{\delta\tau}\{\mathfrak{M},E,a\}$: из того, что $f(x)\in L\{\mathfrak{M}\}$, $g(x)\in L$, $\sigma(f)\cap C_1s(g)\subset E_a$, должно вытекать $\tau(f)\subset$ $\subset\delta\tau(f,g)$;

3) условие $R_H\{\mathfrak{M},E,a\}$: если функция $\Phi(z)$, голоморфная в C_2E_a, такова, что $|\Phi(z)z^ny|\leqslant M_n$, то $\Phi(z)\equiv 0$.

Даются доказательства двух теорем:

I. Если E содержит точку $x=0$, то условие $R_\delta\{\mathfrak{M},E,a\}$ влечет условие $R_{\delta\tau}\{\mathfrak{M},E,a'\}$ для любого $a'<a$ $(a'>0)$.

II. Если E содержит точку $x=0$, то условие $R_\delta\{\mathfrak{M},E,a\}$ влечет условие $R_H\{\mathfrak{M},E,a'\}$ для любого $a'<a$ $(a'>0)$.

Указывается на связь между приведенными условиями и возможностью равномерного взвешенного приближения многочленами функции $F(x)$, стремящейся к нулю при $|x|\to\infty$, если в качестве веса берется абсолютная величина преобразования Фурье функции $f(x)\in L\{\mathfrak{M}\}$. Статья примыкает по тематике к упомянутой выше монографии автора. А. Л. Гаркави

6621. Квадратурные формулы. Гиццетти (Sulle formule di quadratura. Ghizzetti Aldo),

Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1954—1955 (1956), 26, 45—60 (итал.; рез. англ.)

Рассмотрен общий метод построения квадратурных формул, основанный на равенстве

$$\int_a^b [\varphi E(f) - fE^*(\varphi)]\,dx = \sum_{h=0}^{n-1} [f^{(h)} E^*_{n-h-1}(\varphi)]_a^b, \quad (1)$$

в котором f, φ — функции, обладающие $(n-1)$-й абсолютно непрерывной производной в ограниченном сегменте (a, b),

$$E(f) = f^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} a_k f^{(n-k)},$$

$$E^*_h(\varphi) = (-1)^h \varphi^{(h)} + \sum_{k=1}^{h} (-1)^{h-k} (a_k \varphi)^{(h-k)},$$

$E^* \equiv E^*_n$, a_k — функция, обладающая $(n-k)$-й производной в (a, b). Из равенства (1) автор выводит квадратурную формулу:

$$\int_a^b fg\,dx = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} f^{(h)}(x_i) [E^*_{n-h-1}(\varphi_i - \varphi_{i-1})]_{x=x_i} + \sum_{i=0}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i E(f)\,dx, \quad (2)$$

в которой g — суммируемая функция (вес), $a = x_0 \leqslant x_1 < \ldots < x_m \leqslant x_{m+1} = b$, $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_m$ — функции, удовлетворяющие почти всюду уравнению $E^*(\varphi) = g$, а φ_0 и φ_m также условиям:

$$\varphi_0(a) = \varphi_0'(a) = \ldots = \varphi_0^{(n-1)}(a) = 0,$$
$$\varphi_m(b) = \varphi_m'(b) = \ldots = \varphi_m^{(n-1)}(b) = 0. \quad (3)$$

Доказывается следующая теорема (установленная, как отмечает автор, в другой формулировке Радоном в 1935 г.): Если функционал

$$R(f) = \int_a^b fg\,dx - \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} A_{hi} f^{(h)}(x_i)$$

обращается в нуль для всех решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка $E(f) = 0$, то существуют решения $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ уравнения $E^*(\varphi) = g(\varphi_0, \varphi_m$, удовлетворяющие (3)) такие, что

$$A_{hi} = [E^*_{n-h-i}(\varphi_i - \varphi_{i-1})]_{x=x_i},$$

$$R(f) = \sum_{i=0}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i E(f)\,dx.$$

Это значит, что формула (2) обобщает классические квадратурные формулы.

Изучаются частные случаи (2), обобщающие квадратурные формулы Гаусса и Чебышева. Приведена формула, аналогичная (2), для приближенного вычисления n-кратных $(n \geqslant 2)$ интегралов. С. Ф. Пашковский

См. также: 6826, 6895

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

6622. Простое определение аналитических функций и общих мультифункций. Менгер (A simple definition of analytic functions and general multifunctions. Menger Karl), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1954, 40, № 9, 819—821 (англ.)

Целью статьи является такая модификация определения Вейерштрасса многозначной аналитической функции, при которой существенно использовалось бы обычное представление о функции как о множестве упорядоченных пар чисел. Построение автора тесно примыкает к построению аналитической функции по ее элементам (Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, М., 1957, гл. IX), не совпадая с ним во второстепенных деталях. В определении аналитического элемента используются упорядоченные пары комплексных чисел. Терминология автора оригинальна; так, многозначные функции называются мультифункциями, чем подчеркивается различие между классами функций (аналитических элементов) и мультифункций (аналитических функций). Мультифункция отождествляется с функцией тогда и только тогда, когда существует один и только один аналитический элемент, принадлежащий мультифункции и являющийся непосредственным аналитическим продолжением каждого элемента, принадлежащего этой мультифункции. Обычным способом определяется граничная точка мультифункции как особая точка некоторого элемента. Точка разветвления определяется с помощью трех элементов, являющихся аналитическим продолжением последовательно друг друга, но не определяющих вместе один элемент, таких, что теоретико-множественная сумма их областей содержит круг без центра, который является особой точкой для всех элементов.

Указывается, что этот подход позволяет получить общие мультифункции, если отказаться от несущественного требования аналитичности, заменив его требованием, которое сводится к однозначности непосредственного продолжения. В частности, можно перейти к функциям многих переменных. Например, многозначная гармоническая функция является общей мультифункцией. А. А. Гольдберг

6623. Об одном вопросе Гайера и Мейера—Кёнига. Эрдёш (Über eine Fragestellung von Gaier und Meyer—König. Erdös Paul), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1957, 60, № 2, 89—92 (нем.)

Построен степенной ряд $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$, с радиусом сходимости 1, $n_{k+1} - n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$, $a_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ и такой, что все точки $\zeta \in \Gamma$ $(|z| = 1)$, $\zeta \neq 1$, являются «регулярными» для $f(z)$ в смысле Гайера и Мейера — Кёнига (РЖМат, 1957, 6978), в то время как по теореме Фабри каждая точка $\zeta \in \Gamma$ $(|z| = 1)$ является особой (в обычном смысле) для этой функции $f(z)$. Н. А. Давыдов

6624. Ультрасферические ряды и интеграл Пуассона. Брусс (Séries ultrasphériques et intégrale de Poisson. Brousse P.), J. Rational Mech. and Analysis, 1956, 5, № 6, 967—986 (франц.)

Изучается суммируемость по Пуассону ряда $g(\theta) \sim \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{\mu}(\cos\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, где C_n^{μ} — полиномы

Гегенбауэра, а

$$a_n=\frac{2^{2\mu-1}\Gamma^2(\mu)}{\pi}\frac{(n+\mu)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2\mu)}\times$$
$$\times\int_0^{\pi} g(\tau)(\sin\tau)^{2\mu}C_n^{\mu}(\cos\tau)d\tau.$$

Предполагается, что $g(\theta)$ имеет конечное число точек разрыва 1-го рода и существует такое c, $0\leqslant c<2\mu+1$, что $(\sin\theta)^c g(\theta)$ ограничено. Функция $w(M)=\Sigma a_n\rho^n C_n^{\mu}(\cos\theta)$ определена в верхнем полукруге D: $x^2+y^2<1$, $y>0$, и может быть там представлена обобщенным интегралом Пауссона:

$$w(M)=\frac{h+1}{4\pi}\iint_{\Sigma} g(P)\frac{(1-\rho^2)\,\delta^h}{(MN)^{h+3}}\,d\sigma_N,\quad h=2\mu-1,$$

где $P(\theta)$ — точка на полуокружности $\Gamma: x^2+y^2=1$, $y>0$; Σ — сфера, полученная вращением Γ, N — переменная точка, лежащая на одной параллели с P, δ — расстояние от N до плоскости XOY. Эта функция решает такую краевую задачу: найти решение уравнения $\Delta w(x,y)+\frac{1+h}{y}w_y(x,y)=0$, ограниченное в окрестности каждой внутренней точки Γ, принимающее на Γ значения $g(\theta)$ во всех точках непрерывности этой функции, и такое, что $(AM)^m w(M)$, $m<h+2$, остается ограниченным в окрестности точки A, где A — любой конец Γ. Указанные условия определяют решение единственным образом. Если M приближается к точке разрыва $g(\theta)$ в направлении, составляющем угол φ с радиусом, то $w(M)\to\frac{1}{2}[g(\theta-0)+g(\theta+0)]+\frac{\varphi}{\pi}[g(\theta-0)-g(\theta+0)]$. Если существует $g'(\theta_0)$, $\theta_0\neq 0,\pi$, то $\frac{\partial w}{\partial\theta}$ имеет в θ_0 угловое предельное значение, равное $g'(\theta_0)$. Рассмотрены примеры разложений для $g(\theta)=(\sin\theta)^{-2a}$, $0<2a<h+2$, и $g(\theta)=(\sin\theta)^{2t-1}$, $t>-\frac{1}{2}$.

Библ. 59 назв. Н. С. Ландкоф

6625. Лемма о многочленах. Лагранжа. Лея, Опяль (Un lemme sur les polynômes de Lagrange. Leja F., Opial Z.), Ann. polon. math., 1955, **2**, № 1, 73—76 (франц.)

Краткое доказательство следующей леммы (Leja F., Ann. Soc. polon. math., 1948, **21**, 80—89; применения: РЖМат, 1955, 1165): Пусть z_0 — точка сгущения множества точек $\zeta_j^{(n)}$ ($j=0,\ldots,n$; $n=1,2,\ldots$ и $\zeta_j^{(n)}\neq\zeta_k^{(n)}$ для $j\neq k$) и

$$L_n^{(j)}(z)=\prod_{k=0,\ k\neq j}^{n}\frac{z-\zeta_k^{(n)}}{\zeta_j^{(n)}-\zeta_k^{(n)}}.$$

Тогда для любого $r>0$ имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\max_{(\zeta_j^{(n)}-z_0<r}|L_n^{(j)}(z_0)|}\geqslant 1.$$

W. Kleiner

6626. Об одном классе рациональных интерполяционных рядов. Миронов В. Т., Уч. зап. Саратовск. пед. ин-та, 1956, вып. 23, 3—81

В работе изучаются так называемые N-ряды. т. е. ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\prod_{k=1}^{n}[(z-u\cdot k^{1/q})/(z-v\cdot k^{1/q})] \qquad (1)$$

($q>0$; u, v — какие-либо комплексные числа, $u\neq 0$, $v\neq 0$, $u\neq v$; при $\arg u=\arg v$ $\left|\frac{u}{v}\right|^q$ иррационально. При $q=1$ ряд (1) был ранее (1935 г.) исследован Ренэ Лагранжем (Lagrange R., Acta Math., 1935, 64).

В гл. I изучается вопрос о сходимости N-рядов. Автор использует найденные им оценки для выражений вида

$$\Pi_n(z)\equiv\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1-\frac{z}{u}\cdot k^{-1/q}\right)\Big/\left(1-\frac{z}{v}\cdot k^{-1/q}\right)\right].$$

Применяя известное преобразование Абеля, автор доказывает, что из сходимости ряда (1) в точке $z=z_0$ вытекает сходимость этого ряда на всей плоскости, если $0<q<1$, или сходимость в полуплоскости $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)(z-z_0)>0$, если $q\geqslant 1$ (точки $z=v\cdot n^{1/q}$, естественно, исключаются). Верен также аналогичный признак абсолютной сходимости. Даются формулы, с помощью которых возможно определить границу полуплоскости сходимости N-ряда. Эти формулы аналогичны формулам, определяющим абсциссу сходимости ряда Ньютона.

Доказывается, что всякий сходящийся N-ряд в своей полуплоскости сходимости не может иметь иных особенностей, кроме, возможно, простых полюсов в точках $\{v\cdot n^{1/q}\}$. Устанавливаются условия, при которых почти все точки последовательности $\{u\cdot n^{1/q}\}$ лежат в полуплоскости сходимости ряда (1).

При $q\geqslant 1$ оценивается порядок роста суммы сходящегося ряда (1).

В гл. II изучается вопрос о разложении в N-ряд функции $f(z)$, мероморфной в некоторой области и имеющей в этой области лишь простые полюса вида $v\cdot n^{1/q}$ (v — фиксированное число).

В работе даны формулы для коэффициентов формального разложения такой функции в ряд (1) и формула для остаточного члена интерполяции (в виде контурного интеграла). При некоторых ограничениях на порядок и индикатрису роста мероморфной функции $f(z)$ указанного типа доказывается возможность ее представления N-рядом.

Рассматривается также вопрос о разложении на простейшие дроби мероморфных функций, представимых N-рядами.

В терминах N-рядов формулируется предложение, равносильное гипотезе Римана о нулях функции $\zeta(z)$. Автор доказывает, как можно с помощью полученных им предложений об N-рядах доказать известный факт о том, что функция $\zeta(z)$ не имеет нулей при $\mathrm{Re}(z)>1$.

В работе отмечается, что из полученных автором результатов вытекают, как частные или предельные случаи, некоторые ранее известные факты, касающиеся рядов Р. Лагранжа, целых интерполяционных рядов типа Ньютона, факториальных рядов и др.

Примечание референта. Автор, видимо, совсем не знаком с работами Г. В. Бадаляна, в которых изучаются многие вопросы, рассмотренные в данной статье. Ряд результатов, приведенных в данной статье в качестве новых, ранее получены и опубликованы (в 1950—1955 гг.) Г. В. Бадаляном или являются простыми следствиями или аналогами результатов Г. В. Бадаляна (см., например, РЖМат, 1956, 6550; 1957, 3938). В частности, результаты §§ 6—7 — частные случаи результатов, опубликованных Г. В. Бадаляном в статье «Обобщенные факториальные ряды» («Сообщения института математики и механики Армянской ССР», 1950, вып. 5). М. Б. Балк

6627. О конформном отображении полигональных областей. Комацу (On conformal mapping of polygonal domains. Komatu Yûsaku), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 6, 279—283 (англ.)

Используя метод зеркальных отображений, применяемый обычно при выводе известной формулы Шварца—Кристоффеля в теории конформных преобразований, автор устанавливает структурную формулу для функции, реализующей конформное преобразование кольца $0<q<|z|<1$ в кольцо, ограниченное двумя многоугольниками с заданными углами. Затем автор формулирует без доказательства теорему относительно вида производной Шварца $\{f(z);z\}$ для функции $f(z)$, реализующей конформное преобразование упомянутого выше кругового кольца в кольцо, ограниченное двумя круговыми многоугольниками с заданными углами.

Примечание референта. Первый результат автора получен еще Тири (Thiry R., C. r. Acad. sci., 1920, **170**, 1366) и независимо от него Н. И. Ахиезером (Аеродинамічні досліди, Труди фіз. мат. відділу ВУАН, Київ, 1928, **7**, вип. 2) и Г. М. Голузиным (сб. «Конформные отображения односвязных и многосвязных областей», М.—Л., 1937, стр. 90—97). Второй результат получен референтом (Тр. Киевск. авиац. ин-та, 1935, 1), и Г. М. Голузиным (см. выше). Все авторы также применяли метод зеркальных отображений.

В. А. Зморович

6628. **Численные методы в конформном отображении. Биркгофф, Янг, Царантонелло** (Numerical methods in conformal mapping. Birkhoff G., Young D. M., Zarantonello E. H.), Proc. Sympos. Appl. Math., 1953, **4**, 117—140 (англ.)

Статья в значительной мере обзорного характера. Проводится сравнительное изучение различных известных методов численного определения функций $f(z)$, конформно отображающей заданную односвязную область на круг, в частности метода С. А. Гершгорина, метода Т. Теодорсона, и их видоизменений. Для интегральных уравнений, к решению которых в этих методах сводится задача, применяется метод итераций с аппроксимацией интегралов суммами. Обсуждается вопрос о сходимости процесса вычислений. Аналогично исследуются интегральные уравнения задач о струйном и непрерывном обтекании плоских контуров. Рассматривается также метод аппроксимации функции $\mathrm{Re}\,[i\ln\frac{z}{f(z)}]$ гармоническими полиномами, с численной ортогонализацией. На примере отображения эллипса с полуосями $a=3$, $b=2$ произведено сравнение трудоемкости предлагаемых схем расчета. П. П. Куфарев

6629. **Интегральные представления некоторых аналитических функций с приложением к конформным отображениям. Комацу** (Integraldarstellugen für gewisse analytische Funktionen nebst den Anwendungen auf konforme Abbilding. Komatu Yûsaku), Kodai Math. Semin. Repts, 1957, **9**, № 2, 69—86 (нем.)

Пусть G будет круг $|z|<1$ или круговое кольцо $0<q<|z|<1$, а $f(z)$ — однозначная мероморфная в G функция, кусочно-регулярная в $\bar{G}$, за исключением полюсов. Пусть, кроме того, $f'(z)$ имеет конечное число нулей в $\bar{G}$. При этих предположениях автор устанавливает для $1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ и $f'(z)$ параметрические (интегральные) представления («структурные формулы»). Используя параметрическое представление для $f'(z)$, автор получает затем структурную формулу для функции $f(z)$, реализующей конформное отображение области G на многолистную полигональную область (одно- или соответственно двусвязную).

Примечание референта. Результаты автора, относящиеся к кругу, получены при более общих предположениях относительно функции $f(z)$ Паатеро (Paatero, Ann. Acad. Sci. Fenn., 1952, A128). Структурная формула для функции, отображающей круг на многолистную полигональную область, получена референтом (Исследования по теории аналитических и обобщенных аналитических функций, Киевск. политехн. ин-т, 1950, 7—8) и Гудманом (Goodman A. W., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **68**, № 2, 204—223). Результаты же, относящиеся к круговому кольцу, являются следствиями теорем 2 и 5 референта (РЖМат, 1957, 4737).

В. А. Зморович

6630. **Некоторые классы звездных функций. Чжо-жэнь** (Wu Zwao-jen), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, **7**, № 2, 167—182 (кит.; рез. англ.)

Изучаются классы звездных и выпуклых однолистных в круге $|z|<1$ функций порядка звездности и выпуклости ρ в смысле Робертсона (Robertson M., Ann. Math., 1936, **37**, 374—408) с p-кратной симметрией вращения. Рассматриваются

а) класс $S_p^*(\rho)$ функций

$$f(z)=z+\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{\nu p+1}^{(p)}z^{\nu p+1},$$

регулярных и однолистных в круге $|z|<1$ и таких, что

$$\mathrm{Re}\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}\geqslant\rho,\ 0\leqslant\rho<1,\ |z|<1;$$

б) класс $K(\rho)$ функций

$$g(z)=z+\sum_{\nu=1}^{\infty}b_{\nu p+1}^{(p)}z^{\nu p+1},$$

регулярных и однолистных в круге $|z|<1$ и таких, что

$$\mathrm{Re}\left\{1+z\frac{g''(z)}{g'(z)}\right\}\geqslant\rho,\ 0\leqslant\rho<1,\ |z|<1.$$

Если $g(z)\in K(\rho)$, то $zg'(z)\in S_p^*(\rho)$. С классом $S_p^*(\rho)$ связан класс функций Σ_ρ^*

$$F(\zeta)=\zeta\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{\nu p}^{(p)}\zeta^{-\nu p}\right)$$

отображающих область $|\zeta|>1$ на плоскость с p-кратно-симметричным звездным порядка ρ дополнением, причем если $z=\frac{1}{\zeta}$, то $\frac{1}{F(\zeta)}=f(z)\in S_p^*(\rho)$.

Для функций классов $S_p^*(\rho)$, $K(\rho)$, Σ_ρ^* устанавливаются структурные формулы.

Необходимыми и достаточными условиями принадлежности функции к одному из упомянутых классов является представимость этой функции одной из формул:

$$f(z)=z\exp\left\{-\frac{1-\rho}{p\pi}\int_0^{2\pi}\ln(1-z^pe^{-i\theta})\,d\alpha(\theta)\right\}$$

для класса $S_p^*(\rho)$,

$$g(z)=\int_0^z\exp\left\{-\frac{1-\rho}{p\pi}\int_0^{2\pi}\ln(1-z^pe^{-i\theta})\,d\alpha(\theta)\right\}dz$$

для класса $K(\rho)$,

$$F(\zeta)=\zeta\exp\left\{\frac{1-\rho}{p\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(1-\frac{e^{-i\theta}}{\zeta^p}\right)d\alpha(\theta)\right\}$$

для класса Σ_ρ^*, где $0\leqslant\rho<1$, $p=1,2,\ldots$ $\alpha(\theta)$ принадлежит классу вещественных неубывающих на $[0,2\pi]$

функций, нормированных условием $\int_0^{2\pi} d\alpha(\theta) = 2\pi$, под знаком ln понимается главная ветвь функции, а интегралы рассматриваются в смысле Стилтьеса.

С помощью установленных структурных формул решается ряд экстремальных задач и строятся однолистные мажоранты.

В частности, оцениваются величины

$$\left|1-\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{-\lambda/2}\left[\frac{2}{3}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}+\frac{1}{2}\right)\right]^{\lambda-1}\right|,\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right|,\quad \left|\arg z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|,$$

$$|Af(z)+Bzf'(z)|,$$

граница выпуклости порядка ρ для класса однолистных функций с p-кратной симметрией вращения и др.

Библ. 11 назв. С. А. Касьянюк

6631. Класс функций со звездообразными образами. У Чжо-жэнь (Wu Zwao-jen), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, 7, № 3, 433—438 (кит.; рез. англ.)

Пусть S_* — класс функций $f(z)=z+\sum_{\nu=2}^{\infty}a_\nu z^\nu$, удовлетворяющих в $|z|<1$ условию $\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\geqslant\frac{1}{2}$. В предшествующей работе автора доказано: Если $f(z)\in S_*$, то любой отрезок $\sigma_n(z)=z+\ldots+a_nz^n$ $(n\geqslant 2)$ функции $f(z)$ звездообразен в круге $|z|<\frac{1}{2}$ при $n\neq 3,4,5$; $3\sigma_n\left(\frac{1}{3}z\right)\in S_*$ при $n\neq 3$ (РЖМат, 1958, 2863).

В настоящей заметке автор показывает, что эти результаты верны при $n=3$. Ю. Е. Аленицын

6632. О коэффициентах мероморфных однолистных функций. Нехари, Нетаньяху (On the coefficients of meromorphic schlicht functions. Nehari Z., Netanyahu E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 1, 15—23 (англ.)

Пусть S есть семейство функций $f(z)=\frac{1}{z}+a_1z+a_2z^2+\ldots$, $|z|<1$, однолистных в единичном круге. Известно, что $|a_1|\leqslant 1$, $|a_2|\leqslant\frac{2}{3}$ и некоторое время казалась правдоподобной гипотеза: $|a_n|\leqslant\frac{2}{n+1}$, $n=1,2,\ldots$ Однако недавно было доказано, что эта гипотеза неверна, по крайней мере для нечетных n, и что точная оценка третьего коэффициента дается неравенством $|a_3|\leqslant\frac{1}{2}+e^{-6}$ (Гарабедян, Шиффер, РЖМат, 1956, 5193).

В реферируемой работе доказывается справедливость указанной гипотезы для подкласса S_l функций $f(z)$ из S, отображающих круг $|z|<1$ на область со звездообразным дополнением относительно начала. Авторы указывают, что хотя они и дают метод, позволяющий по заданному n доказать, что $(n+1)|a_n|\leqslant 2$ для $f(z)\in S_l$, но требуемые вычисления с ростом n настолько усложняются, что очень скоро важность результата не кажется оправдывающей труд, затрачиваемый на его получение. Поэтому в работе этот вопрос рассматривается только для $n=3,4,5,6$.

Доказываются две теоремы.

Теорема 1. Если $f(z)\in S_l$, то имеет место точная оценка: $|a_n|\leqslant\frac{2}{n+1}$, $n=3,4,5,6$.

Эта теорема дополняется следующей теоремой:

Теорема 2. Функция $f(z)$, решающая в классе S_l экстремальную проблему $|a_n|=\max$, $n=1.2,\ldots,$ необходимо имеет вид: $f(z)=z^{-1}\prod_{\nu=1}^{n+1}(1-k_\nu z)^{\lambda_\nu}$, где $|k_\nu|=1$, $\lambda_\nu\geqslant 0$ и $\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}=2$. Ю. Е. Аленицын

6633. Многолистные функции, близкие к выпуклым. Умэдзава (Multiwalently close-to-convex functions. Umezawa Toshio), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 869—874 (англ.)

Гудман (Goodman A. W., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68, 204—223) ввел класс $C(p)$ ($p>0$, целое) функций $f(z)=z^q+\sum_{n=q+1}^{\infty}a_nz^n$ $(1\leqslant q\leqslant p)$, регулярных в $|z|<1$ и обладающих свойством: для каждой функции $f(z)$ из этого класса существует ρ, $0\leqslant\rho<1$, такое, что в промежутке $\rho<r<1$

$$G(r,\theta)=1+\operatorname{Re}\left[re^{i\theta}\frac{\varphi''(re^{i\theta})}{\varphi'(re^{i\theta})}\right]>0,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

и

$$\int_0^{2\pi}G(r,\theta)\,d\theta=2p\pi.$$

В настоящей работе рассматривается класс, названный автором $K(p)$, функций $f(z)$, регулярных в $|z|<1$ и обладающих свойством: для каждой функции $f(z)\in K(p)$ найдется функция $\varphi(z)\in C(p)$, для которой

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f'(z)}{\varphi'(z)}\right]>0 \text{ в } |z|<1.$$

Для этого класса функций получены точные оценки модулей коэффициентов ряда Тейлора, $|f(z)|$ и $|f'(z)|$, а также доказано, что функции класса $K(p)$ — не более, чем p-листны.

Примечание референта. Класс $K(p)$ является одним из классов, введенных ранее референтом (класс $C_\pi(p)$). Все результаты, полученные в настоящей статье для класса $K(p)$, следуют из более общих результатов референта (РЖМат, 1956, 4443, 6529; 1957, 6293). Ю. Д. Максимов

6634. О лемме Шварца для некоторого класса функций. Попова Н. В., Сб. научн. работ. Белорус. политехн. ин-та, 1956, вып. 54, 184—186

Доказывается, что если $\varphi(z)$ голоморфна при $\operatorname{Im} z>0$ и $\operatorname{Im}\varphi(z)>0$, то $|\varphi'(z)|\leqslant\frac{\operatorname{Im}\varphi}{\operatorname{Im} z}$, а если, кроме того, $\lim_{z\to\infty}[\varphi(z)-z]=0$, то $\operatorname{Im}\varphi(z)\geqslant\operatorname{Im} z$. (Первое утверждение является следствием обычной леммы Шварца, а второе есть частный случай известной теоремы Жюлиа-Каратеодори). И. В. Островский

6635. Интегральные теоремы и формулы в алгебрах Клиффорда. Рицца (Teoremi e formule integrali nelle algebre di Clifford. Rizza Giovanni Battista), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 20, № 2, 174—178 (итал.)

Пусть C_n $(n\geqslant 2)$ — алгебра Клиффорда второго порядка $\nu=2^n$, с базисными элементами $1, i_{j_1}, i_{j_1,j_2},\ldots, i_{j_1j_2\ldots j_n}$; $j_1<j_2<\ldots<j_n$, и заданным законом умножения $i_{j_n}^2+1=0$, $i_hi_k+i_ki_h=0$. Автор показывает, что алгебра является прямой суммой $\mu=2^{n-2}$ кватернионных алгебр $Q^{(h)}$ с базисными элементами $\mu_0^{(h)}, \mu_1^{(h)}, \mu_2^{(h)}, \mu_3^{(h)}$, $h=1,\ldots,\mu$, и дает структуру делителей нуля в алгебре.

Далее автор занимается интегральными теоремами и формулами типа Коши.

Пусть $dX^{(h)} = -(dx^{(h)})^*$, $dX = \Sigma_1^\mu dX^{(h)}$ $(x^{(h)} \in Q^{(h)})$, $dw^{(h)} = \Pi_h dX^{(h)}$, $dw = \Sigma_1^\mu d\omega^{(h)}$, где Π_h — внешнее произведение в порядке $h, \ldots, \mu, 1, 2, \ldots, h-1$, а звездочка (*) обозначает присоединенную внешнюю форму. Если $y = \Sigma_1^\mu y^{(h)}$ есть функция в C_n, а $y^{(h)}$ суть функции $x^{(h)}$, регулярные справа в $Q^{(h)}$ и

$$d_h y^{(s)} = \sum_0^3 \frac{\partial y^{(s)}}{\partial x_h^p}\, dx_h^p, \quad d_{[h]} y^{(s)} = dy^{(s)} - d_h y^{(s)},$$

то получаем интегральные теоремы

$$\int_{\Gamma_3} y\, dX = \sum_1^\mu \int_{\Delta_4} d_{[h]} y^{(h)} \wedge dX^{(h)},$$

$$\int_{\Gamma_{3\mu}} y\, dw = \sum_1^\mu \int_{\Delta_{3\mu+1}} d_{[h]} y^{(h)} \wedge dw^{(h)}.$$

где знак $\wedge$ означает внешнее произведение а Δ_4 и $\Delta_{3\mu+1}$ суть произвольные многообразия (Γ_3 $\Gamma_{3\mu}$ — их границы) в области регулярности y справа.

Далее автор устанавливает и интегральную формулу типа Коши. Приведена только формулировка полученных результатов. M. N. Roşculeţ

6636. Об одной теореме Шаха. Рахман (On a theorem of Shah. Rahman Q. I. Publs math., 1957, 5, № 1-2, pp. 40—43) (англ.)

Доказана следующая теорема: Пусть $\varphi(x) > 0$ — действительная суммируемая при любом r в интервале (Δ, r), $\Delta > 0$, функция такая, что $\overline{\lim} \ln \varphi(x) / \ln x = k$ при $x \to \infty$. Пусть

$$P(r) = \int_\Delta^r \varphi(x)\, x^{-1-k}\, dx, \quad Q(r) = r \int_r^\infty \varphi(x)\, x^{(-2-k)}\, dx.$$

Тогда $\overline{\lim} P(r) / Q(r) \geqslant k^{-1}$ при $r \to \infty$ (Требование $Q(r) \not\equiv 0$, отмеченное автором, излишне. *Ред.*) Эта теорема используется при доказательстве двух теорем, усиливающих результат Шаха (Shah S. M., Math. Student, 1942, **10**, 80—82). Приведем одну из них: Если λ — нижний порядок целой функции $f(z)$, $0 \leqslant \lambda < \infty$, $\mu(r, f)$ и $\nu(r, f)$ — максимальный член и центральный индекс $f(z)$ (Пойа Г., Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, II, М., 1956), то $\overline{\lim} \ln \mu(r, f) / \nu(r, f^{(p)}) \geqslant \lambda^{-1}$ при $r \to \infty$, где p — некоторая функция от r, принимающая только целые неотрицательные значения и $p(\nu) = O(\nu / \ln \nu)$, где $\nu = \nu(r, f^{(p)})$. При $p \equiv 0$ отсюда получается теорема Шаха. А. А. Гольдберг

6637. Целые функции как пределы полиномов. Коревар (Entire functions as limits of polynomials. Korevaar Jacob), Lect. Funct. Complex Variable. Ann. Arbor. Univ. Michigan Press, 1955, 421—423 (англ.)

Резюме статьи автора (РЖМат, 1955, 4990).

6638. Об одном классе целых функций. Верблюнский (On a class of integral functions. Verblunsky S.), Quart J. Math., 1957, 8, № 32, 312—320 (англ.)

Пусть $k(u)$ — функция ограниченной вариации (в общем случае комплекснозначная) определенная на отрезке $[0,1]$, причем $k(0) = k(+0)$, $k(1) = k(1-0) \neq 0$. По ней строится целая функция

$$D(z) = 1 - K(z), \quad K(z) = \int_0^1 k(u)\, e^{zu}\, du, \quad z = x + iy.$$

Теорема 1. Каждому $\delta > 0$ соответствует положительное $\eta = \eta(\delta)$, обладающее следующим свойством: если каждый нуль $\{\mu_\nu\}_1^\infty$ функции $D(z)$ является центром круга радиуса δ, то вне этих кругов имеет место неравенства $|D(z)| > \eta$. Если все нули простые и $0 \leqslant |\mu_1| \leqslant |\mu_2| \leqslant \ldots$, то функции

$$\varphi_\nu(t) = e^{\mu_\nu t} \int_{1-t}^1 k(u)\, e^{\mu_\nu u}\, du, \quad \psi_\nu(t) = e^{-\mu_\nu t}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

биортогональны на $[0,1]$, т. е.

$$\int_0^1 \varphi_s(t)\, \psi_\nu(t) = \begin{cases} 0, & s \neq \nu, \\ K'(\mu_\nu), & s = \nu. \end{cases}$$

Теорема 2. Если функция $f(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0,1]$, то при $n \to \infty$ имеем

$$\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu e^{-\mu_\nu t} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(v)\, \frac{\sin n(t-v)}{t-v}\, dv = o(1),$$

$$\alpha_\nu = \frac{1}{K'(\mu_\nu)} \int_0^1 f(u)\, \varphi_\nu(u)\, du$$

для каждой точки t открытого промежутка $(\beta, 1)$, $0 < \beta < 1$. Эта теорема является обобщением результата Г. Герглоца (Herglotz G., Math. Ann., 1908, 65, 87—106), считавшего функцию $k(u)$ вещественной. Я. Л. Геронимус

6639. О нулях целой функции. Рао (On the zeros of an entire function. Rao C. Ramamohana), J. London Math, Soc., 1956, **31**, № 3, 268—275 (англ.)

Пусть $f(x)$ — неотрицательная убывающая для достаточно большого x функция. Обозначим $M = \overline{\lim}_{x\to\infty} x^{-\rho} \times \int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt$; $m = \underline{\lim}_{x\to\infty} x^{-\rho} \int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt$, $L = \lim_{x\to\infty} x^{-\rho} f(x)$; $l = \underline{\lim}_{x\to\infty} x^{-\rho} f(x)$ $(\rho > 0)$.

Легко видеть, что $l \leqslant m\rho$; $L \geqslant M\rho$; $L \leqslant eM\rho$. Автор выводит более точные зависимости между этими величинами. Получается следующий результат:

$$\rho m \cdot \left[1 + \ln \frac{\rho M}{l}\right]^{-1} \leqslant l \leqslant L \leqslant \rho M e^{1-\rho m / L}. \qquad (1)$$

Вводя функции $\varphi(t)$ и $\Psi + (0 \leqslant t \leqslant 1)$, удовлетворяющие уравнениям

$$e^{\varphi(t)}(1 - \varphi(t)) \equiv t, \quad e^{-\psi(t)}(1 + \psi(t)) \equiv t$$

($\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — невозрастающие, $\varphi(0) = 1$; $\psi(0) = +\infty$, $\varphi(1) = \psi(1) = 0$), с помощью (1) автор получает неравенства

$$\rho m [1 + \psi(m/M)]^{-1} \leqslant l \leqslant L \leqslant \rho M e^{\varphi(m/M)}.$$

Отсюда делаются различные заключения относительно l, L, m, M. Например,

$$L + l \leqslant \rho M \left[e^{\varphi(m/M)} + \frac{m}{M}\right]; \quad L - l \leqslant e\sqrt{\rho M(\rho M - l)}.$$

В заключение автор строит примеры функций $f(x)$, у которых $l = 1$, $m = \infty$, $l = 0 < \rho m < \infty = M$, и др. И. В. Островский

6640. Замечание о целых функциях. Кёвари (A note on entire functions. Kövári T.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, **8**, № 1-2, 87—90 (англ.)

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ $(0 < \rho < \infty)$

и типа σ $(0<\sigma<\infty)$,

$$M(r)=\max_{(z)=r}|f(z)|, \quad M'(r)=\frac{d}{dr}M(r),$$

$$M_1(r)=\max_{|z|=r}|f'(z)|.$$

Автор доказывает неравенства

$$1\leqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{M'(r)}{M(r)\,\sigma\rho r^{\rho-1}}\leqslant e,$$

$$1\leqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{M_1(r)}{M(r)\,\sigma\rho r^{\rho-1}}\leqslant e,$$

в которых константы 1 и e не могут быть улучшены.

А. Ф. Тиман

6641. **О дефектных значениях мероморфных функций, характеристическая функция которых очень медленно растет.** Константинеску (Über die defekten Werte der meromorphen Funktionen deren charakteristische Funktion sehr langsam wächst. Constantinescu Cornelius), Compositio math., 1957, **13**, № 2, 129—147 (нем.)

Используя принцип гиперболической меры и ряд лемм, представляющих и самостоятельный интерес, автор доказывает следующие две теоремы.

Теорема 1. Пусть $w(z)$ мероморфна в $|z|<\infty$ и

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,w)\ln\ln\ln r}{(\ln r)^2(\ln\ln r)^2}=h<\infty.$$

Тогда: A) если $h<9/(32\pi)$, то $w(z)$ имеет не более двух дефектных значений; B) если $h<1/(8\pi)$, то $w(z)$ имеет не более одного дефектного значения; C) если $h<1/(32\pi)$ и $\delta(a)>0$, то существует последовательность $|z|=r_n$, $n\to\infty$, на которой $f(z)$ равномерно стремится к a.

Теорема 2. Пусть все a-, b- и c-точки $w(z)$ лежат на n лучах и $\lim_{r\to\infty}\ln T(r,w)/\ln\ln r=\lambda<\infty$. Тогда: A) если $\lambda=2n/(n-3)$, $n\geqslant 3$, то a, b и c не могут одновременно быть дефектными значениями; B) если $\lambda<2n/(n-2)$, $n\geqslant 2$, то среди a, b и c не больше одного дефектного значения; C) если $\lambda<2n/(n-1)$, $n\geqslant 1$, и $\delta(a)>0$, то существует последовательность $|z|=r_n\to\infty$, на которой $w(z)$ равномерно стремится к a.

Примечание референтов. Доказательство теоремы 1 можно считать убедительным, если дополнительно потребовать, чтобы $w(z)$ обладала, хотя бы одним асимптотическим значением или чтобы $\lim T(r,w)/\ln^2 r=\infty$, а также все верхние границы для h умножить на $^2/_3$. Дело в том, что, цитируя (лемма 3) результаты Тумура (Tumura J., Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1941, **17**, 65—69) о том, что если 1) $\overline{\lim}\,T(r,w)/\ln^2 r<\infty$ и 2) a является асимптотическим значением, то существует последовательность $|z|=r_n\to\infty$, на которой $(w\,z)$ равномерно стремится к a, автор выпустил второе условие, без которого Тумура утверждает лишь, что $w(z)$ имеет не более одного асимптотического значения. В статье, цитируемой автором (Valiron G., Rend. Circolo mat. Palermo, 1925, **49**, 415—421), содержится пример $w(z)$, для которой $T(r,w)=O(\ln^2 r)$, но не существует указанной последовательности $|z|=r_n$. Однако можно показать, что результат Тумура остается справедливым, если условие 2) заменить условием 2′) $\delta(a)>0$, а этого достаточно для доказательства леммы 3″. В неравенстве первом сверху на стр. 140 в знаменателе должно стоять 24 вместо 8, что уменьшает границу для h втрое, зато в неравенстве на стр. 139 (6 строка сверху) вместо $2k+1$ можно поставить k, что следует из неравенства Коши — Буняковского.

А. А. Гольдберг, И. В. Островский

6642. **Общая теорема о функциях, голоморфных в единичном круге, и ее приложения (I, II).** Чжуан Ци-тай (Un theorème général sur les fonctions holomorphes dans le cercle unité et ses applications. I, II. Chuang Chi-tai), Чжунго кэсюэ, Scientia sinica, 1957, 6, № 4, 569—621; № 5, 757—831 (франц.)

Работа (I) подразделяется на главы 1—3 и содержит доказательства результатов, опубликованных в основном ранее (РЖМат, 1958, 1985).

Работа (II) подразделяется на главы 4—6. В четвертой главе результаты первых трех глав распространяются на функции, мероморфные в единичном круге и принимающие в нем значения 0 и ∞ конечное число раз.

Доказывается ряд теорем, основной из которых является теорема 1: Пусть функция $F(z)$ мероморфна в круге $|z|<1$ с конечным числом нулей и полюсов; положим $M(r,F)=\max_{|z|=r}|F(z)|$ $(0<r<1)$, $\Pi(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)$, $\Pi_1(z)=\prod_{j=1}^{n'}(z-z_1')$, $\Phi(z)=F(z)\frac{\Pi_1(z)}{\Pi(z)}$, где z_j $(j=1,\ldots,n)$ и z_j' $(j=1,\ldots,n')$ обозначают соответственно нули и полюсы $F(z)$ в круге $|z|<1$ и пусть R — положительное число. Допустим, что существует значение r_0 $(0<r_0<1)$ такое, что

$$M(r_0,\ln\Phi)\geqslant c\,(Q+|\ln\Phi(0)|)\,e^{\frac{\lambda}{-\ln r_0}},$$

где $Q=(n+n'+1)[(n+n')\,l\,(n+n'+1)+R]$, $\ln\Phi(z)$ обозначает ту ветвь, для которой выполняется условие $0\leqslant\operatorname{Im}(\ln\Phi(0))<2\pi$; c и λ — определенные постоянные.

Тогда можно найти число $B>R$ и функцию $\varphi(u)$, голоморфную и однолистную в круге $|u-u_0|<R$, $(u_0=Bi)$, в котором имеют место соотношения

$$|\varphi(u)|<1, \quad F[\varphi(u)]=e^u.$$

В пятой главе дается некоторое уточнение предыдущих результатов, касающихся голоморфных функций.

В качестве примера приведем из этой главы такую теорему: Пусть $F(z)$ голоморфна в круге $z<1$, не принимает в нем значение 0, R $(R>0)$ и δ $(0<\delta<1)$ — два числа.

Допустим, что существует значение r_0 $(0<r_0<1)$ такое, что

$$M(r_0,\ln F)\geqslant c\,(\frac{R}{\delta}+|\ln F(0)|)\,e^{\frac{\lambda}{-\ln r_0}}.$$

Тогда можно найти число B $(B>R)$ и функцию $\varphi(u)$, голоморфную и однолистную в круге $|u|=u_0|<R$ $(u_0=Bi)$, в котором выполняются соотношения

$$|\varphi(u)<1, \quad F[\varphi(u)]=e^u, \quad |\varphi(u)-\varphi(u_0)|<\delta.$$

В шестой главе содержится ряд результатов об областях, одновременно заполняемых значениями мероморфной функции и ее производных. Среди других доказывается теорема: Пусть $F(z)$ мероморфна в круге $|z|<1$ и принимает в нем значения 0 и ∞ конечное число раз; ν и q — целые положительные числа; V $(V>1)$ и δ $(0<\delta<1)$ — два числа. Допустим, что

существует значение $r_0\,(0<r_0<1)$ такое, что

$$M(r_0, \ln\Phi) \geqslant c\,(Q + |\ln\Phi(0)|)^{-\frac{\lambda}{\ln r_0}},$$

где

$$Q = (n+n'+1)\left\{(n+n'+1)[\ln(n+n'+1)+1]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\delta}\ln\frac{e}{\delta}+\frac{\ln V+q}{\delta}\right\}.$$

Тогда можно найти область Δ, расположенную внутри круга $|z|<1$ и диаметра, меньшего δ, обладающую следующим свойством: каждая функция $F^{(m)}(z)\,(m=0,1,\ldots,\nu)$ голоморфна в Δ, выпускает значение 0 и принимает не менее q раз всякое значение из области $\frac{1}{V}<|\zeta|<V$. С. А. Гельфер

6643. «О некоторых периодических характеристических функциях». Лукач («On certain periodic characteristic functions». Lukacs Eugene), Compositio math., 1957, **13**, № 2, 127 (англ.)

Автор сообщает, что в его результаты (РЖМат, 1957, 6307), необходимо внести следующие исправления:

1) В формулировки теорем 1, 2 и леммы 1 необходимо добавить: «которые имеют начало точкой решетки».

2) К следствию из теоремы 1 необходимо добавить: «С параллелограммом периодов, содержащемся внутри полосы регулярности».

3) Во второй строке теоремы 1 слова «valued and periodic» следует заменить на «valued and simple periodic».

Во второй строке теоремы 2 слова «if, and» следует опустить. Б. М. Левитан

6644. Связи одной проблемы Неванлинна и Пика с теорией операторов гильбертова пространства. Надь, Кораньи (Relations d'un problème de Nevanlinna et Pick avec la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien. Sz.-Nagy B., Korányi A.), Acta math. Acad. sci. hung., 1956, **7**, № 3-4, 295—303 (франц.; рез. русск.)

Используя теорему о продолжении изометрического оператора до унитарного (возможно, с выходом в более широкое пространство), авторы дают новое, весьма простое и изящное доказательство следующего факта: Пусть на некотором множестве S, лежащем внутри единичного круга, дана функция $f(s)$; если ядро $[f(s)+\overline{f(t)}]:(1-s\bar{t})\,(s,\,t\in S)$ положительно определенно, то существует аналитическая функция $g(z)$ с $\mathrm{Re}\,g(z)\geqslant 0\,(|z|<1)$, для которой $g(s)=f(s)\,(s\in S)$. Н. И. Ахиезер

6645. Об алгеброидных и алгеброморфных функциях. Лензе (Über algebroide und algebromorphe Funktionen. Lense Josef), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss Kl., 1956 (1957), 237—242 (нем.)

Алгеброморфные и основные алгеброморфные функции, рассматриваемые в работе Вернича (РЖМат, 1958, 4764), являются обобщениями понятия алгебраической функции. В реферируемой работе доказывается, что класс основных алгеброморфных функций содержится в классе алгеброидных функций, а этот последний — в классе алгеброморфных функций, и устанавливаются некоторые другие свойства этих функций. Указывается, что определение основной алгеброморфной функции в работе Вернича некорректно, и взамен его дается другое. Н. В. Ламбин

6646. Мероморфные аппроксимирования на римановых поверхностях. Сакакихара (Meromorphic approximations on Riemann surfaces. Sakakihara Kanenji), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ 1954, A5, № 1, 63—70 (англ.)

Путь D — компактная область на римановой поверхности R, ограниченная конечным числом замкнутых жордановых контуров, P — конечное множество точек в D, Q — множество точек на R, имеющее ровно по одной точке в каждой компактной компоненте $R-\overline{D}$. Доказывается следующая теорема: Всякую функцию, непрерывную в $\overline{D}$ и регулярную в D, можно равномерно аппроксимировать в D функциями, регулярными в некоторой области на R, содержащей $\overline{D}$. Это теорема приводит к следующему усилению теорем Бенке и Штейна (Behnke, Stein, Math. Ann., 1948, **120**, 430—461): Всякую функцию, непрерывную в $\overline{D}$ (в $\overline{D}-P$) и регулярную (мероморфную) в $\overline{D}$, можно равномерно аппроксимировать в $\overline{D}$ функциями, мероморфными на R и имеющими полюсы на множество P $(P\cup Q)$.

Примечание референта. На очереди вопрос о перенесении известной теоремы Лаврентьева — Келдыша — Мергеляна об аппроксимировании полиномами функций, непрерывных на континууме и регулярных во внутренних его точках, на случай римановых поверхностей: в случае замкнутых поверхностей аппроксимирующие функции должны быть рациональными на поверхности с полюсом в заданной точке; в случае открытых поверхностей аппроксимирующие функции должны быть регулярными на всей поверхности. Л. И. Волковыский

6647. О трансцендентных модулях алгебраических римановых поверхностей. Раук (On the transcendental moduli of algebraic Riemann surfaces. Rauch H. E.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 1, 42—49 (англ.)

Множество замкнутых римановых поверхностей данного жанра p, $p\geqslant 2$, разбивается на классы, совокупность которых зависит от $3p-3$ комплексных параметров, называемых модулями. Для конформной эквивалентности двух таких римановых поверхностей необходимо и достаточно, чтобы их модули совпадали. Автор показывает, что в качестве модулей можно взять некоторую совокупность периодов нормированных абелевых интегралов 1-го рода, принадлежащих римановой поверхности. На негиперэллиптической римановой поверхности жанра $p\geqslant 3$ можно построить базис квадратичных дифференциалов, каждый из которых представляется в виде произведения нормированных абелевых дифференциалов 1-го рода.

Доказывается, что если периоды нормированных абелевых интегралов 1-го рода, принадлежащих двум негиперэллиптическим римановым поверхностям S и S' одного и того же жанра p, $p\geqslant 3$, и произведения которых образуют базис квадратичных дифференциалов соответственно на S и S', совпадают, то поверхности S и S' конформно эквивалентны. С. А. Гельфер

6648. О модулях в конформном отображении. Раук (On moduli in conformal mapping. Rauch H. E.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 3, 176—180 (англ.)

Изучается вопрос о конформной эквивалентности двух конечных негиперэллиптических поверхностей с краем в направлении, рассмотренном ранее автором для замкнутых поверхностей (реф. 6647). Ограничиваясь плоскими областями, автор доказывает теорему: Пусть D — плоская область, имеющая негиперэллитический дубль и ограниченная непересекающимися жордановыми кривыми $C_1,\ldots,C_n$.

Пусть $\omega_i\,(i=1,\ldots,n-1)$ — гармоническая мера дуги C_i относительно области D и $w_i=(i=1,\ldots,n-1)$ — аналитическая функция, вещественная часть которой равна ω_i. Пусть далее $\frac{\partial w_i}{\partial z}\cdot\frac{\partial w_j}{\partial z}\cdot dz^2$ с на-

длежаще выбранными комбинациями значков i, j образует вещественно независимый базис квадратичных дифференциалов на D. Пусть, наконец, P_{ij} — периоды ω_i на C_j $(i = 1, \ldots, n-1)$.

Если D' есть подобная область и соответствующие периоды P'_{ij} удовлетворяют соотношениям $P_{ij} = P'_{ij}$, то область D' может быть взаимно однозначно и конформно отображена на область D. С. А. Гельфер

6649. О модулях римановых поверхностей. Раук (On the moduli of Riemann surfaces. Rauch H. E.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 4, 236—238 (англ.)

Дается модификация доказанных ранее автором теорем (реф. 6647 и 6648) о конформной эквивалентности негиперэллиптических римановых поверхностей на случай гиперэллиптических римановых поверхностей. С. А. Гельфер

6650. О римановых поверхностях, допускающих бесконечную циклическую группу конформных преобразований. Одзава (On Riemann surfaces admitting an infinite cyclic conformal transformation group. Ozawa Mitsuru), Kodai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 4, 152—157 (англ.)

Пусть W — открытая риманова поверхность, допускающая бесконечную циклическую группу, порожденную конформным преобразованием T, переводящим W саму в себя. Получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы W можно было конформно отобразить на конечнолистную риманову поверхность, накрывающую z-плоскость. Это условие сводится к разрешимости некоторой неоднородной системы линейных уравнений, коэффициенты которой связаны с решением определенной вариационной задачи для поверхности W. А. А. Гольдберг

6651. Интеграл Коши для функций многих переменных. Аренс (Cauchy integral for functions of several variables. Arens Richard), Tôhoku Math. J., 1956, 8, № 3, 268—272 (англ.)

Предлагается метод, позволяющий интегрировать подынтегральное выражение в интеграле А. Вейля по аналитической цепи без особенностей. Для этого используется цепь в окрестности границы. Окончательная теорема по поводу интеграла А. Вейля удобна для большого числа приложений и доказывается проще, так как не требует ссылки на теорему о триангуляции аналитического многообразия. А. А. Темляков

6652. Неравенства для коэффициентов двойного степенного ряда. Темляков А. А., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, 57, 43—44

Показывается, что установленные автором (РЖМат, 1956, 3784) оценки для коэффициентов степенного ряда $F(w, z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} w^m z^n$ достижимы лишь в случае бицилиндра. Доказывается также, что в остальных случаях справедливы точные оценки

$$|a_{mn}| \leqslant \frac{M(r)}{R_1^m\left(\frac{m}{m+n}\right) R_2^n\left(\frac{m}{m+n}\right)},$$

где $M(r) = \max |F(w, z)|$ при $|w| = rr_1(\tau)$, $|z| = rr_2(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$; $0 < r < 1$, $R_1(\tau) = rr_1(\tau)$, $R_2(\tau) = rr_2(\tau)$. С. А. Еремин

6653. Оценка коэффициентов. Темляков А. А., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, 57, 25—27

Доказывается, что если функция $F(w, z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} w^m z^n$ регулярна в гиперконусе $|w|+|z|<1$ и при $|u|<1$, $|v|<1$ удовлетворяет условию

$$R\left[v \int_0^1 F'_z(u\tau, v(1-\tau))\, d\tau\right] \geqslant -1,$$

$$R\left[u \int_0^1 F'_w(u(1-\tau), v\tau)\, d\tau\right] \geqslant -1,$$

то

$$|a_{mn}| \leqslant 2\,\frac{(m+n)!}{m!\,n!}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$|a_{mn}| \leqslant 2\,\frac{(m+n)!}{m!\,n!}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots; \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

С. А. Еремин

6654. Точные оценки для коэффициентов. Бавринн И. И., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, 57, 19—24

Рассматриваются функция

$$\varphi(z_1, z_2) = \sum_{m,\,n=0}^{\infty} a_{mn} z_1^m z_2^n \qquad (1)$$

и определяющая в смысле Темлякова (РЖМат, 1956, 5835; 1957, 3961) для нее функция $f^*(u, v)$. В случае $a_{00} = 1$, $a_{m0} = 0$ при $m \geqslant 1$ доказывается: 1) Если ряд (1) абсолютно сходится в бицилиндре $\{|z_1|<1, |z_2|<1\}$ и в нем $R(\varphi(z_1, z_2)) \geqslant 0$, то $|a_{mn}| \leqslant 2$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ 2) Если ряд (1) абсолютно сходится в гиперконусе $|z_1| + |z_2| < 1$ и $R(f^*(u, v)) \geqslant 1$ в бицилиндре $\{|u|<1, |v|<1\}$, то $|a_{mn}| \leqslant \dfrac{(m+n)!\,2}{m!\,n!}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. В случае $a_{m0} = 0$ при $m \geqslant 0$, $a_{01} = 1$ и $a_{m1} = 0$ при $m \geqslant 1$ доказывается: 1) Если функция $\varphi(z_1, z_2)$ регулярна в бицилиндре $\{|z_1|<1, |z_2|<1\}$ и для каждого z_1 из круга $|z_1|<1$ однолистна в круге $|z_2|<1$, то $|a_{mn}| \leqslant em$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ 2) Если ряд (1) абсолютно сходится в гиперконусе $|z_1| + |z_2| < 1$ и функция $f^*(u, v)$ для каждого u из круга $|u|<1$ однолистна в круге $|v|<1$, то $|a_{mn}| < \dfrac{(m+n)!\,e}{m!\,(n-1)!}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $n = 2, 3, 4, \ldots$.

С. А. Еремин

6655. Об одном широком обобщении некоторого классического свойства гармонических функций. Асколи (Sopra una larga estensione di una classica proprietà delle funzioni armoniche. Ascoli Guido), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, 17, 3—8 (итал.)

Линейный класс вещественных функций (L), определенных на множестве I, называется экстремальным на $K \subset I$, если для всякой $f \in (L)$ $\sup_K f = \sup_I f$. Если $f_1, f_2, \ldots, f_n \in (L)$ и точка $Q(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ при любом $x \in K$ принадлежит выпуклому телу C, то это же имеет место для любого $x \in I$. Приводится несколько примеров выпуклых тел C, определяемых неравенствами, элементарных следствий для гармонических функций. Н. С. Ландкоф

6656. Нормальные семейства субгармонических функций. Арсов (Normal families of subharmonic functions. Arsove Maynard G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 1, 115—126 (англ.)

Автор изучает вопрос об условиях нормальности семейств δ-субгармонических функций (т. е. функций, представимых в виде разностей двух субгармонических функций). Всякая δ-субгармоническая в области Ω функция $w(z)$ связана, в силу известной теоремы Рисса, с некоторым распределением массы над областью Ω. Введем следующие обозначения: $N_r(z)$ — круг ра-

диуса r с центром в z, $\Phi_w^z(r)$ — полная вариация массы соответствующей функции $w(z)$ в круге $N_r(z)$; $\Phi_w(r) = \sup_{N_r(z)} \Phi_w^z(r)$, $\psi_w(r) = \sup_{N_r(z)} \int_0^r \Phi_w^z(t)\, d \ln t$, где верхние грани берутся по всем кругам $N_r(z)$, для которых $\overline{N_r(z)} \subset \Omega$. Если J — некоторое семейство δ-субгармонических функций, то определим $\Phi J(r)$ и $\Psi J(r)$, как $\sup_{w \in J} \Phi_w(r)$ и $\sup_{w \in J} \psi_w(r)$ соответственно. Автор заметил, что семейство δ-субгармонических функций ведет себя во многих отношениях аналогично семействам гармонических функций, если $\lim_{r \to 0} \psi J(r) = 0$. Приведем в качестве примера одну из полученных автором в этом направлении теорем:

Теорема 1. Пусть J — семейство δ-субгармонических в области Ω функций такое, что функции из J равномерно ограничены и $\lim_{r \to 0} \psi J(r) = 0$, тогда 1) J — нормальное семейство, 2) все функции из J могут быть представлены, как разности непрерывных субгармонических функций, 3) полные вариации масс для всех функций из J равномерно ограничены на всяком компактном подмножестве Ω.

Автор занимается также вопросом о связи между сходимостью последовательности δ-субгармонических функций в метрике L^p, $p \geqslant 1$, и равномерной сходимостью внутри области. Вот один из полученных в этом направлении результатов.

Теорема 5. Пусть J — семейство δ-субгармонических функций в Ω такое, что $\lim_{r \to 0} \psi J(r) = 0$. Если последовательность $\{w_n\} \subset J$ сходится в метрике $L^p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, то $\{w_n\}$ сходится равномерно на компактных подмножествах Ω. Библ. 18 назв.

С. Я. Хавинсон

6657. Об n-метагармонических функциях и гармонических функциях бесконечного порядка. Фридман (On n-metaharmonic functions and harmonic functions of infinite order. Friedman Avner), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 223—229 (англ.)

Пусть E^N обозначает пространство N действительных переменных $x = (x_1, \ldots, x_N)$ с нормой $|x| = (\Sigma x_i^2)^{1/2}$. Функция $u(x)$, определенная в области $D \subset E^N$, называется n-метагармонической в D, если она удовлетворяет уравнению $p(\Delta) u(x) = 0$ в D, где $p(t)$ — полином от t степени n и $\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Функция $u(x)$, определенная и бесконечное число раз дифференцируемая в области D, называется гармонической функцией бесконечного порядка в D, если

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} (|\Delta^n u(x)|)^{1/n} = 0$$

равномерно в некоторой окрестности каждой точки $x \in D$. Область $D \subset E^N$, говорят, обладает свойством A, если существует гиперплоскость $x_1 = x_1^0$ такая, что любая прямая параллельная оси x_1, которая пересекает D, пересекает ее по интервалу, имеющему точку гиперплоскости.

Вначале автор устанавливает справедливость следующего предложения.

Теорема. Пусть $p(t)$ — полином с действительными коэффициентами и имеет следующее разложение: $p(t) = \prod_{i=1}^{k} (t - \alpha_i)^{n_i} \prod_{i=1}^{l} (t - \beta_i)^{m_i} (t - \bar{\beta}_i)^{m_i}$, где α_i, β_i соответственно, действительные и комплексные числа. Рассматривается линейное эллиптическое уравнение

$$p(\Delta) u(x) = 0$$

в области D, обладающей свойством A. Тогда общее решение этого уравнения в любой области $D' \supset \bar{D}$ имеет следующее представление в D

$$u(x) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{n_i - 1} x_1^j u_j^{\alpha_i}(x) + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} x_1^j \operatorname{Re}\{u_j^{\beta_i}(x) + u_j^{\bar{\beta}_i}(x)\},$$

где $u_j^{\gamma}(x)$ — решение уравнения $(\Delta - \gamma) u(x) = 0$ в D. Как приложение этой теоремы автор устанавливает обобщение теоремы Лиувилля на n-метагармонические функции. В конце работы автор дает обобщение теоремы Лиувилля и на гармонические функции бесконечного порядка.

А. А. Темляков

6658. Обобщенные итерированные операторы Лапласа. Чэнь Юн-хэ, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, 7, № 1, 51—62 (кит.; рез. англ.)

Для функции $u(P)$, суммируемой в области D m-мерного евклидова пространства, вводится с помощью сферических средних по довольно громоздкой явной формуле обобщенный n-кратный оператор Лапласа $\Delta_K^{n,\alpha} u(P)$, зависящий от параметров $K = 0, 1, \ldots$ и $\alpha > 0$. Доказано, что если $u \in C^{2n}(D)$, то $\Delta_K^{n,\alpha} u(P) \equiv \Delta^n(P)$. Если же $u \in C^{2n-2}(D)$, и $(-1)^{n-1} \Delta_K^{n,\alpha} u(P) \equiv 0$ $(\leqslant 0)$ для некоторых $K \geqslant 0$ и $\alpha \geqslant 2$, то $u(P)$ — гармоническая (субгармоническая) функция порядка n в D.

А. Д. Мышкис

6659. Распространение многократных операторов Лапласа. Чэнь Юн-хэ, Scientia sinica, 1958, 7, № 1, 19-29 (русск.)

Перевод с китайского (реф. 6658). Перевод заглавия статьи — неточный.

6660. О почти суб-бигармонических функциях. Хаяси (On almost sub-biharmonic functions. Hayashi Kenji), Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. A, 1956, 10, № 2, 133—140 (англ.)

Локально суммируемая функция u в n-мерном евклидовом пространстве называется почти суб-бигармонической, если $\Delta^{2*} u \leqslant 0$ (в смысле теории обобщенных функций). Основные критерии субгармоничности перенесены на почти субгармонические функции в работах Шварца (Schwartz L., Théorie des distributions, II, 1951, 76) и Тасиро (РЖМат, 1956, 8829). В данной работе совершен аналогичный перенос основных критериев суб-бигармоничности, полученных Брадфордом (РЖМат, 1954, 1655). После этого переноса критерии Брадфорда своей формы не меняют, но участвующее в них осреднение по сферам понимается в смысле теории обобщенных функций, а сами критерии предполагаются выполненными для почти всех (а не всех) положений центра этих сфер.

А. Д. Мышкис

6661. Об аналитических функциях порядка n (приложение к плоской задаче теории упругости). Сюрай (On the analytic functions of order n (application to the plane elasticity). Süray Saffet), Quart. Appl. Math., 1957, 15, № 3, 283—290 (англ.)

Изучаются свойства аналитических функций порядка n, т. е. функций вида

$$\Omega_n(z, \bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \bar{z}^{\nu} \cdot f_{\nu}(z)$$

($\bar{z} = x - iy$, $f_{\nu}(z)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ — любые анали-

тические функции комплексного переменного $z = x + iy$), введенных Бургатти (Burgatti P., Boll. Unione mat. ital., 1922, 1, 8—12) как некоторых решений уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^h H = 0, \qquad (1)$$

для подходящего целого положительного h. Всякое решение H этого уравнения называется полигармонической функцией порядка h. Автор называет число n для функций Ω_n «порядком аналитичности» этой функции, а наименьшее число h в уравнении (1), которому удовлетворяют действительная и мнимая части Ω_n — «порядком гармоничности Ω_n».

Основные результаты:

1. Общий вид действительной аналитической функции n-го порядка:

$$\omega_n \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_\nu^\mu \bar{z}^{n-\nu} \cdot z^{n-\mu},$$

где коэффициенты a_k^k действительные и $a_j^k = a_j^k (k, j = 1, \ldots, n)$.

2. Если порядок аналитичности и порядок гармоничности функции $\Omega_n(z, \bar{z})$ равны одному и тому же числу n, то для любых полиномов $p(z)$ и $q(z)$ (одной степени k и без общих нулей) получим, что порядок аналитичности и порядок гармоничности функции $(\bar{p})^{n-1} \cdot \Omega_n\left(\frac{p}{q}, \frac{\bar{p}}{\bar{q}}\right)$ равен каждый $k(n-1)+1$. Кроме того, для таких полиномов $p(z)$ и $q(z)$ и для всякой действительной полигармонической функции $H(z, \bar{z})$ порядка n имеем: функция вида $(q\bar{q})^{n-1} \times H\left(\frac{p}{q}, \frac{\bar{p}}{\bar{q}}\right)$ есть полигармоническая порядка $k(n-1)+1$.

3. Обозначая аргумент комплексной функции $\Omega_n(z, \bar{z})$ через (-2θ), автор рассматривает на плоскости xy такую кривую C_h, направление которой в каждой точке образует угол θ с осью x, и называет «сетью главных линий, связанной с функцией Ω_n» семейство кривых C_h вместе с их ортогональными траекториями. Доказывается теорема: Для всякой функции $\Omega_n(z, \bar{z})$ найдется такая действительная аналитическая функция ω_m любого порядка m, что функции: $\omega_m \cdot \Omega_n$ и Ω_n имеют одну и ту же сеть главных линий.

4. В заключение автор формулирует для случая $n = 2$ полученные им результаты в терминах плоской задачи теории упругости, в которой применяются аналитические функции порядка 2.

Опечатка: на стр. 284, строка 3 снизу, напечатано $\delta_1^{(m)} P = -\delta_2^{(m)} Q$, вместо $\delta_2^{(m)} P = -\delta_1^{(m)} Q$.

Библ. 11 назв. В. С. Федоров

6662. К теории псевдоаналитических функций. Херш (Contribution à la théorie des fonctions pseudo-analytiques. Hersch Joseph), Comment. math. helv., 1956, 30, № 1, 1—19 (франц.)

Следуя Пфлугеру (Pfluger A., C. r. Acad. sci., 1950, 231, 1022 — 1023), автор называет внутреннее отображение $w = w(p)$ области G D-псевдоаналитическим (соответственно функция, осуществляющая отображение, называется D-псевдоаналитической), если для всякой точки $p \in G$ найдется такая окрестность $U(p)$, что всякий криволинейный «четырехугольник» $Q \subset U(p)$ с модулем μ переходит в криволинейный «четырехугольник» $Q' \subset U'(w(p))$ с модулем μ', причем

$$D^{-1}\mu \leqslant \mu' \leqslant D\mu \ (D \geqslant 1). \qquad (1)$$

Здесь под криволинейным «четырехугольником» Q понимаем произвольную замкнутую жорданову кривую с отмеченными четырьмя точками — «вершинами». В том случае, когда Q — настоящий прямоугольник со сторонами β' и β'' длины b и сторонами α' и α'' длины a, модуль $\mu = \mu_{\beta'\beta''}$ определяется как отношение a/b. Это определение очевидным образом распространяется на криволинейные «четырехугольники» с помощью конформного отображения.

Если D-псевдоаналитическое отображение является топологическим, то оно называется D-псевдоконформным (это понятие, конечно, ничего общего не имеет с псевдоконформными отображениями в теории функций многих переменных). D-псевдоаналитическое отображение $w(p)$ можно представить в виде суперпозиции D-псевдоконформного и аналитического отображений.

Автор рассматривает разнообразные внутренние и граничные свойства D-псевдоаналитических и D-псевдоконформных отображений и применяет эти исследования к различным вопросам теории функций. Так, относительно поведения D-псевдоконформных отображений в замкнутой области доказывается теорема: Пусть Q — некоторый криволинейный «четырехугольник» и Q' — его образ при D-псевдоконформном отображении $z' = f(z)$, которое остается топологическим на границе Q. Тогда выполняется неравенство (1) для модулей $\mu = \mu(Q)$ и $\mu' = \mu'(Q')$. Далее рассматривается обобщение на D-псевдоаналитические функции известных для аналитических функций теорем Шварца, Шоттки, Иенсена, Бляшке, Фрагмена — Линделёфа. Приведем, в качестве примера, полученное автором распространение теоремы Бляшке.

Пусть $w(z)$ — D-псевдоаналитическая и ограниченная в круге $|z| < 1$ функция и $a_1, \ldots, a_k, \ldots$ — его нули кратности $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ соответственно. Тогда ряд $\sum_1^\infty n_k (1 - |a_k|)^D$ сходится. Для получения упомянутых результатов автор разбирает вопрос о вариации при D-псевдоконформных отображениях гармонической и гиперболической меры.

Далее рассматривается вопрос о вариации при D-квазиконформных отображениях экстремальной длины, введенной Альфорсом и Бейрлингом. (При этом под D-квазиконформным отображением понимается топологическое отображение, обладающее непрерывными частными производными и переводящее бесконечно малые окружности в эллипсы, у которых отношение большей полуоси к меньшей остается ограниченным числом $D \geqslant 1$.) Автор доказывает следующий результат: Пусть $z' = f(z)$ — D-квазиконформное отображение области G на G'. Пусть C — счетное семейство кривых в G и C' — его образ.

Тогда $D^{-1}M(C) \leqslant M(C') \leqslant DM(C)$. Здесь $M(C)$, $M(C')$ — экстремальные длины семейств C и C' соответственно. (Как известно, при конформном отображении $M(C) = M(C')$). Получен и ряд других теорем подобного рода. Эти теоремы применяются к получению нового обобщения леммы Шварца.

Библ. 17 назв.; отсутствуют ссылки на работы советских математиков. С. Я. Хавинсон

6663. Топологическое определение псевдогармонически-сопряженной функции. Берштейн И., Ж. чистой и прикл. матем. Акад. РНР, 1956, 1, № 1, 51—54

В работе Токи (Tôki Y., Osaka Math. J., 1951, 101—122) была дана топологическая характеристика псевдогармонической на топологической поверхности функции $u(p)$ (Аналогичный результат, полученный независимо, содержится также в работе А. И. Фета и Л. Б.

Бодрецовой, РЖМат, 1957, 1365). В этой же работе была также предпринята попытка дать топологическую характеристику функции, псевдогармонически-сопряженной с $u(p)$ (так называется функция $v(p)$, для которой отображение $w = u(p) + iv(p)$ будет внутренним). Эта попытка оказалась, однако, неудачной (см. пример Морса в реферате на упомянутую работу Токи, Math. Revs, 1952, 13, № 3, 234).

Автор реферируемой работы дает простое решение этого вопроса, доказывая следующую теорему: Для того чтобы непрерывная вещественная функция $v(p)$ была псевдогармонически сопряжена с псевдогармонической функцией $u(p)$, необходимо и достаточно, чтобы $v(p)$ определяла внутреннее отображение (в числовую прямую) на каждой компоненте любого уровня функции $u(p)$. Г. Д. Суворов

6664. **О характере особенности течения сжимаемой жидкости при дозвуковом режиме в окрестности точки излома кромки перед дельта-видным крылом. Гиро** (Sur la nature de la singularité d'un écoulement de fluide compressible au voisinage de la pointe avant d'une aile delta en régime subsonique. Guiraud Jean-Pierre), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 25, 2012—2014 (франц.)

Вопрос сводится к отысканию значений ν, для которых существует гармоническая функция вида $\Phi(x_1, x_2, x_3) = R^\nu F\left(\frac{x_1}{R}, \frac{x_2}{R}, \frac{x_3}{R}\right)$, $R = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, удовлетворяющая условиям:

$$\Phi'_{x_3}(x_1, x_2, 0) = 0 \text{ при } |x_2| < x_1 \operatorname{tg}\gamma;\ \Phi(x_1, x_2, 0) = 0 \text{ при } |x_2| > x_1 \operatorname{tg}\gamma.$$

Исследуется случай малого γ и показывается, что $\nu \simeq 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos\gamma)$. Н. С. Ландкоф

6665. **О медленном установившемся движении бесконечной вязкой жидкости, вызываемом вращением цилиндра. Кхамруи** (On the slow steady motion of an infinite viscous liquid due to the rotation of a cylinder. Khamrui S. R.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, 49, № 2, 61—66 (англ.)

Дается новый способ решения задачи, указанной в заглавии. Предполагается, что бесконечный цилиндр медленно вращается с постоянной угловой скоростью Ω в вязкой жидкости, покоящейся на бесконечности. Известно, что при пренебрежении инерциальными членами (это возможно при малых числах Рейнольдса), функция тока $\psi(x, y)$, рассматриваемого двумерного течения, удовлетворяет бигармоническому уравнению. Используя этот факт, автор применяет метод, предложенный Н. И. Мусхелишвили для решения плоской задачи теории упругости. Записывая функцию тока по формуле Гурса $\psi(x, y) = 2\,\mathrm{Re}\,[\varphi_1(z) + z\chi_1(z)]$, он получает для $\varphi_1(z)$ и $\chi_1(z)$ интегральные формулы, выражающие эти функции через функцию $z = \omega(\zeta)$, отображающую конформно единичный круг на внешность поперечного сечения цилиндра.

Даны формулы, выражающие через $\omega(\zeta)$, компоненты скорости, давление и вращающийся момент, приложенный к цилиндру. В качестве примеров рассмотрены круглый и эллиптический цилиндры. В. К. Иванов

6666.* **Гидромеханический расчет плотины при наличии двух шпунтов и конечной глубине водопроницаемого грунта. Фильчаков П. Ф.** (Гідромеханічний розрахунок греблі при наявності двох шпунтів та при скінченній глибині водопроникного грунту. Фільчаков П. Ф.), Доповіді АН УРСР, 1953, № 1, 11—16 (укр.; рез. русск.)

Рассматривается задача о гидромеханическом расчете двухшпунтового заглубленного флютбета с горизонтальным основанием и плоским понуром, при различных отметках дна верхнего и нижнего бьефов и конечной глубине водопроницаемого грунта. Решение выражается в замкнутой форме через эллиптические функции. Приводится частный случай: двухшпунтовый симметричный флютбет. (Более подробное изложение материала заметки см. П. Я. Полубаринова — Кочина, Теория движения грунтовых вод, М., 1952, 114—121). М. Т. Нужин

См. также: 6454 Д, 6753, 6818, 6819, 6842, 6846, 6867, 6874, 6876, 6880

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, И. Н. Векуа, А. Г. Свешников*

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6667. **Исследования в связи с одним важным дифференциальным уравнением первого порядка. Бандич** (Истраживања у вези са једном важном диференцијалном једначином првог реда. Бандић И.), Билтен Друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1956, кн. 7, 54—59 (сербо-хорв.; рез. нем.)

Обозначения: $j = 1.2$; a_j, b — функции x; $\Delta(a_j)$ — логарифмическая производная по x от a_j/b; C — произвольная постоянная. Показано, что общие решения $y = y(x, c)$ и $z = z(x, c)$ соответственно уравнений

(1): $a_0 y'^n + a_1 y^n = b$

и

(2): $na_0 z' = a_1\Delta(a_1)z^{n+1} + na_1 z^n + a_0\Delta(a_0)z + nz_0$

связаны соотношением $(a_0 + a_1 z^n)\, y^n = bz^n$.

Если $a_0 \equiv a_1 \equiv 1$ и $n = 2$, то подстановкой $z = i + u$ уравнение (2) приводится к специальному уравнению Абеля, для которого Кьеллини (A. Chiellini, Boll. Unionemat. ital., 1931, 10, 301 — 307) указаны достаточные условия интегрируемости в квадратурах. Таким образом удается сформулировать достаточные условия (на b) интегрируемости $y'^2 + y^2 = b(x)$ в квадратурах.

Библ. 6 назв. Замеченные опечатки: стр. 54, строка 3 снизу, вместо n всюду должно быть ν.

Ю. С. Богданов

6668. **Решение дифференциального уравнения без применения комплексных чисел. Паскуаль** (Solving differential equations without complex numbers. Pascual Michael J.), Math. Mag., 1957, 31, № 2, 93—94 (англ.)

6669. **Об интегрировании линейного дифференциального уравнения третьего порядка в замкнутой форме. Попов** (Über die Integration der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung in geschlossener Form. Popov B. S.), Билтен Друшт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1956, 7, 17—19, (нем.; рез. макед.)

Для уравнения

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0 \qquad (1)$$

с переменными коэффициентами устанавливаются некоторые соотношения между коэффициентами, при кото-

рых оно интегрируется в квадратурах. Подстановкой $y = e^{-\frac{1}{3}\int a_1 dx} z$ уравнение (1) приводится к виду

$$z''' + Rz' + Qz = 0. \qquad (2)$$

Рассматриваются случаи $Q = R'$ и $Q = 0$. В первом случае (2) имеет первый интеграл $z'' + Rz = C_1$. Если $R = -(a_1^2 + a_1')$, то уравнение $u'' + Ru = 0$ имеет частное решение $u_1 = e^{\int a_1 dx}$, и соответствующее уравнение (1) интегрируется в квадратурах. В случае $Q = 0$ уравнение (2) приводится к виду $v'' + Rv = 0$, $v = z'$. Если $R = -(a_1^2 + a_1')$ или $R = -[(a_1 + a_1'/a_1)^2 + (a_1 + a_1'/a_1)']$, то соответствующее уравнение (1) интегрируется в квадратурах. Имеется опечатка: на стр. 19 вместо $^8/_{28}$ должно быть $^8/_{27}$. Н. М. Матвеев

6670. Спектр матрицы дифференцирования около точки покоя. Тартаковский В. А., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 7, 52—67 (рез. англ.)

Как было показано в более ранних работах автора (Докл. АН СССР, 1950, **72**, № 4, 633 — 636; № 5, 853 — 856), изучение системы дифференциальных уравнений

$$dx_\nu / dt = f_\nu(x_1, \ldots x_n) \qquad (\nu = 1,2,\ldots, n), \qquad (*)$$

где $f_\nu(x_1,\ldots, x_n)$ — аналитические функции, обращающиеся в нуль в точке $O(0,\ldots, 0)$, в окрестности O можно свести к изучению линейного матричного уравнения

$$dX / dt = X\widetilde{A},$$

где $\widetilde{A}$ — бесконечная направо и вниз ступенчатая матрица, т. е. такая матрица, элементами A_p^q которой являются квадратные матрицы определенной структуры, и $A_p^q = 0$ при $p < q$, X — однострочная матрица

$$\| x_1,\ldots, x_n, x_1^2, x_1x_2,\ldots, x_n^2,\ldots, x_1^k, x_1^{k-1}, x_2,\ldots, x_n^k,\ldots, \|$$

Получены свойства характеристических чисел матрицы $\widetilde{A}$:

Если $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$ — характеристические числа системы первого приближения для (*), то характеристические числа матрицы $\widetilde{A}$ имеют вид

$$\lambda_{m_1\ldots m_n} = m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n,$$

где $m_i\,(i = 1,\ldots, n)$ — целые неотрицательные числа, не равные нулю одновременно. Точка O называется примитивной или не примитивной точкой покоя, в зависимости от того, существует или нет среди чисел $\lambda_{m_1\ldots m_n}$ сходящаяся последовательность.

Доказано, что для непримитивности O необходимо и достаточно, чтобы наименьший выпуклый многоугольник, заключающий в себе все $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$, рассматриваемые как точки в комплексной плоскости, не содержал нуля.

Пусть O — примитивная точка покоя, α — характеристическое число конечной кратности матрицы $\widetilde{A}$, g — наивысший из номеров p диагональных матриц A_p^p, имеющих α своим характеристическим числом. Тогда системой элементарных α-делителей матрицы $\widetilde{A}$ называется система элементарных делителей, соответствующих характеристическому числу α, матрицы $A^{(g)}$, состоящей из тех A_p^q, у которых $p, q \leqslant g$. Указано на некоторые свойства системы элементарных делителей матрицы $\widetilde{A}$.

Доказаны некоторые общие предложения о ступенчатых матрицах, и о матрицах, элементами которых являются полиномы от параметра λ. Г. Л. Мизернюк

6671. Матричный метод для решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с двумя переменными. Поттерс (A matrix method for the solution of a linear second order difference equation in two variables. Potters M. L.), Rapp. Math. centrum, 1955, № 003, 1—13 (англ.)

6672. Интерпретация тела частного дифференциальных операторов в применении ее к теории упруго-вязких тел. Моисил (Interpretarea corpului cîturilor de operatori diferentiali cu o aplicatie la teoria corpurilor vîsco-elasticé. Moisil Gr. C.), Bull. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. sec. mat. şi fiz., 1955, **7**, № 4, № 1, 126—138 (рум.; рез. франц., русск.)

Автор считает, что две пары дифференциальных уравнений

$$A_1\left(\frac{d}{dx}\right)\psi = B_1\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi$$
$$A_2\left(\frac{d}{dx}\right)\psi = B_2\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi$$

соответствуют равенству рациональных дробей A_1 / B_1 и A_2 / B_2. Сложение $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ интегралов для системы

$$A_1\left(\frac{d}{dx}\right)\psi = B_1\left(\frac{d}{dx}\right)\psi_1$$
$$A_2\left(\frac{d}{dx}\right)\psi = B_2\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi_2$$

соответствует сложению $A_1 / B_1 + A_2 / B_2$. Исключение φ из соотношения

$$A_1\left(\frac{d}{dx}\right)\psi = B_1\left(\frac{d}{dx}\right)\theta$$
$$A_2\left(\frac{d}{dx}\right)\theta = B_2\left(\frac{d}{dx}\right)\theta$$

соответствует произведению $A_1 / B_1 \cdot A_2 / B_2$.

Подобные операции встречаются в случае смешения при одинаковых усилиях или при равных деформациях упругого тела и вязкого тела или упруго-вязких полученных таким путем тел. Резюме автора

6673. Изучение нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка и связь их с первой и второй трансцендентностью Пенлеве. Дейвис (Studies relating to a non-linear differential equation of second order, with special reference to the first and second transcendents of Painlevé. Davis Harold T. Nonlinear differential equations of the second order. Evanston, Ill., Northwestern Univ. 1955, 1—72 (англ.)

Исследуются дифференциальные уравнения вида

$$Ay'' + By' + Cy'^2 + D = 0,\ y' = dy / dx, \qquad (1)$$

где A, ..., D — полиномы от y с коэффициентами, являющимися функциями от x (см. Ince, Ordinary differential equations, Longmans-Green, London, 1926, 317). Многие дифференциальные уравнения, встречающиеся в приложениях математики, имеют вид (1), этим объясняется важность указанного класса дифференциальных уравнений.

Среди последних имеются уравнения, критические точки которых неподвижны и которые могут быть сведены к одному из 5 канонических типов.

Из них было найдено 6 интегрируемых в терминах «известных» функций. Первые два из 6 являются диффе-

ренциальными уравнениями для первой и второй трансцендентности Пенлеве

$$y'' = 6y^2 + \lambda x, \qquad (2)$$
$$y'' = 2y^3 + xy + \mu \qquad (3)$$

и подробно изучаются в настоящей статье.

Сначала автор исследует действие дробно-линейного преобразования y на (1), предполагая, что это преобразование увеличивает степени полиномов $A,\ldots, D$. Затем он рассматривает преобразование x, в частности дробно-линейное.

Большая часть статьи посвящена уравнениям (2) и (3). Если $\lambda = 0$, то решение уравнения (2) может быть представлено в виде

$$y(x, 0) = \frac{-C^2k^2}{1+k^2} + \frac{C^2}{\mathrm{Sn}^2(C(x-x_1), k)},$$

где x_1 и C — произвольные константы и $1 - k^2 + k^4 = 0$. Для больших λ автор получает

$$y(x, \lambda) = A + \frac{\beta}{S^2(C(x-x_1))},$$

где x_1 и C — произвольные, A и B зависят от λ, C, и x_1 и $S(v)$ — новая трансцендентная функция, которая сводится к $\mathrm{Sn}\, v$, когда $\lambda = 0$. Получены различные разложения в ряд $y(x, \lambda)$ в окрестности полюса и обыкновенной точки. Они используются для табулирования 1-й трансцендентности Пенлеве.

Даются таблицы y и y' (с начальными значениями $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$) для $\lambda = 0\,(1)\,5$, $x = -1\,(01)\,1$, и графики. Для решения (3) также получены разложения в окрестности сингулярных и регулярных точек, даются таблицы y и y' (с начальными значениями $y=1$, $y' = 0$, когда $x = 0$) для $\mu = 0\,(1)\,5$ и $-1\,(01)\,1$ (кратко для $\mu > 3$) и графики. Статья заканчивается 4 приложениями со списком формул. Библ. 41 назв.

А. Erdélyi

Перев. из Math Revs, 1956, **17**, № 5, 484.

6674. **Асимптотическое решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка в области, содержащей точку поворота и регулярную особенность. Торн** (The asymptotic solution of linear second order differential equations in a domain containing a turning point and a regular singularity. Thorne R. C.), Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1957, **A 249**, № 971, 585—596 (англ.)

Рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \left\{u^2\left(1 + \frac{\alpha^2}{t^2}\right) - \frac{1}{4t^2} + g(t)\right\} Y, \qquad (1)$$

u — большой параметр, α — фиксированный параметр, $g(t)$ — регулярная функция в открытой односвязной области D, содержащей $t = 0$, $t = \pm i\alpha$ как внутренние точки, ограниченной конечным числом прямых; кроме того, $g(t) = 0\left(|t|^{-1-\sigma}\right)$ $(\sigma > 0)$ при $|t| \to \infty$ в D равномерно относительно $\arg t$; D' — аналогичная область, лежащая в D вместе с границей. Дается асимптотическое представление для двух линейно независимых решений Y_0, Y_1 уравнения (1) в D_0 и D_1 — двух специально определяемых подобластях D', содержащих 0, $\pm i\alpha$

$$Y_0(t) = t^{1/2} I_m(ut)\left\{\sum_{s=0}^{N-1} \frac{A_s(t)}{u^{2s}} + O\left(\frac{1}{u^{2N}}\right)\right\} +$$
$$+ \frac{t^{1/2} I'_m(ut)}{u}\left\{\sum_{s=0}^{N-1} \frac{B_s}{u^{2s}} + \frac{t}{1+|t|} O\left(\frac{1}{u^{2N}}\right)\right\} \qquad (2)$$

в D_0, $m = \alpha u$, $A_s(t)$, $B_s(t)$ некоторые известные аналитические функции t. При $u \to \infty$ члены $O\left(\frac{1}{u^{2N}}\right)$ носят равномерный характер относительно t. Аналогичное представление дано для $Y_1(t)$ в D_1 (через $K_m(ut)$), а также для производных $Y'_0(t)$, $Y'_1(t)$.

Для решения уравнения

$$d^2w/dz^2 = \{u^2z^{-2}(z_0 - z)\, p_1(z) + z^{-2}q_1(z)\}\, w, \qquad (3)$$

где $p_1(z) = a^2/z_0 + zO(1)$, $q_1(z) = b + zO(1)$ при $z \to 0$, рассматриваемого на плоскости z с размером по действительной положительной оси, идущим от $z = 0$ через $z = z_0$ ($\mathrm{Im}\, z_0 = 0$), может быть на основании (2) получено асимптотическое разложение в области, содержащей $z = 0$, z_0^+, z_0^- (z_0^+, z_0^- точки, соответствующие верхнему и нижнему берегу). Для этого специальным преобразованием переменных уравнение (3) приводится к виду (1), причем $z = 0$, z_0^+, z_0^- переходят в $t = 0$, $-i\alpha$, $+i\alpha$ (α связано с величинами a и b). Указывается на применимость теории к функциям Лежандра.

А. Б. Васильева

6675. **Об одном обобщении дифференциального уравнения, которому удовлетворяет присоединенная функция Лежандра. II. Кёйперс, Мёленбелд** (On a generalisation of Legendre's associated differential equation. II. Kuipers L., Meulenbeld B.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1957, **A60**, № 4, 444—450; Indagationes math., 1957, **19**, № 4, 444—450 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1958, 5676.

Исследуется второе линейно независимое от $P_k^{m,n}(z)$ решение линейного уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} +$$
$$+ \left\{k(k+1) - \frac{m^2}{2(1-z)} - \frac{n^2}{2(1+z)}\right\} w = 0,$$

которое обозначается через $Q_k^{m,n}(z)$ и называется обобщенной присоединенной функцией Лежандра второго рода.

Доказывается, что для всех значений k, m и n, за исключением таких, при которых $k + (m+n)/2$ есть целое отрицательное число и $k - (m-n)/2$ есть целое число, можно представить функции $Q_k^{m,n}(z)$ в форме интеграла Похгаммеровского типа

$$Q_k^{m,n}(z) = \frac{e^{-\pi i(2k-1)}}{\sin\pi(k-(m-n)/2)\sin\pi(k+(m-n)/2)} \times$$
$$\times \frac{\Gamma(k+(m+n)/2+1)}{\Gamma(k-(m-n)/2+1)} \times$$
$$\times \frac{(z-1)^{m/2}(z+1)^{n/2}}{2^{k+(m+n)/2+3}} \int_C^{(-1+,\,1+,\,-1-,\,1-)} \psi(t)\, dt,$$

где

$$\psi(t) = \frac{(t-1)^{k-(m-n)/2}(t+1)^{k+(m-n)/2}}{(t-z)^{k+(m+n)/2+1}}$$

Далее доказывается, что при $|z-1| > 2$ имеет место

представление функции $Q_k^{m,n}(z)$ через гипергеометрический ряд

$$Q_k^{m,n}(z) = \frac{e^{\pi i m}\, 2^{k-(m-n)/2}\,(z-1)^{-k-n/2-1}\,(z+1)^{n/2}}{\Gamma(2k+2)} \times$$
$$\times\, \Gamma(k+(m+n)/2+1)\,\Gamma(k+(m-n)/2+1) \times$$
$$\times\, F\{k-(m-n)/2+1,\ k+(m+n)/2+1;$$
$$2k+2;\ 2/(1-z)\}.$$

Наконец, если имеют место оговоренные в основной теореме случаи, то даются иные представления функции $Q_k^{m,n}(z)$. Все формулы, найденные авторами, переходят при $m=n$ в известные формулы Гобсона для классической функции Феррерса $Q_k^m(z)$. Н. С. Кошляков

6676. О резольвенте Риккати. Винтнер (On Riccati's resolvent. Wintner Aurel), Quart. Appl. Math., 1957, 14, № 4, 436—439 (англ.)

Применительно к системе n линейных однородных дифференциальных уравнений, заданных в векторно-матричной форме

$$x' = A(t)\,x,$$

обсуждается вопрос о понижении порядка системы на единицу, аналогично тому, как это делается при $n=2$. Примечание референта. В формуле (2) работы вместо $v' = a(t)\,u + d(t)\,v$ следует читать $v' = c(t)\,u + d(t)\,v$. П. И. Кузнецов

6677. Простой вывод интеграла для объема фазового пространства с различными значениями энергии. Приложения к статистической механике. Закон Гиббса. Казал (Intégrale simple donnant le volume de l'espace des phases intérieur à la variété d'énergie constante. Application à la mécanique statistique. Loi de Gibbs. Casal Pierre), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 15, 1219—1221 (франц.)

Механическая система с кинетической энергией T и потенциальной U рассматривается вначале в конфигурационном пространстве C, а затем в фазовом (q, p), причем скорость представляющей точки берется в виде $V^2 = 2T$. Элемент фазового объема принимается в виде $dq_1 \ldots dq_n\, dp_1 \ldots dp_n$. Вычисляется объем $\Phi(E)$, заключенный внутри сферы радиуса $\sqrt{2(E-U)}$, где E — полная энергия системы. Получена формула

$$\Phi(E) = k_n \int\ldots\int (E-U)^{n/2} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dq_1 \ldots dq_n,$$
$$k_n = (4\pi)^{n/2}/\Gamma(n/2+1).$$

Для точек, лежащих внутри области, где $U < x$, установлена мера

$$\Phi(E) = k_n \int_0^E (E-x)^{n/2}\, df(x)$$

и дано приложение последней формулы к статистической механике (закон Гиббса и другие вопросы). И. С. Аржаных

6678. Первые интегралы уравнений динамических систем. Боттема (First integrals of dynamical systems. Bottema Oene), Z. angew. Math. und Phys., 1957, 8, № 5, 418—420 (англ.; рез. нем.)

Автор подметил следующий любопытный факт, относящийся к свойствам динамических уравнений Лагранжа для голономных, консервативных и негироскопических механических систем и их первых интегралов.

Положим, что первоначальная система уравнений движения

$$L_k = 0\ (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

где L_k — лагранжианы, имеет «m» первых интегралов

$$F_i(q, \dot{q}) = 0\ (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (2)$$

Тогда система уравнений, составленная из уравнений (2) и некоторых $n-m$ уравнений из (1), вообще говоря, не эквивалентна первоначальной системе (1) в том смысле, что хотя каждое решение системы (1) будет в то же время решением второй системы, обратное может не иметь места.

Автор приводит для примера, в частности, плоское движение двойного маятника без действия активных сил, когда некоторые решения выводной системы уравнений (2) не являлись решениями основной искомой системы уравнений движения. В. В. Добронравов

6679. Об общей форме основного закона классической динамики. Ноккеман (Über die allgemeine Form des Grundgesetzes der klassischen Dynamik. Nockemann R.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, 10, № 6, 241—250 (нем.)

Статья методического характера: на основании закона об изменении количества движения точки получены различные формы уравнений движения в криволинейных координатах. Рассмотрены общеизвестные примеры. Непосредственный вывод, основанный на геометрических соображениях, сопоставляется с методикой составления уравнений в форме Лагранжа и Гамильтона. И. С. Аржаных

6680. Об интегральных неравенствах. Перов А. И., Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1957, вып. 5, 87—97

Рассматривается уравнение

$$du/dt = f(t, u),\ u(0) = C, \qquad (1)$$

где $f(t, u)$ непрерывна при $0 < t \leqslant h$, $-\infty < u < \infty$. Обозначим через y такое непрерывное на $[0, h]$ решение уравнения (1), что любое другое непрерывное на $[0, h]$ решение v уравнения (1), принимающее при некотором $t_0 \in (0, h)$ значение $v(t_0) > y(t_0)$, удовлетворяет условию $D^* y(0) < D_* v(0)$, где $D^* y(0)$ и $D_* v(0)$ — соответственно верхняя и нижняя правые производные (таким образом, y является некоторого рода аналогом верхнего решения).

Доказано следующее распространение на сингулярный случай теоремы об интегральных неравенствах (см., например, РЖМат, 1957, 8610): Пусть $f(t, u)$ — неубывающая функция от u. Тогда для непрерывной на $[0, h]$ функции $w(t)$ неравенство

$$w(t) \leqslant c + \int_0^t f(s, w(s))\, ds \quad (0 \leqslant t \leqslant h)$$

влечет за собой неравенство $w(t) \leqslant y(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant h)$, а неравенство

$$w(t) < c + \int_0^t f(s, w(s))\, ds \quad (0 \leqslant t \leqslant h)$$

влечет неравенство $w(t) < g(t)$ $(0 < t \leqslant h)$, где $g(t)$ — произвольное решение уравнения (1), совпадающее с y на некотором отрезке $[0, h_1] \subset [0, h]$.

На основе этого условия разрешимости задачи Чаплыгина получены критерии единственности решения обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в банаховских пространствах. Результаты автора обобщают ряд известных критериев (см., например, РЖМат, 1956, 3815, 8778; 1957, 6340). Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк

6681. О методе Фроммера. Куклес И. С., УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н., 1957, № 4, 85—95 (рез. узб.)

Устанавливается, что метод Фроммера исследования поведения интегральных кривых уравнения

$$dy/dx = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)} \qquad (1)$$

в окрестности особой точки применим к исследованию особой точки (0, 0) уравнения (1) также в том случае, когда

$$X(x, y) = \sum_{i, j=0}^{\infty} a_{ij}^{(s)} |x|^{k_i} |y|^{l_j}$$

$$\text{и } Y(x, y) = \sum_{i, j=0}^{\infty} b_{ij}^{(s)} |x|^{p_i} |y|^{q_j} \qquad (2)$$

($s = 1, 2, 3, 4$ — номер координатного угла) представляют собою ряды по неотрицательным и безгранично возрастающим, но не обязательно целым, степеням $|x|$ и $|y|$. В рядах (2) показатели p_i, l_i удовлетворяют еще дополнительным условиям: $p_i \notin (0, 1)$, $l_i \notin (0, 1)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, коэффициенты $a_{ij}^{(s)}$, $b_{ij}^{(s)}$ подчиняются лишь условиям, обеспечивающим равномерную сходимость рядов вблизи (0, 0) в каждой из координатных четвертей, и естественным условиям, обеспечивающим непрерывность функций $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ а координатных осях.

Имеется неточность: указанные выше условия, вопреки утверждению автора, не обеспечивают единственности решения задачи Коши для уравнения $Xdy = \sqrt[3]{x}\,dx$ при любых начальных данных (x_0, y_0), $0 < x_0^2 + y_0^2 < \rho^2$; пример: $\sqrt[3]{x}\,dy = ydx$. В формулах имеется около сорока опечаток. А. Ф. Андреев

6682. К проблемам различения Фроммера. Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 5, 191—195

Авторы рассматривают дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y_n(x, y) + Y(x, y)}{X_n(x, y) + X(x, y)}, \qquad (1)$$

где $Y_n(x, y)$ и $X_n(x, y)$ — однородные полиномы n-й степени, а $Y(x, y)$ и $X(x, y)$ — дифференцируемые функции, которые в окрестности начала стремятся к нулю быстрее $\sqrt{(x^2 + y^2)^n}$. В полярных координатах уравнение (1) имеет вид:

$$\frac{dr}{d\varphi} = r\,\frac{G(\varphi) + g(r, \varphi)}{F(\varphi) + f(r, \varphi)}, \qquad (2)$$

где $G(\varphi)$ и $F(\varphi)$ — однородные полиномы степени n от φ, а $g(r, \varphi)$ и $f(r, \varphi)$ стремятся к нулю вместе с r. Первая проблема различения Фроммера состоит в том, чтобы выяснить: имеется ли в нормальной области второго рода бесконечное множество характеристик, входящих в особую точку. Аналогичный вопрос по отношению к нормальной области третьего рода представляет собой вторую проблему различения. Авторы доказывают, что, если в уравнении (2) мы имеем:

$$f(r, \varphi) = Ar + r\Phi(r, \varphi);\ g(0, \varphi) = \Phi(0, 0) = 0, \qquad (3)$$

то в нормальной области второго рода существует одна и только одна характеристика, входящая в начало, а в нормальной области третьего рода таких характеристик бесконечное множество, при условии, что функции $rg(r, \varphi)$ и $rf(r, \varphi)$ удовлетворяют в окрестности начала условию Липшица по r и φ с достаточно малой константой. Авторы, кроме того, показывают, что условия (3) имеют место, если $p(x, y)$ и $q(x, y) \subset C^{n+1}$ и первые n производных исчезают в начале. И. С. Куклес

6683. Некоторые теоремы о предельных циклах для уравнения Лиенара. Худай-Веренов М. Г., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 389—396

Показано, что уравнение

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + x = 0 \qquad (1)$$

имеет по крайней мере два предельных цикла, если выполнены следующие условия:

1) $f(x)$ четная, $f(x) > 0$ при $b_1 < |x| < b_2$, $f(x) < 0$ при $|x| < b_1$ и при $|x| > b_2$;

2) положительный корень α уравнения

$$\alpha^2 - b_2^2 = [F(\alpha) - F(b_1)]^2, \text{ где } F(x) = \int_0^x f(s)\,ds,$$

удовлетворяет неравенству

$$\alpha^2 - b_2^2 \geqslant [F(b_1)]^2 - b_2 F(b_1);$$

3) $x^{-1/2} F(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

Даны также условия, достаточные для того, чтобы все предельные циклы уравнения (1) (если они существуют) были звездообразными относительно начала координат на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$. А. Ф. Филиппов

6684. Свободные колебания систем под действием квадратичных затухающих и произвольных восстанавливающих сил. Клоттер (Free oscillations of systems having quadratic damping and arbitrary restoring forces. Klotter Karl.), J. Appl. Mech., 1955, 22, 493—499 (англ.)

Дифференциальное уравнение $\ddot{q} + \frac{1}{2}\varphi(q)\,\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\psi(q) = 0$ (*) может быть преобразовано с помощью замены $V = \dot{q}^2$ в линейное уравнение 1-го порядка $dV/dq + \varphi(q)\,V + \Psi(q) = 0$ (**). Несколько частных случаев (*) изучено с помощью явного решения уравнения (**).

Решение уравнения (**) дает точные соотношения между последовательными максимальными смещениями (экстремумами от q).

Приведены числовые примеры и графические иллюстрации. W. S. Loud

Перев. из Math. Revs, 1956, 17, № 5, 486.

6685. Об одном принципе взаимности между высоко- и низкочастотными колебаниями, связанными с линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Винтнер (On a principle of reciprocity between high- and low-frequency problems concerning linear differential equations of second order. Wintner Aurel), Quart. Appl. Math., 1957, 15, № 3, 314—317 (англ.)

Рассмотрим уравнение

$$x'' + f(t)\,x = 0$$

и пусть $f(t) > 0$ при $t \geqslant t_0$ и $\int^{\infty} f(t)\,dt = \infty$. Эти условия гарантируют колебательный характер решений. В литературе неоднократно отмечалось (см., например, гл. 7, п. 8 книги Сансоне — РЖМат, 1955, 2676 К), что законы возрастания решений (раскачивания) при $f(t) \to 0$ аналогичны законам убывания решений (затухания) при $f(t) \to \infty$.

Автор вводит новую переменную $ds = f(t)\,dt$ (дифференцирование по s обозначается точкой) и устанавливает «принцип взаимности»: Если коэффициенты уравнений Риккати

$$m' + m^2 + f(t) = 0 \text{ и } \dot{n} + n^2 + g(s) = 0$$

связаны соотношением $f(t)\cdot g(s) = 1$, то решения их связаны соотношениями $m \cdot n = -1$.

Переход к уравнениям второго порядка совершается обычным путем: замена $m = x'/x$ дает исходное уравнение, а замена $n = \dot{y}/y$ дает «взаимное» уравнение $\ddot{y} + g(s)\,y = 0$. Если $f(t) \to \infty$, то $g(s) \to 0$, и наоборот.

И. М. Соболь

6686. Субгармонические колебания в нелинейных системах с положительным трением. Лундквист (Subharmonic oscillations in a nonlinear system with positive damping. Lundquist Stig), Quart. Appl. Math., 1955, 13, № 3, 305—310 (англ.)

Рассматриваются субгармонические колебания при общем виде восстанавливающей силы с помощью метода Картрайт и Литлвуда.

Рассматривается уравнение

$$y'' + y = \varepsilon\{F\sin(px + a) - ky' - f(y)\}, \qquad (1)$$

где ε, F, $k > 0$, $f(y) + f(-y) = 0$, $\varepsilon \ll 1$, $f(y)/y \gg 0$, предполагается, что df/dy существует для всех y.

Решение ищется с помощью метода последовательных приближений

$$y_{n+1} = b\sin x + \varepsilon\int_0^x \{F\sin(p\xi + \alpha) - ky_n(\xi) - f(y_n)\}\sin(x - \xi)\,d\xi,$$

которые для конечных x сходятся к непрерывной функции y, удовлетворяющей уравнению (1) и начальным условиям $y(0) = y'(0) = 0$. При $\varepsilon \ll 1$ достаточно ограничиться первым приближением.

Исследуются представляющие физический интерес случаи больших субгармоник, а также вопрос их устойчивости.

Ю. А. Митропольский

6687. Ограниченные вынужденные колебания. Рейссиг (Beschränkte erzwungene Bewegungen mit Selbststeuerung. Reißig Rolf), Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, № 7-8, 279—280 (нем.)

Излагается теорема автора (РЖМат, 1958, 2907) с некоторыми пропусками в формулировке и без подробного доказательства.

А. Ф. Филиппов

6688. О дифференциальном уравнении $\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2D\frac{dx}{d\tau} + \mu\,\mathrm{sgn}\frac{dx}{d\tau} + x = \Phi(\eta\tau)$, **где** $\Phi(\eta\tau + 2\pi) \equiv \Phi(\eta\tau)$. **Поведение решений при** $\tau \to \infty$. **Рейссиг** (Über die Differentialgleichung $\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2D\frac{dx}{d\tau} + \mu\,\mathrm{sgn}\frac{dx}{d\tau} + x = \Phi(\eta\tau)$, wo $\Phi(\eta\tau + 2\pi) \equiv \Phi(\eta\tau)$ ist. Das Verhalten der Lösungen fur $\tau \to \infty$ Reissig Rolf), Abhandl. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin. Kl. Math. und allgem. Naturwiss., 1953 (1954), № 1, 1—33 (нем.)

Основные утверждения работы — о существовании периодического решения уравнения, указанного в заголовке, и о неограниченном приближении к нему всех других решений — при более общих предположениях доказаны в других работах автора (РЖМат, 1956, 2989, 7335).

А. Ф. Филиппов

6689. Некоторые теоремы о существовании периодических решений для нелинейных дифференциальных уравнений. Учжо-цюнь (Wuu Jwo-chun), Дунбэй женьминь дасюэ цзыжанькэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., 1957, № 1, 99—119 (кит.; рез. англ.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\,\dot{x} + g(x) = e(t). \qquad (1)$$

Предполагается, что $e(t)$ — непрерывная периодическая функция t с периодом T, а f и g непрерывны и удовлетворяют условию единственности. Доказывается ряд теорем существования периодических решений с периодом T. Из этих теорем мы приведем следующие две.

Теорема 2.1. Уравнение (1) имеет периодическое с периодом T решение, если существуют положительные постоянные a, b, F, c ($c \geqslant b$) такие, что: 1) $g(x) > M$, при $x \geqslant a$, $g(x) < m$ при $x \leqslant -a$, где $M = \max e(t)$, $m = \min e(t)$; 2) $f(x, y) \geqslant -F$ при $|x| \leqslant a$, или $|y| \leqslant b$ и $f(x, y) > 0$ при $|x| \geqslant a$, $|y| \geqslant b$; 3) $\int_0^{+\infty}(g(x) - M - bF)\,dx = +\infty$, $\int_0^{-\infty}(g(x) - M + bF)\,dx = +\infty$, 4) $f(x, y) \geqslant (M - g(x))/y$, при $x \leqslant -a$, $y \geqslant c$ или $f(x, y) \geqslant (m - g(x))/y$ при $x \geqslant a$, $y \leqslant -c$.

Теорема 7.1. Уравнение (1) имеет решение с периодом T, если существуют такие положительные постоянные a, b, δ, α, N, что: 1) $g(-x) = -g(x)$ при $|x| \geqslant a$, $g(x) > M$ при $x \geqslant a$ и $g(x) < m$ при $x \leqslant -a$; 2) $f(x, y) \geqslant 0$ при $|x| \geqslant a$ и $f(x, y) \geqslant \delta$ при $x \leqslant -b$, $y \geqslant b$ и $x \geqslant b$, $y \leqslant -b$; 3) $\int_{-a}^{a} f(x, y(x))\,dx \geqslant a$ при любой непрерывной функции такой, что $|y(x)| \geqslant N$; 4) $\int_0^{+\infty}(g(x) - M)\,dx = +\infty$, $\int_0^{-\infty}(g(x) - m)\,dx = +\infty$.

В. А. Плисс

6690. Вынужденные колебания с кулоновым сопротивлением. Симидзу (Forced vibrations with coulomb damping. Shimizu Tatsujiro), Proc. 6th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1956, Tokyo, 1957, 503—506 (англ.)

Изучается движение системы с одной степенью свободы, подверженной действию гармонической вынуждающей силы и кулонова трения. Движение это описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \alpha^2(x + \gamma\,\mathrm{sign}\,\dot{x}) = l\cdot\cos(t + \Phi), \qquad (1)$$

где $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $l > 0$.

Уравнение (1) интегрируется в конечном виде. При различных α выясняется вопрос о существовании и устойчивости периодических решений. Исследуется структура «остановок» решений.

В. А. Плисс

6691. О нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка. III. Уравнение $\ddot{y} - k(1 - y^2)\,\dot{y} + y = b\mu k\cos(\mu t + \alpha)$ **при больших** k **и его обобщения. Литлвуд** (On non-linear differential equations of the second order: III. The equation $\ddot{y} - k(1 - y^2)\,\dot{y} + y = b\mu k\cos(\mu t + \alpha)$ for large k, and its generalizations. Littlewood J. E.), Acta math., 1957, 97, № 3—4, 267—308 (англ.)

Рассматривается уравнение Ван-дер-Поля с гармонической вынуждающей силой:

$$\ddot{y} - k(1 - y^2)\,\dot{y} + y = b\mu k\cos(\mu t + \alpha),\ \mu = 2\pi/\lambda. \qquad (E)$$

Периодическое решение уравнения (E) с наименьшим периодом $n\lambda$ при $n > 1$ называется субгармоникой n-го порядка.

Отмечается, что если $b > 2/3$ и $k > k_0(\lambda, b)$, то E имеет устойчивое периодическое решение периода λ, а все остальные решения к нему сходятся при $t \to +\infty$.

Изучается случай $\frac{1}{100} \leqslant b \leqslant \frac{2}{3} - \frac{1}{100}$. Из этого промежутка для b исключается некоторое множество промежутков, сумма длин которых мала, т. е. существует ε, малое при больших k_0, обладающее следующими свойствами. Если $k \geqslant k_0$, то существует множество исключенных промежутков с суммой длин меньшей ε. Оставшееся множество B есть также система промежутков. Оно меняется вместе с k по мере, и при $k \geqslant k_0$ оказывается не меньше, чем $2/3 - 2/100 - \varepsilon$. B разделяется на две части B_1 и B_2, сравнимых по мере.

Если b лежит на интервале I_1 из B_1, то (E) имеет систему устойчивых субгармоник порядка $2n+1$ и «большинство» других решений стремится к одной из этих субгармоник при $t \to +\infty$. Число n постоянно в I_1 и имеет порядок $(2\ 3 - b)\,k$. Если b лежит в I_1 из B_1, то существует система неустойчивых субгармоник порядка $2n+1$.

Если b принадлежит интервалу I_2 из B_2, то уравнение (E) имеет две системы устойчивых субгармоник порядка $2n+1$ и $2n-1$; «большинство» остальных решений сходится к одной из этих субгармоник. Имеется далее бесконечное множество Σ неустойчивых периодических движений. Существует, кроме того, множество X мощности континуум, не периодических, так называемых «разрывно-рекуррентных» предельных решений. Число n (имеющее порядок k) так же, как и в первом случае, постоянно в I_2. Более того, множества X и Σ остаются топологически эквивалентными в I_2.

При всех b из промежутка (1/100, 2/3—1/100) существует единственное вполне неустойчивое (асимптотически устойчивое при $t \to -\infty$) периодическое решение с периодом λ.

Автор отмечает, что качественная картина расположения интегральных кривых уравнения (E) оказывается такой, как описано выше при всех достаточно больших k, а не приближается к описанной при $k \to +\infty$.

В. А. Плисс

6692. Условия полной непрерывности резольвенты несамосопряженного дифференциального оператора. Лидский В. Б., Докл. АН СССР, 1957, 113, № 1, 28—31

Рассматриваются условия, при которых дифференциальный оператор

$$Ly = -y'' + p(x)\,y,$$

действующий в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$, имеет вполне непрерывную резольвенту и, следовательно, дискретный спектр. Функция $p(x)$ предполагается комплексной: $p(x) = q(x) + ir(x)$; $q(x)$, $r(x)$ — вещественные функции, суммируемые и ограниченные в каждом конечном интервале вещественной оси. Доказываются следующие достаточные признаки.

Теорема 1: $\lim_{|x|\to\infty} q(x) = +\infty$.

Теорема 2: $\lim_{|x|\to\infty} r(x) = +\infty$ (или $-\infty$).

При предположении, что $q(x)$ ограничена снизу, а $r(x)$ ограничена либо снизу, либо сверху, доказывается необходимый и достаточный признак полной непрерывности резольвенты (теорема 3) для любой последовательности непересекающихся интервалов $\{D_n\}$ одинаковой длины, уходящих в бесконечность,

$$\int_{D_n} (q(x) + |r(x)|)\,dx \to \infty.$$

Л. А. Чудов

6693. Некоторые теоремы теории возмущений. V. Титчмарш (Some theorems on perturbation theory. V. Titchmarsh E. C.), Итон леаналиса математит, J. analysis math., 1954—1955, 4, № 1, 187—208 (англ.; рез. иврит., 4, № 2, 5)

Пусть уравнение

$$\psi'' + \{\lambda - q(x)\}\,\psi = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty) \tag{1}$$

имеет дискретный спектр, в то время как возмущенное уравнение, в котором $q(x)$ заменено на $Q(x) = q(x) + \varepsilon\sigma(x)$, имеет непрерывный спектр. Доказывается, что при некоторых ограничениях на $q(x)$ и $\sigma(x)$ для любой функции $f(x) \in L^2(0, \infty)$ справедливо следующее асимптотическое равенство:

$$\int_0^\infty f^2(x)\,dx = \int_{E(\varepsilon)} g^2(\lambda, \varepsilon)\,d\rho(\lambda, \varepsilon) + o(1), \tag{2}$$

где множество $E(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ стремится к невозмущенному спектру, $g(\lambda, \varepsilon)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$ и $\rho(\lambda, \varepsilon)$ — спектральная функция возмущенного уравнения. Множество $E(\varepsilon)$ можно считать заключенным в интервалах $(\lambda_n + \varepsilon\lambda_n^{(1)} - \varepsilon^p,\ \lambda_n + \varepsilon\lambda_n^{(1)} + \varepsilon^p)$, где $\rho > 1$, λ_n — собственные значения уравнения (1),

$$\lambda_n^{(1)} = \int_0^\infty \sigma(x)\,\psi_n^2(x)\,dx,$$

$\psi_n(x)$ — нормированные собственные функции уравнения (1).

Можно также вычислить следующие приближения для $E(\varepsilon)$.

Подробно рассмотрен случай $q(x) = \frac{1}{4}(n^2 - 1)\,x^{-2} - cx^{-1}$, $\sigma(x) = -x$, где n — целое положительное число, c — положительная константа. Этот случай связан с уравнением Шредингера для атома водорода в слабом электрическом поле.

Б. М. Левитан

6694. О предельных значениях мультипликативных интегралов. Сахнович Л. А., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 205—210

Обозначения: $H(t)$ — самосопряженная $n \times n$-матрица с равномерно ограниченной нормой для $t \in [a, b]$; $E(t) = \int_a^t H(v)\,dv$; $\xi = w(x, \lambda)$ — $n \times n$-матрица — решение задачи

$$d\xi / dx = -i\xi H(x) / (x - \lambda), \quad x \in [a, b]$$
$$\xi|_{x=a} = I$$

(матрица $w(x, \lambda)$ представима в виде мультипликативного интеграла $w(x, \lambda) = \int_a^x e^{-idE(t)/(t-\lambda)}$)

Доказаны теоремы:

I. Для почти всех $\sigma \in [a, b]$ существуют и совпадают

$$\lim_{\lambda=\sigma+i\tau;\ \tau\to\pm 0} w(b, \lambda) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{\sigma-\varepsilon} e^{-i\frac{dE(t)}{t-\sigma}}\, e^{\pm\pi H(\sigma)} \int_{\sigma+\varepsilon}^b e^{-i\frac{dE(t)}{t-\sigma}} = w^{\pm}(b, \sigma)$$

(отмечено, что теорема I обобщает теорему Привалова о предельных значениях $f(\lambda) = \int_a^b (t - \lambda)^{-1}\,d\alpha(t)$)

II. Если $\{L_i\}$ — собственные числа $w^+(\sigma)\,w^+(\sigma)^*$, то $\left\{\frac{1}{2\pi}\ln L_i(\sigma)\right\}$ — собственные числа $H(\sigma)$, $\sigma \in [a, b]$.

Сформулирована задача: выяснить однозначно ли опре

является $H(\sigma)$ вронскианом $w(b, \lambda)$, $\lambda \in [a, b]$ уравнения (1).

Замечено, что полученные результаты позволяют изучить поведение резольвенты некоторых несамосопряженных операторов класса $(i\Omega)$ (РЖМат, 1954, 5660).

Ю. С. Богданов

6695. Одна теорема о разделении спектров обыкновенных самосопряженных дифференциальных операторов четного порядка. Крумхаар (Ein Satz über die Separation von Spektren bei gewöhnlichen selbstadjungierten Differentialoperatoren gerader Ordnung. Krumhaar Hans), Nachr. Akad. Wiss Göttingen, Math.-phys. Kl. IIa, 1956, № 13, 267—274 (нем.)

Пусть $\rho = \rho(x)$ — некоторая кусочно-непрерывная положительная функция, определенная в интервале $a < x < b$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, а $L^2_\rho(a, b)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,\rho(x)\,dx.$$

Обозначим через $\widetilde{L}$ любой самосопряженный оператор, порождаемый в $L^2_\rho(a, b)$ операцией

$$l[u] = \frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(p_k \frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}\right)$$
$$(p_0(x) > 0,\ a < x < b)$$

и «штурмовыми» краевыми условиями $\{R_a, R_b\}$ (так что подчинение функции $u(x)$ условиям R_a или R_b не накладывает ограничений на ее значения вне окрестности точки a или b, соответственно). Коэффициенты $p_k = p_k(x)$ операции l предполагаются непрерывно дифференцируемыми вместе со своими производными до $(n-k-1)$-го порядка и имеющими кусочно-непрерывную производную $(n-k)$-го порядка $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Введем самосопряженные операторы $\widetilde{L}_1$ и $\widetilde{L}_2$, порождаемые в пространствах $L^2_\rho(a, c)$ и $L^2_\rho(c, b)$ операцией l с краевыми условиями $\{R_a, R_c\}$ и $\{R_c, R_b\}$, соответственно $(a < c < b)$. Спектры операторов $\widetilde{L}$, $\widetilde{L}_1$ и $\widetilde{L}_2$ обозначим через S, S_1 и S_2, соответственно.

Ссылаясь на метод расщепления референта, автор устанавливает следующее предложение.

Теорема. Если в интервале $\lambda' \leqslant \lambda \leqslant \lambda''$ $(\lambda' \leqslant \lambda'')$ содержится по крайней мере $n+r$ точек одного из множеств S или $S_1 + S_2$, то этот интервал содержит по крайней мере r точек другого из этих множеств.

Здесь каждое собственное значение считается столько раз, какова его кратность.

Автор указывает, что в частном случае, когда $n = 1$, $-a = b = \infty$, при $x \to a$ и $x \to b$ имеет место случай «предельной точки» и, наконец, условие R_c имеет вид $u(c) = 0$, приведенная выше теорема установлена Вулфсоном (РЖМат, 1954, 2122). И. М. Глазман

6696. О краевых задачах на собственные значения и собственные функции для обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старшей производной. Костомаров Д. П., Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 2, 230—233

Рассматриваются два линейных дифференциальных оператора на отрезке $[a, b]$

$$L[u] = (-1)^n \sum_{i=0}^{2n} p_i(x)\,u^{(i)}(x);$$

$$l[u] = (-1)^m \sum_{i=0}^{2m} q_i(x)\,u^{(i)}(x),$$
$$m > 0,\quad n - m = k > 0.$$

Ставятся краевые задачи

I. $\mu L[u] + l[u] = \lambda\rho(x)\,u$
$$u^{(s)}(a) = u^{(s)}(b) = 0 \quad (0 \leqslant s \leqslant n-1).$$

II. $l[v] = \lambda\rho(x)\,v$
$$v^{(s)}(a) = v^{(s)}(b) = 0 \quad (0 \leqslant s \leqslant m-1)$$

(μ — малый параметр). Соответствующие собственные значения и собственные функции обозначаются $\lambda_j(\mu)$, $u_j(x, \mu)$; λ_j; $v_j(x)$. На p_i, q_i и ρ накладываются некоторые условия гладкости и требование $p_{2n} > 0$, $q_{2m} > 0$. В предположении, что характеристическое уравнение, из которого определяются собственные значения вырожденной задачи II, имеет только простые корни, утверждается следующее:

При достаточно малых значениях μ $(\mu \leqslant \mu_0)$ задачи I и II имеют одно и то же число собственных значений, причем $\lambda_j(\mu) = \lambda_j + \mu^{1/2k}\lambda_{j1}(\mu)$, где $\lambda_{j1}(\mu)$ — функции, аналитические и ограниченные при $\mu \leqslant \mu_0$. В предположении самосопряженности оператора $l[u]$ получена формула $\lambda_j(\mu) = \lambda_j + \mu^{1/2k}\lambda_{j1}(\mu) + \mu^{1/k}\lambda_{j2}(\mu)$, причем для λ_{j1} дано выражение через коэффициенты p_{2n}, q_{2m}, а также собственные функции v_j, взятые в граничных точках a и b, λ_{j2} — функции аналитические и ограниченные при $\mu \leqslant \mu_0$. Аналогичное представление дано для собственных функций $u_j(x, \mu)$ и их производных порядка $s \leqslant 2n-1$ с точностью до $o(\mu^{1/k})$ на отрезке $a + \delta \leqslant x \leqslant b - \delta$. Результаты получены при помощи предварительного исследования асимптотики для фундаментальной системы решений уравнения (1). А. Б. Васильева

6697. О равномерной устойчивости решений счетных систем дифференциальных уравнений в некоторых критических случаях. Ефремов Е. П., Сб. науч. тр. Казахск. горно-металлург. ин-та, 1957, № 15, 253—258

Рассматривается счетная система дифференциальных уравнений

$$dz_i/dt = \omega_i(t, x_1, x_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots),$$

$$dx_s/dt = \sum_{k=1}^{\infty} P_{sk}x_k + f_s(t, x_1, x_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots) \quad (1)$$
$$(i, s = 1, 2, \ldots),$$

правые части которой определены, непрерывны по t, удовлетворяют условию Коши относительно x_s и z_i в области

$$t \geqslant 0, \quad |z_i| \leqslant R, \quad |x_s| \leqslant R.$$

Предполагается, что:

а) $P_s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |P_{sk}(t)| \leqslant P(t)$, где P_s и P — непрерывные функции при $t \geqslant 0$;

б) функции ω_i, f_s ограничены по модулю некоторыми константами и обращаются тождественно в нуль на оси t;

в) всякое решение y_s системы $dx_s/dt = \sum_{k=1}^{\infty} P_{sk}x_k$ удовлетворяет условию

$$\sup[|y_1|, |y_2|, \ldots] \leqslant$$
$$\leqslant B \sup[|x_1^*|, |x_2^*|, \ldots] \exp[\alpha(t - t_0)],$$

где $\alpha > 0$, $B > 1$.

Доказывается, что в этих условиях тривиальное решение системы (1) равномерно устойчиво в том смысле, что:

$$x = \sup[|x_1|, |x_2|, \ldots] < \varepsilon \quad (\varepsilon < R);$$
$$z = \sup[|z_1|, |z_2|, \ldots] < \varepsilon,$$

если

$$x_0 = \sup[|x_1^\circ|, |x_2^\circ|, \ldots] < 2\varepsilon / 3B,$$
$$z_0 = \sup[|z_1^\circ|, |z_2^\circ|, \ldots] < 2\varepsilon / 3B,$$

и что всякое решение системы (1) при достаточно малых $|x_0|$ и $|z_0|$ асимптотически приближается к решению

$$x_1 = x_2 = \ldots = 0,$$

$$z_i = z_i^\circ + \int_{t_0}^{\infty} \omega_i dt \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Кроме того, доказывается, что те же свойства системы (1) сохраняются и при некоторых изменениях условий, налагаемых на функции P_{sk}. И. П. Макаров

6698. **Оценка собственного значения, встречающегося в теории устойчивости.** Аткинсон (Estimation of an eigen-value occurring in a stability problem. Atkinson F. V.), Math. Z., 1957, 68, № 1, 82—99 (англ.)

Для краевой задачи

$$\frac{d^{2k}y}{dx^{2k}} = (-1)^k \lambda p(x)\, y, \quad y(x + 2\pi) \equiv e^{2\pi i \mu} y(x), \qquad (1)$$

где $p(x + 2\pi) \equiv p(x)$ — непрерывная функция, получены оценки наименьшего положительного собственного значения $\lambda_1(\mu)$ вида

$$F(p, \mu) \leqslant 1 / \lambda_1(\mu) \leqslant G(p, \mu).$$

Оценка $1 / \lambda_1(\mu) \geqslant F(p, \mu)$ (или $1 / \lambda_1(\mu) \leqslant G(p, \mu)$), где μ фиксировано, называется точной в определенном классе функций $p(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $p_0(x)$ из этого класса, такая, что $\lambda_1(\mu) < (1 + \varepsilon) F(p_0, \mu)$ (или $1 / \lambda_1(\mu) > (1 - \varepsilon) G(p_0, \mu)$). Указано (это раньше было отмечено М. Г. Крейном, РЖМат, 1957, 2189), что классические критерии устойчивости Ляпунова для $k = 1$ можно рассматривать как (точное) оценки снизу величины $\lambda_1(1/2)$:

$$\lambda_1(1/2) \geqslant \left\{\frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} p(x)\, dx\right\}^{-1},$$
$$\lambda_1(1/2) \geqslant \left\{\frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} [q(x)]^2\, dx\right\}^{-1/2}. \qquad (2)$$

Здесь в первом случае $p(x) \geqslant 0$, $p(x) \not\equiv 0$, во втором случае $p(x)$ — нечетная функция, $q(x)$ — первообразная для $p(x)$ со средним значением, равным нулю.

Пусть $k \geqslant 1$, $p(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} p_n e^{inx}$, $p(x) \geqslant 0$, $p(x) \not\equiv 0$. Тогда $F(p, \mu) = p_0^{-1} \sum_{-\infty}^{\infty} |p_r|^2 (r + \mu)^{-2k}$, $G(p, \mu) = \left[\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} |p_{r-s}|^2 (r + \mu)^{-2k} (s + \mu)^{-2k}\right]^{1/2}$, или грубее $F(p, \mu) = p_0 \mu^{-2k}$, $G(p, \mu) = p_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (r + \mu)^{-2k}$. Первые три выражения дают точные оценки в указанном классе функций, $0 < \mu \leqslant 1/2$.

Если $p(x)$ — нечетная функция, то

$$F(p, \mu) = \mu^{-k} \left\{\sum_{-\infty}^{\infty} |p_r|^2 (r + \mu)^{-2k}\right\}^{1/2},$$

$$G(p, \mu) = \left\{\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} |p_{r-s}|^2 (r + \mu)^{-2k} (s + \mu)^{-2k}\right\}^{-2k}$$

Оба эти выражения дают точные оценки для класса нечетных функций $p(x)$. Отсюда следует точность второй оценки (2), (Точность первой оценки (2) вытекает из результатов Ляпунова, а также доказана Винтнером и ван-Кампеном. Amer. J. Math., 1937, 59, 270—274).

Аналогичные точные оценки получены также для класса непрерывных функций $p(x)$ без дополнительных условий. В частности, при $p_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x)\, dx \geqslant 0$, $p(x) \not\equiv 0$ и $\mu \to 0$ имеет место

$$1 / \lambda_1(\mu) = p_0 \mu^{-2k} + 0(1), \quad \text{если } p_0 \neq 0$$

$$1 / \lambda_1(\mu) = \mu^{-k} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} |p_r|^2 (r + \mu)^{-2k}\right]^{1/2} + O(1) \quad \text{если } p_0 = 0.$$

Метод доказательства — сведение задачи (1) к бесконечной системе линейных уравнений, которая в соответствующем Гильбертовом пространстве определяет вполне непрерывный и симметрический оператор. Из формулы следов следует оценка сверху для λ_1^{-1}, оценка снизу получается после некоторых дополнительных рассмотрений.

Примечание референта.

Касаясь литературы вопроса, автор не упоминает одной работы Борга (Borg, J.) и работы советских авторов по критериям устойчивости канонических систем с периодическими коэффициентами (см. Стражинский В. М., РЖМат, 1955, 2198). Каждый такой (точный в определенном смысле) критерий для уравнения (1) при $k = 1$ и, для определенности, $p(x) \geqslant 0$ дает оценки (точные в смысле автора) собственных значений $\lambda_n(0)$ и $\lambda_n(1/2)$, $n = 1, 2, \ldots$. При $k > 1$ критерии для «положительной центральной» области устойчивости дают оценку $\lambda_1(1/2)$. Сами же методы в ряде случаев пригодны и для получения оценок $\lambda_n(\mu)$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1/2$. Отметим работу М. Г. Крейна (РЖМат, 1956, 5848), где основываясь на формуле следов, автор получил оценки $\lambda_1(1/2)$ для систем, более общих, чем уравнение (1). В частности, там же доказана точность второй оценки (2). В. А. Якубович

6699. **О некоторых новых краевых проблемах дифференциального уравнения третьего порядка.** Грегуш Михал, Чехосл. мат. ж., 1957, 7, № 1, 41—47 (рез. нем.)

Дается решение пяти краевых задач для дифференциального уравнения

$$y''' + 2A(x, \lambda) y' + [A'(x, \lambda) + b(x, \lambda)] y = 0 \qquad (1)$$

с краевыми условиями 1. $y(a, \lambda) = y'(a, \lambda) = y(b, \lambda) = 0$, 2. $y(a, \lambda) = y'(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = 0$, 3. $y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = y'(c, \lambda) = 0$, 4. $y(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = y(c, \lambda) = 0$, 5. $y(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = y'(c, \lambda) = 0$ в предположении, что: 1) $A(x, \lambda) > 0$, $A'(x, \lambda)$, $b(x, \lambda) \geqslant 0$ суть непрерывные функции от x при $-\infty < x < +\infty$, $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ и 2) $A(x, \lambda)$ — непрерывная функция от λ и $\lim_{\lambda \to \Lambda_2} A(\tau, \lambda) = +\infty$ для каждого $x \in (-\infty, +\infty)$. Кроме того, относительно функции $b(x, \lambda)$ предполагается, что она не обращается в нуль ни в каком частичном интервале интервала $(-\infty, +\infty)$ для x и ни при каких значениях $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$; a, b, c — постоянные числа, причем $a < b < c \in (-\infty, +\infty)$.

При этих предположениях доказывается, что существует бесчисленное множество значений параметра λ: $\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_{\nu+p}, \ldots$, которым соответствует

последовательность решений уравнения (1): y_ν, $y_{\nu+1}, \ldots$ $\ldots, y_{\nu+p}, \ldots$, удовлетворяющих одному из указанных краевых условий. При этом решение $y_{\nu+p} = y(x, \lambda_{\nu+p})$ имеет в точности $\nu + p$ нулей соответственно в интервале (a, b) в случае краевых условий 1 и 2 и в интервале (b, c) в случае краевых условий 3, 4 и 5. Если $b(x, \lambda) \leqslant 0$, то утверждение остается в силе и для $a > b > c$.

При доказательстве используется осцилляционная теорема Дж. Сансоне и теорема о непрерывной зависимости нулей решения уравнения (1) от параметра.

Библ. 5 назв. Н. М. Матвеев

6700. О проводимости одного класса систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. Гельман А. Е., Докл. АН СССР, 1957, 116, № 4, 535—537

Автор формулирует достаточный критерий приводимости одного класса систем двух однородных линейных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, из которого следует, что свойство приводимости существенно связано с арифметической природой частот коэффициентов исходной системы в том смысле, что сколь угодно малое надлежащим образом выбранное изменение одной из частот коэффициентов приводимую систему может сделать неприводимой.

Для исследования приводимости автор вводит аппарат соответственно-мажорантных рядов для квазипериодических функций и формулирует для них ряд теорем.

Доказательства не приводятся. Имеется один иллюстративный пример. Н. Я. Лященко

6701. Об устойчивости в будущем и в прошлом в несжимаемых системах. Патнам (On future and past stability in incompressible systems. Putnam C. R.), J. Math. and Mech., 1957, 6, № 5, 669—672 (англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f(x), \qquad (1)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $f(x) = (f_1, \ldots, f_n)$ — n-мерные векторы, причем $f(x)$ — вектор-функция класса c^1 на некотором открытом инвариантном множестве Ω — n-мерного пространства. В частности, это означает, что если $x_0 = x(0) \in \Omega$, то решение $x(t)$ существует и принадлежит Ω для $-\infty < t < \infty$. Решение $x(t)$, для которого $x_0 = x(0)$, называется устойчивым в будущем (в смысле Ляпунова), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|x(t) - y(t)| < \varepsilon$ для $t \geqslant 0$, как только $|x_0 - y_0| < \delta$, где $y_0 = y(0)$ и $x_0, y_0 \in \Omega$. (Норма $|\ |$ понимается в обычном евклидовом смысле). Аналогично определяется устойчивость в прошлом и устойчивость в обоих направлениях, т. е. для $-\infty < t < \infty$. Далее предполагается, что $f(x)$ удовлетворяет условию несжимаемости

$$\operatorname{div} f \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k} = 0, \qquad (2)$$

и доказывается теорема.

Теорема. Пусть Ω — открытое инвариантное множество (не обязательно конечной меры), на котором функция $f(x)$ принадлежит классу C^1 и удовлетворяет условию (2). Пусть $x(t)$ — решение системы (1), лежащее в Ω и являющееся почти-периодической (векторной) функцией в смысле Бора. Тогда устойчивость $x(t)$ в будущем или в прошлом влечет за собой устойчивость одновременно в обоих направлениях.

Автор замечает, что вопрос о том, возможно ли в формулировке теоремы отказаться от требования почти-периодичности решения $x(t)$, остается открытым. В то же время простые примеры показывают, что условие (2) не может быть отброшено. М. И. Грабарь

6702. О возмущении линейной системы с постоянными коэффициентами, обладающей периодическими решениями. Морimoto (On the perturbation of the linear system with constant coefficients possessing periodic solutions. Morimoto Hiroshi), Math. Japon., 1955, 3, № 3, 103—110 (англ.)

Рассматривается система

$$dz/dt = Az + \lambda g(t, z), \qquad (1)$$

где A — постоянная матрица, такая, что однородная система $dz/dt = Az$ имеет действительное периодическое решение $p(tc_0)$ периода 2π, а вектор $g(t, z)$ вместе с первой и второй производной по z является непрерывным по z в некоторой области D и по t, кроме того, $g(t, z)$ обладает периодом 2π по t, t и λ — действительные скалярные переменные. При некоторых дополнительных условиях автор дает достаточные условия существования периодического решения системы (1), которое при $\lambda \to 0$ стремится к периодическому решению однородной системы $p(t, c_0)$. Эти дополнительные условия довольно громоздки и даны в виде ряда неравенств.

Данный результат представляет собой обобщение результатов Коддингтона и Левинсона (Coodington E. A., Levinson N., Ann. Math. Studies, 1952, № 29, 19—35). Н. Я. Лященко

6703. О критических случаях счетных систем дифференциальных уравнений. Харасахал В. Х., Уч. зап. Алма-Атинск. гос. пед. ин-та, 1957, 8, 26—31

В первой части работы рассматривается система

$$dz_s/dt = \omega_s(t, X),$$
$$dx_i/dt = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ik} x_k + f_i(t, X) \qquad (1)$$
$$(s, i = 1, 2, \ldots)$$

причем $\sum_{k=1}^{\infty} |p_{ik}(t)| \leqslant A$, $t \geqslant 0$; в области $H(t \geqslant 0, |x_i| \leqslant R, |z_s| \leqslant R)$

$$|\omega_s(t, X, Z)| \leqslant B \cdot \sup_i |x_i| \sup_s |z_s|;$$
$$\omega_s(t, 0, Z) = f_i(t, 0, Z) = 0$$

и, кроме того, предполагается, что для $\delta > 0$ найдется $\tau_0(\delta) > 0$, такое, что для всех $t \geqslant \tau_0$ $\sum_{k=1}^{\infty} |p_{ik} - a_{ik}| < \delta$, A, B и a_{ik} — постоянные.

Теорема 1. Если решение $y_i(t, t_0, X^{(0)})$ системы $\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$ удовлетворяет условию

$$|y_i(t)| \leqslant \sup_s |x_s^{(0)}| \, Ce^{-\alpha(t - t_0)}, \qquad (*)$$

$C > 1$ не зависит от t_0, то решение системы (1) равномерно устойчиво.

Во второй части рассматривается система

$$dz_s/dt = \omega_s(t, z) + \varphi_s(t, X, Z)$$
$$dx_i/dt = \sum_{k-1}^{\infty} \rho_{ik}(t) x_k + L_i(t, X, Z), \qquad (2)$$

причем $\sum_{k=1}^{\infty} |\rho_{ik}| \leqslant A$, $|\varphi_s(t, X, Z)| \leqslant B(\sup_s |z_s|)^\gamma$;

$$|L_i(t, X, Z) \leqslant D(\sup_i |x_i|)(\sup_s |z_s|)$$

$B > 0$, $D > 0$, $\gamma > 1$ — постоянные.

Рассмотрены также системы

$$dz_s/dt = \omega_s(t, Z) + l_s(t, Z) \quad (3)$$

$$dx_i/dt = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{ik} x_k. \quad (4)$$

Решение системы (4) тоже удовлетворяет условию (*). Теорема 2. Если ω_s таковы, что решение $Z=0$ системы (3) устойчиво, асимптотически устойчиво, неустойчиво при $|l_s(t, Z)| \leqslant k(\sup_s |z_s|)^{\gamma}$, $(k>0$ — постоянная), то решение $X=Z=0$ системы (2) устойчиво, асимптотически устойчиво, неустойчиво.

В. Р. Петухов

6704. **Исследование окрестности положения равновесия системы дифференциальных уравнений.** **Зубов В. И.**, Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 2, 169—171

Рассматривается система уравнений

$$dx_s/dt = \sum_{m=\mu}^{\infty} X_s^{(m)} \quad (s=1, \ldots, n) \quad (1)$$

где $X_s^{(m)}$ — однородные формы степени m $(m \geqslant \mu)$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ с постоянными при $\mu = m$ коэффициентами; при $m > \mu$ — X_s^m — непрерывные и ограниченные функции времени $t \in [0, \infty]$.

Приводится качественная характеристика поведения траекторий в окрестности асимптотически устойчивой точки $x=0$, аналогичная той, что при $n=2$ была указана в статье Н. П. Еругина (Прикл. матем. и механ., 1950, **14**, вып. 5), а при произвольном $n \geqslant 1$ — в статье референта (РЖМат, 1955, 4411).

Формулируется теорема, утверждающая существование семейства решений системы (1), которые могут быть представлены в виде рядов

$$x_s^j(t) = z(-1)^j x_s(-\ln z, a) + \sum_{m+m_1+\ldots+m_e \geqslant 1} K_s^{(j, m, m_1, \ldots, m_e)}(t)\, c_1^{m_1} \ldots$$

$$\ldots c_e^{m_e} z^{m+\sum_{i=1}^{e} m_i \lambda_i}$$

$$(j=1, 2;\ s=1, \ldots, n),$$

где $a=1$ или $a=-1$, $x_s(\varphi, a)$ — решения системы

$$dx_s/d\varphi = x_s + aX_s^{(\mu)} \quad (s=1, \ldots, n),$$

λ_i — положительные характеристические числа некоторой вспомогательной линейной системы уравнений,

$$z = z_0(1 + 2kaz_0^{2k})^{-k/2-1/2k},\ k = (\mu-1)/2.$$

Приводится критерий устойчивости, основанный на идеях второго метода Ляпунова: Пусть v — решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_i + X_i^{(\mu)}) = \psi(x_1, \ldots, x_n) \quad (1+v),$$

где ψ — аналитическая, определенно отрицательная функция, $v(0)=0$, тогда для того, чтобы нулевое решение системы (1) было асимптотически устойчивым при любом выборе функций $X_s^{(m)}$, $m > \mu$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) область $v > -1$ была ограничена, 2) нулевое решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы (1) изолировано.

Утверждается, что результаты, приведенные в заметке, позволяют существенно продвинуться вперед в изучении сомнительных случаев. Доказательства сформулированных теорем не приведены. Имеются опечатки, например, в формулировке теоремы 4 вместо V следует, по-видимому, читать v.

Н. И. Красовский

6705. **Система дифференциальных уравнений, решения которой ограничены.** **Кордуняну** (Sisteme de ecuaţii diferenţiale ale căror soluţii sînt mărginite. Cordunneanu C.), Bul. ştiinţ. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1957, **9**, № 2, 315—320 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается, что каждое решение векторно-матричного уравнения

$$dx/dt = A(t)x + b(t) + f(t, x)$$

ограничено на $[0, \infty)$, если выполнены условия; 1) $f(t, Y(t)z) = Y(t)f(t, z)$, 2) $|f(t, x)| \leqslant g(t)|x|$, 3) $\int_0^{\infty} g(t)dt < \infty$, 4) $|Y(t)| \leqslant M$ 5) $\left|\int_0^t Y^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau\right| \leqslant N$.

Приведены еще две теоремы подобного типа. Этим несколько обобщены аналогичные результаты референта, Шмидта, Конти, Антосевича.

Р. Э. Виноград

6706. **Достаточные условия устойчивости в целом для нелинейных систем дифференциальных уравнений.** **Зорий** (Достатні умови стійкості в цілому для нелінійних систем диференціальних рівнянь. Зорій Л. М.), Доповіді та повідомлення. Львівськ. ун-т, 1957, вип. 7, ч. 3, 284—286 (укр.)

Устанавливается ряд теорем об устойчивости движения в целом. Например, рассматривается такая система трех дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = \sum_{ij=1}^{3} F_{ij}(x_1, x_2, x_3) \quad (i, j=1, 2, 3),$$

где $F_{ij}(0, 0, 0) = 0$ $(i, j=1, 2, 3)$, и доказывается Теорема 3.1. Если на всем пространстве $-\infty < x_i < +\infty$ $(i=1, 2, 3)$ выполняются условия:

1) $x_i F_{ii}(x_1, x_2, x_3) < 0$ при $x_i \neq 0$ $(i=1, 2, 3)$
2) $x_2 F_{12}(x_1, x_2, x_3) > 0$ при $x_2 \neq 0$,
$x_3 F_{13}(x_1, x_2, x_3) > 0$ при $x_3 \neq 0$,
$x_3 F_{23}(x_1, x_2, x_3) > 0$ при $x_3 \neq 0$,
3) $x_1 F_{21}(x_1, x_2, x_3) < 0$ при $x_1 \neq 0$,
$x_1 F_{31}(x_1, x_2, x_3) < 0$ при $x_1 \neq 0$,
$x_2 F_{32}(x_1, x_2, x_3) < 0$ при $x_2 \neq 0$,

то нулевое решение устойчиво в целом.

Автор не упоминает работы С. А. Стебакова (РЖМат, 1955, 206), в которой устанавливается аналогичный результат.

В. А. Плисс

6707. **О периодических решениях в окрестности особой точки динамической системы.** **Красносельский М. А.**, Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 2, 180—183

Рассматриваются системы

$$\ddot{x}_i + g_i(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = 0 \quad (i=1, \ldots, n) \quad (1)$$

$$g_i(-x_1, \ldots, -x_n, y_1, \ldots, y_n) = -g_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n).$$

Число T называется предельным периодом совокупности периодических решений R системы (1), если периоды решений из совокупности R стремятся к T, когда амплитуды этих решений стремятся к нулю. Через C обозначается матрица n-го порядка с элементами

$$c_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} g_i(0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0) \quad (i, j=1, \ldots, n).$$

Формулируется ряд теорем относительно совокупностей периодических решений.

Теорема 1. Пусть $4\pi^2/T^2$ нечетнократный положительный корень характеристического уравнения матрицы C. Пусть четна сумма кратностей других положительных корней характеристического уравнения, целыми кратными которых является $4\pi^2/T^2$. Тогда корню $4\pi^2/T^2$ соответствует континуальная совокупность периодических решений системы (1) с предельным периодом T.

Пусть функции q_i допускают представление

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + P_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) + \omega_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где P_i — однородные формы, ω_i — члены более высокого порядка малости

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i P_i(\xi_1 \sin t, \ldots, \xi_n \sin t, \xi_1 \cos t, \ldots, \xi_n \cos t)$$

$$\gamma = \int_{-\pi}^{\pi} P(t) \sin t \, dt \neq 0.$$

Теорема 5. Пусть простой корень $4\pi^2/T^2$ характеристического уравнения матрицы C не является целым кратным других корней характеристического уравнения. Пусть R — совокупность периодических решений системы (1) с предельным периодом T. Тогда при $\gamma < 0$ амплитуды периодических решений из R возрастают при возрастании периода. При $\gamma > 0$ амплитуды возрастают при убывании периода.

Наряду с системами (1) рассматриваются системы

$$\ddot{x}_i + g_i(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) + \varepsilon^2 f_i(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \quad (2)$$

где f_i периодичны по t с периодом T и удовлетворяют условию

$$f_i(-t, -x_1, \ldots, -x_n, y_1, \ldots, y_n) = -f_i(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n).$$

При некоторых дополнительных предположениях относительно функций f_i и g_i утверждается, что при малых ε система (2) имеет не менее трех периодических решений. В. А. Плисс

6708. **О некоторых дифференциальных уравнениях, встречающихся в теории релаксационных колебаний. Митропольский Ю. А.**, Укр. матем. ж., 1957, 9, № 3, 296—309 (рез. англ.)

Для системы уравнений с малым параметром $\varepsilon > 0$ вида

$$dx/dt = X(x) + \varepsilon X^*(\nu t, x, \varepsilon) \quad (1)$$

автор формулирует следующую теорему:

Если выполнены условия

а) уравнение $dx/dt = X(x)$ имеет зависящее от одной произвольной постоянной φ периодическое решение

$$x = x^0(\psi), \; x^0(\psi + 2\pi) = x^0(\psi), \; \psi = \omega t + \varphi. \quad (2)$$

б) Вещественные части всех $(n-1)$-го характеристических показателей для уравнений в вариациях

$$\frac{d\delta x}{dt} = X'_x(x^0)\,\delta x,$$

соответствующих периодическому решению (2), отрицательны.

в) Можно указать такую ρ-окрестность D_ρ орбиты периодического решения (2) и такое ε_0 что в области

$$-\infty < t < +\infty, \; x \in D_\rho, \; 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \quad (3)$$

функции $X(x) + \varepsilon X^*(\nu t, x, \varepsilon)$ неограниченно дифференцируемы по x и ε, причем производные ограничены и равномерно непрерывны по x, ε в области (3).

г) Функции $X^*(\nu t, x, \varepsilon)$ периодические по νt с периодом 2π.

Тогда можно указать такие положительные числа ε' и σ ($\sigma < \rho$, $\varepsilon' < \varepsilon_0$), что при любом $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon'$ будут справедливы следующие утверждения:

1) Уравнение (1) имеет единственное однопараметрическое решение, лежащее в области

$$-\infty < t < \infty, \; x \in D_\sigma, \; 0 < \varepsilon < \varepsilon',$$

допускающее параметрическое представление вида

$$x = x^0(\psi) + \frac{1}{2}\{A(\psi)\,h(\nu t, \psi, \varepsilon) + \overline{A}(\psi)\,\overline{h}(\nu t, \psi, \varepsilon)\} = \Phi(\nu t, \psi, \varepsilon), \quad (4)$$

где $\Phi(\nu t, \psi, \varepsilon)$ определена в области $-\infty < t < \infty$, $\psi \in \Omega$ (Ω — окружность), $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ и обладает периодом 2π по νt и ψ.

2) Для решения (4) система (1) эквивалентна одному уравнению

$$d\psi/dt = \omega + \varepsilon F(\nu t, \psi, \varepsilon),$$

причем $F(\nu t, \psi, \varepsilon)$ определена в области

$$-\infty < t < \infty, \; \psi \in \Omega, \; 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

неограниченно дифференцируемая по ψ и периодическая по νt и ψ с периодом 2π.

3) Однопараметрическое семейство решений (4) обладает свойством устойчивости, заключающемся в том, что оно притягивает к себе любое решение системы (1), начальные значения которых лежат в области D_σ, т. е. будут выполняться следующие условия:

$$|x(t) - \Phi(\nu t, \psi, \varepsilon)| \leqslant C_1(\varepsilon)\, e^{-\gamma t},$$

$$|d\psi/dt - \omega - \varepsilon F(\nu t, \psi, \varepsilon)| \leqslant C_1(\varepsilon)\, e^{-\gamma t},$$

где $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$ и γ — постоянные.

Данная теорема представляет собой обобщение теоремы Н. Н. Боголюбова (РЖМат, 1957, 4888). Н. Я. Ляпченко

6709. **Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных. Мищенко Е. Ф.**, Изв. АН СССР, Сер. матем., 1957, 12, 627—654

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\varepsilon\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y), \quad (1)$$

$\varepsilon \geqslant 0$ малый параметр, x — k-мерный вектор, y — l-мерный вектор, и соответствующая вырожденная система

$$0 = f(x, y) \quad (2')$$

$$\dot{y} = g(x, y). \quad (2'')$$

Предполагается, что существует и известно периодическое разрывное решение Z_0 системы (2), удовлетворяющее некоторым естественным условиям устойчиво-

сти. Траектория этого решения состоит из участков двух типов — участков медленных движений, определяемых из (2′) на этих участках собственные значения матрицы $\| \partial f^2/\partial x^\alpha \|$ имеют отрицательные действительные части), и участков быстрых движений, лежащих в подпространстве (x, y_0) ($y_0 = \text{const}$). Переход от медленного движения к быстрому происходит в точках срыва (x^0, y^0), где собственные значения матрицы $\| \partial f^i/\partial x^\alpha \|$ имеют отрицательные действительные части, кроме одного, которое обращается в нуль.

Доказано существование периодического решения Z_1 системы (1) близкого к разрывному решению Z_0 вырожденной системы и стремящегося к нему при $\varepsilon \to 0$. Указан метод эффективного построения приближенных формул для решения Z_1 с точностью $O(\varepsilon)$. Написана асимптотическая формула для периода T решения Z_1, имеющая вид $T = T_0 + \Delta T^1 + \Delta T^2$, где T_0 — период вырожденного цикла Z_0, а ΔT^1, ΔT^2 имеют вид $\text{const}\, \varepsilon^{2/3} + \text{const}\, \varepsilon \ln \varepsilon$ (const вычисляются эффективно через значения f, g в точках перехода от медленных участков к быстрым и наоборот). А. Б. Васильева

6710. Исследование устойчивости периодических решений уравнений высокого порядка. Возник Л. Л., Укр. матем. ж., 1957, 9, № 3, 235—251 (рез. франц.)

Рассматривается задача об устойчивости периодического решения $z = z(\omega t)$ уравнения

$$R(p) = \varepsilon \Phi(z, \varepsilon),$$

где $p = d/dt$, R — аналитическая функция, функция $\Phi(z, \varepsilon)$ — аналитическая по ε и имеющая разные частные производные по z, ε — малое число.

Решение уравнения в вариациях

$$R(p)\, x = \varepsilon F(\omega t, \varepsilon)\, x,$$

где

$$F = \Phi'[z(\omega t), \varepsilon],$$

ищется в форме

$$x = e^{qt} v(\omega t, \varepsilon),$$

где $v(\varphi, \varepsilon)$ — ряд

$$v(\varphi, \varepsilon) = a e^{i\varphi} + a^* e^{-i\varphi} + \varepsilon u_1(\varphi) + \varepsilon^2 u_2(\varphi) + \ldots,$$

а $u_1, u_2, \ldots$ — периодические функции (с общим периодом 2π), со спектром, не содержащим первых гармоник.

Для определения членов ряда используется асимптотический метод Крылова — Боголюбова (РЖМат, 1957, 4888 К) и приближенно определяются условия устойчивости периодического решения.

В качестве примера рассмотрено уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{z} + z = \varepsilon (1 - z^2) \dot{z}.$$

М. А. Айзерман

6711. Замечания к одной из теорем Малкина по поводу существования функции Ляпунова. Барбэлат (Observaţie asupra unei teoreme a lui Malkin cu privire la existenţa funcţiei lui Liapunov. Barbălat I.), Gaz. mat şi fiz., 1956, A8, № 12, 617—623 (рум.)

Рассматривается задача о существовании функции $V(x_1, \ldots, x_n, t)$, удовлетворяющей условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Эта теорема была обращена Массера (Massera J. L., Ann. Math., 1949, 50, вып. 3, 705—721) (для периодических систем) и И. Г. Малкиным (РЖМат, 1955, 211) (в общем случае) в предположении, что правые части $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ уравнений возмущенного движения — непрерывно дифференцируемые функции аргументов x_j, причем частные производные $\partial X_i/\partial x_j$ — равномерно ограничены по $t \in [0, \infty)$. В реферируемой статье доказывается существование функции Ляпунова V при условии, что ограничения накладываются не на сами производные $\partial X_i/\partial x_j$, но лишь на интеграл $\int_0^t f(u)\, du$, где $f(t) = \max \{\max X_i, \max \partial X_i/\partial x_j\}$ при $\| x \| < H$. Как указывает автор, его результаты были перекрыты работами Массера (РЖМат, 1957, 3116) и Я. Курцвейля (РЖМат, 1957, 7871), которые доказали существование функции Ляпунова при общих предположениях (лишь в предположении непрерывности функции X_i).

Н. Н. Красовский

6712. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. Понтрягин Л. С., Изв. АН СССР, Сер. матем., 1957, 21, 605—626

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \qquad (1)$$

$\varepsilon \geqslant 0$ малый параметр, x k-мерный вектор, y l-мерный вектор. Полагая в (1) $\varepsilon = 0$, получим вырожденную систему уравнений

$$f(x, y) = 0 \qquad (2')$$

$$\dot{y} = g(x, y) \qquad (2'')$$

Пусть

$$x^i = x_0^i(t),\ y^j = y_0^j(t) \qquad (3)$$

решение этой вырожденной системы, идущее по поверхности (2′). Пусть при некотором значении t_1 это решение приходит в точку x_1, y_1, где $\text{Det} \| \partial f^i/\partial y^\alpha \| = 0$ (точка срыва). Пусть для $t < t_1$ все собственные значения матрицы $\| \partial f^i/\partial x^\alpha \|$ имеют отрицательные действительные части, а при $t = t_1$ одно из собственных значений обращается в нуль (действительные части остальных по-прежнему отрицательны). В предположении, что (x_1, y_1) не является положением равновесия системы (1) и при некоторых дополнительных условиях невырожденности получено асимптотическое разложение решения системы (1), отклоняющегося при $t = t_0$ от решения (3) вырожденной системы (2) на $O(\varepsilon)$, с точностью до величины порядка $\varepsilon^{2/3}$ и $\varepsilon \ln \varepsilon$ (величинами порядка ε пренебрегается), справедливое на $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Для $t \leqslant t_1 - \delta$ таким приближением является вырожденное решение (3). В окрестности t_1 происходит явление срыва, состоящее в том, что положение равновесия, определяемое из (2′), теряет устойчивость и решение удаляется от соответствующего этому положению равновесия решения вырожденной системы (3), при этом x меняется быстро, а y остается близким к y_1, т. е. в грубом приближении траектория лежит в подпространстве (x, y_1). Для более точного исследования поведения решения в окрестности $t = t_1$ за независимое переменное принимается $\xi^1 = x^1 - x_1^1$ (выделение ξ^1 среди ξ^i связано с существованием одного нулевого собственного значения матрицы $\| \partial f^i/\partial x^\alpha \|$). Малый, но не зависящий от ε участок $-p \leqslant \xi^1 \leqslant p$ разбивается на три участка $(-p, -\sigma_1)$, $(-\sigma_1, \sigma_2)$, (σ_2, p), где $\sigma_1 = \varepsilon^{2/7}$, $\sigma_2 = \varepsilon^{2/5}$. На каждом из этих участков решение $\xi^i = \xi^i(\xi^1, \varepsilon)$, $\eta^j = \eta^j(\xi^1, \varepsilon)$ представляется различными асимптотическими формулами, которые даны с остаточными членами порядка $O(\varepsilon)$. Дано инвариантное выражение для величины l-мерного «вектора смещения» $\Delta = \text{const}\, \varepsilon^{2/3} + \text{const}\, \varepsilon \ln \varepsilon$ (const вычислены), характе-

ризующего с точностью до величин порядка $O(\varepsilon)$ отклонение исследуемой траектории от подпространства (x, y_1) для небольших конечных значений ξ^1.

А. Б. Васильева

6713. Об интегральном многообразии системы дифференциальных уравнений, содержащей малый параметр. Задирака К. В., Докл. АН СССР, 1957, 115, № 4, 646—649

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f(t, x, z, t/\mu),\ \mu\frac{dz}{dt} = F(t, x, z),$$
$$z(t_0) = z^0,\ x(t_0) = x^0, \qquad (1)$$

где μ — малый параметр, z и x — векторы, и соответствующая вырожденная и усредненная по t/μ система

$$d\bar{x}/dt = f_0(t, \bar{x}, \bar{z}),\ \bar{z} = \varphi(t, \bar{x}),\ \bar{x}(t_0) = x^0,$$

где $z = \varphi(t, x)$ — корень системы $F(t, x, z) = 0$,

$$f_0(t, x, z) = \lim_{T\to\infty}\int_0^T f(t, x, z, \nu)\,d\nu. \qquad (2)$$

Система (1) изучается в области $-\infty < t < \infty$, $x \in G$, $|z - \varphi(t, x)| \leqslant \rho$, $0 < \mu < \mu^*$. В предположении равномерности предельного перехода (2) относительно $x \in G$, существенной отрицательности действительных частей собственных значений матрицы $F_z|_{z=\varphi}\operatorname{Re}\{p_i(t, x)\} \leqslant -\alpha < 0$ и при некоторых условиях гладкости относительно правых частей системы (1) утверждается следующее:

При $\mu \leqslant \mu_0$ существуют интегральное многообразие системы (1), представляющееся в виде $z = z(t, x, \mu) = \varphi(t, x) + \psi(t, x, \mu)$, где ψ в области $-\infty < t < \infty$, $x \in G$ удовлетворяет неравенствам $|\psi| \leqslant D(\mu) < \rho$; $|\psi(t, x', \mu) - \psi(t, x'', \mu)| \leqslant \Delta(\mu)|x' - x''|$, причем $D(\mu) \to 0$, $\Delta(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$. При выполнении некоторых дополнительных условий гладкости относительно правых частей системы (1) функция $z(t, x, \mu)$ обладает равномерно непрерывными и ограниченными производными порядка $1, 2, \ldots$. В работе имеются опечатки.

А. Б. Васильева

6714. Вопросы устойчивости в целом и качества регулирования для некоторых систем дифференциальных уравнений. II. Скачков Б. Н., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 19, 35—46 (рез. англ.)

Рассматривается система

$$\left.\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= r_1\eta_1 + n_1\xi\\ \dot{\eta}_2 &= r_2\eta_2 + n_2\xi\\ \dot{\xi} &= f(\eta_1, \eta_2, \xi)\end{aligned}\right\},$$

где n_i и $r_i < 0$ $(i = 1, 2)$ — постоянные величины, а $f(\eta_1, \eta_2, \xi)$ — любая непрерывная функция, обладающая свойствами:

$$f(\eta_1, \eta_2, \xi)|_{\sigma=0} = 0,\quad \sigma\cdot f(\eta_1, \eta_2, \xi)|_{\sigma\neq 0} > 0.$$

Здесь $\sigma = p_1\eta_1 + p_2\eta_2 - \xi$.

Предполагается, что

$$1 + \frac{|n_1p_1|}{r_1} + \frac{|n_2p_2|}{r_2} > 0.$$

Даются оценки величин η_1, η_2, ξ при $t \geqslant 0$ через их начальные значения $\eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \xi^{(0)}$. Эти оценки зависят лишь от параметров системы r_i, p_i, n_i и не зависят от нелинейности $f(\eta_1, \eta_2, \xi)$.

В. А. Плисс

6715. Асимптотическое поведение устойчивого начального многообразия для системы нелинейных дифференциальных уравнений. Левин (The asymptotic behavior of the stable initial manifolds of a system of nonlinear differential equations. Levin J. J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, № 2, 357—368 (англ.)

Рассматривается на $0 \leqslant t \leqslant T$ система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f(t, x, y, \varepsilon)\ \varepsilon\,dy/dt = g(t, x, y, \varepsilon), \qquad (1)$$

ε малый параметр, x и y — m- и n-мерные векторы, и соответствующая вырожденная ($\varepsilon = 0$) система

$$dx/dt = f(t, x, y, 0)\ 0 = g(t, x, y, 0),$$

обладающая решением $x = p(t)$, $y = q(t)$. Для матрицы, составленной из производных $\partial g_i/\partial y_k(p(t), q(t), 0)$, обозначаемой $g_y(t)$, предполагается существование неособенной матрицы $P(t)$, такой, что $P^{-1}(t)g_y(t)P(t) = \begin{pmatrix} B(t) & 0\\ 0 & C(t)\end{pmatrix}$, где n_1-мерная квадратная матрица $B(t)$ имеет характеристические корни с отрицательными действительными частями на $[0, T]$, а n_2-мерная квадратная матрица $C(t)$ имеет характеристические корни с положительными действительными частями на $[0, T]$ $(n_1 + n_2 = n)$. Предполагается существование g_y^{-1} и выполнение некоторых условий гладкости.

Утверждается существование n_1-мерного многообразия $S(a, \varepsilon)$ $(|a| \leqslant \gamma_1,\ 0 < \varepsilon \leqslant \gamma_1)$ такого, что если $x(0) = p(0) + a$, а вектор $y(0)$ лежит на $S(a, \varepsilon)$, что означает $y(0) = q(0) + P(0)\begin{pmatrix} b\\ z(a, b, \varepsilon)\end{pmatrix} - g_y^{-1}(0)g_x(0)\,a$, где $b = \{b_1, \ldots, b_{n_1}\}$ — некоторая система криволинейных координат, z — непрерывная вектор-функция a, b и ε для $|a| \leqslant \gamma_1$, $|b| \leqslant \gamma_1$, $0 < \varepsilon \leqslant \gamma_1$, то на $[0, T]$ существует единственное решение (1), близкое к $p(t)$, $q(t)$, причем

$$|x(t, a, b, \varepsilon) - p(t)| < K(|a| + \varepsilon|b| + \omega(\varepsilon)),$$
$$(0 \leqslant t \leqslant T),$$
$$|y(t, a, b, \varepsilon) - q(t)| < K(|a| + \varepsilon|b| + |b|e^{-\sigma t/2\varepsilon} + \omega(\varepsilon))$$

$K > 0$ и $\sigma > 0$ некоторые постоянные, $\omega(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Рассматривается пограничное уравнение

$$dy^*/d\tau = g(0, p(0) + a, y^*, 0)\quad (\tau = t/\varepsilon)$$

и относительно его решения y^* утверждается аналогичная теорема и аналогичные неравенства, справедливые на $0 \leqslant \tau < \infty$. Начальное многообразие $S^*(a)$ в этом случае от ε не зависит.

Устанавливается близость между решением (1) и решением пограничного уравнения в окрестности начальной точки и как следствие этого предельный переход $S(a, \varepsilon) \to S^*(a)$ при $\varepsilon \to 0$.

А. Б. Васильева

6716. О решениях нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с медленно изменяющимися коэффициентами. Волосов В. М., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 6, 1149—1152

Рассмотрено уравнение вида

$$\ddot{x} + \varepsilon f_1(\varepsilon t, x, \dot{x}) + \varepsilon^2 f_2(\varepsilon t, x, \dot{x}) + Q(\varepsilon t, x) = 0 \qquad (1)$$

с малым параметром ε, который характеризует медленность изменения функций f_1, f_2, Q с временем t. Показано, что при основном условии $\operatorname{sign} Q = \operatorname{sign} x$ и некоторых дополнительных ограничениях решение (1), удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0$,

$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, где $x_0^2 + \dot{x}_0^2 \neq 0$, при достаточно малых ε колеблется с медленно меняющимися амплитудой и периодом на интервале $t \sim 1/\varepsilon$, причем положительные максимумы и отрицательные минимумы чередуются, между ними решение меняется монотонно. С точностью до порядка $O(\varepsilon)$ включительно медленно меняющаяся амплитуда решения характеризуется двумя кривыми $F_1 = F_{10} + \varepsilon F_{11}$, $F_2 = F_{20} + \varepsilon F_{21}$, на которые опираются максимумы и минимумы колеблющегося решения. Для F_{10}, F_{20} приводится система уравнений, состоящая из одного дифференциального уравнения первого порядка и одного уравнения вида $\Phi(F_{10}, F_{20}, \varepsilon t) = 0$, и формула для определения начальных значений. Для F_{11}, F_{21} выписана система двух дифференциальных уравнений первого порядка, а также первый интеграл этой системы и формула для определения начальных значений. Приведено аналогичное приближенное выражение для периода колебаний, определяемого как промежуток времени между двумя соседними экстремумами одного знака. Указывается, что предложенный метод позволяет вычислить приближения любого порядка для амплитуд колебаний. А. В. Васильева

6717 К. Дифференциальные уравнения. Методы решения и сами решения. 2. Уравнения с частными производными первого порядка для одной искомой функции. Изд. 3-е. Камке (Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. 2. Partielle Differentialgleichungen esrter Ordnung f. e. gesuchte Funktion. 3. verb. Aufl. Kamke E. Leipzig, Akad. Verl. Ges., 1956, XV, 243 S., ill., 16 DM) (нем.)

Книга представляет собой продолжение широко известной монографии автора, вышедшей в русском переводе в 1950 г. под названием «Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям (Изд-во Ин-лит. М. 1950). Книга имеет в значительной степени справочный характер и содержит весьма обширный материал, изложенный в конспективной форме.

В первой части с необходимыми подробностями и на высоком уровне строгости, но без доказательств излагаются общие свойства решений линейных, квазилинейных и нелинейных уравнений и систем уравнений с одной искомой функцией. (Все решения понимаются в классическом смысле; более поздних работ, связанных с обобщением понятия решения, автор не затрагивает). Начиная с подробного исследования уравнения $f(x, y)\, z_x + g(x, y) z_y = 0$, автор последовательно расширяет класс уравнений, доходя до наиболее общего вида. Детально изучаются характеристики и характеристические полосы, различные методы решения задачи Коши (автор приводит условия существования и единственности решения с оценкой области существования), методы Лагранжа, Якоби, Майера, Лежандра и т. д.

Вторая часть книги содержит решение и краткое исследование около 300 уравнений и классов уравнений специального вида. Эти уравнения и системы уравнений, иногда совершенно конкретные, иногда же содержащие произвольные параметры или даже произвольные функции, собраны в легко различимые группы, внутри каждой из которых они расположены по алфавитному принципу.

Книга снабжена многочисленными ссылками на монографии и журнальные статьи по данной теме (до 1952 г.) и указателем. Она полезна для специалистов в этой области и в смежных областях. А. Д. Мышкис

6718 Д. К вопросу о форме области притяжения положения равновесия некоторых асимптотически устойчивых систем. Железнов Е. И. Автореф. дис. канд. физ.-матем. н., Уральский политехн. ин-т, Свердловск, 1958

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

6719. Некоторые новые результаты в теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Диас (Some recent results in linear partial differential equations. Diaz J. B.), Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali 1954, Roma, 1955, 1—29 (англ.)

Статья представляет собой обзор результатов по теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных, полученных математиками «Института динамики жидкости и прикладной математики» Университета в Мэриленде. Автор рассматривает обобщенный метод Римана, в частности, применяет его к уравнению

$$L(u) = u_{xy} - a(x, y)\, u_x - b(x, y)\, u_y = 0 \qquad (1)$$

и оператору

$$M(v) = v_{xy} - \frac{v\varphi_y v_x}{\varphi_x} = \frac{a\varphi_x v_y}{\varphi_y},$$

введенному Мартином, вместо сопряженного оператора в смысле Лагранжа.

Он доказывает применение этого метода для случая многих независимых переменных. 2-я часть содержит рассуждения о представлении решения уравнения (1) в виде среднего значения интеграла в интервале изменения параметра α от решения $u(x, y, \alpha)$ уравнения (1).

В третьей части работы рассматриваются результаты, относящиеся к обобщенному уравнению Трикоми, связанному с звуковым течением газа. 4-я часть посвящена исследованию уравнения $\Delta u = u_{tt} + ku_t t^{-1}$ с обобщенными начальными условиями на плоскости $t = 0$, 5-я часть посвящена оценкам интеграла Дирихле от неизвестной гармонической функции (в данной области D), удовлетворяющей определенным граничным условиям. Метод, который может быть применен к более общим функционалам, иллюстрирован несколькими примерами, в частности, дано применение его к вычислению объемов. Библиография, данная отдельно для каждой части, содержит в целом 49 названий.

A. Pliś

6720. Задача Коши для линейного уравнения с полиномиальными коэффициентами. Лере (Le problème de Cauchy pour une équation linéaire à coefficients polynomiaux. Leray Jean), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 8, 953—959 (франц.)

I. Приведем сначала результат автора в случае уравнения с постоянными коэффициентами.

Пусть $X = \{x\} = \{(x_1, \ldots, x_l)\}$ и $\Xi = \{\xi\} = \{(\xi_1, \ldots, \xi_l)\}$ — два комплексных l-мерных пространства; $s(x)$ — голоморфная функция на X; S_0 — кусок гиперповерхности $s(x) = 0$, а V — его достаточно малая окрестность в X; $a(\xi)$ — полином степени m на Ξ; $h(\xi)$ — его главная часть. Рассматривается задача Коши с нулевыми начальными данными на S_0:

$$a(\partial/\partial x)\, u(x) = v(x), \qquad u(x) = O(|s(x)|^{m_1}) \text{ в } V, \qquad (1)$$

где $v(x)$ — функция, голоморфная в V. Гиперповерхность $s(x) = 0$ предполагается не характеристической:

$$h(\partial s/\partial x) \neq 0 \text{ на } S_0. \qquad (2)$$

Повторив в другой форме результат Фантаппье (Fantappiè, Annali. di mat., 1943, 22, 1—100), Лере показал, что эта задача решается квадратурами:

$$u(z) = J[a^{-1}(\xi)\, v(x), z], \qquad (3)$$

где J — интегральное преобразование, которое автор строит следующим образом.

Пусть ξ° есть вектор $\partial s(x^\circ)/\partial x$ в фиксированной точке $x^\circ \in S_0$. В силу (2) в Ξ выделяется прилегающий к ξ° бесконечный «усеченный конус» W, в котором $a(\xi) \neq 0$. Функция $a^{-1}(\xi)\, v(x)$ голоморфна в области $D = W \times V$ пространства $\Xi \times X$ и удовлетворяет в ней условию $\|\xi\|^m |a^{-1}(\xi)\, v(x)| < C$, где $\|\xi\| = (\Sigma |\xi_i|^2)^{1/2}$.

Преобразование J определяется на функциях $f(\xi, x)$, голоморфных в D и удовлетворяющих там условию

$$\|\xi\|^m |f(\xi, x)| < C_f,$$

где $m = m(f)$ — любое целое число. Если $m > l$, то J выражается формулой

$$J[f(\xi, x), z] = \frac{1}{(2\pi i)^l} \int_\gamma f(\xi, x)\, e^{\xi(z-x)}\, d\xi_1 \ldots d\xi_l\, dx_1 \ldots dx_l, \quad (4)$$

где $\xi(z-x) = \sum_1^l \xi_i (z_i - x_i)$. Таким образом, в случае $f(\xi, x) = a^{-1}(\xi)\, v(x)$ подинтегральная функция такая же, как если бы была написана свертка обратного преобразования Лапласа функции $a^{-1}(\xi)$ с $v(x)$. Но здесь γ — компактное множество. Оно содержится в D, зависит от S_0 и z и не зависит от f.

В области D любой $2l$-мерный цикл гомологичен нулю. γ представляет собой $2l$-мерный относительный цикл в D с границей, лежащей на гиперповерхностях $s(x) = 0$ и $\xi(z-x) = 0$. Любые два таких цикла, не гомологичных нулю в D относительно $\{s(x) = 0\} \cup \{\xi(z-x)\}$, относительно гомологичны друг другу, и безразлично, какой из них принять за γ. Можно задать γ явными уравнениями с известным произволом для параметров, входящих в эти уравнения.

Если условие $m > l$ не выполнено, то J определяется так:

$$J[f(\xi, x), z] = b\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) J[b^{-1}(\xi)\, f(\xi, x), z], \quad (5)$$

где $b(\xi)$ — полином степени $> l - m$, отличный от нуля в W. Правая часть в (5) определена согласно (4); определение (5) не зависит от выбора $b(\xi)$.

II. Пусть теперь $a = a(\xi, x)$ — полином на $\Xi \times X$, степени p по ξ и q по x; $h(\xi, x)$ — его главная часть по ξ. Рассматривается задача Коши

$$a(\partial/\partial x, x)\, u(x) = v(x), \quad u(x) = O(|s(x)|^p) \text{ в } V \quad (6)$$

в предположении, что

$$h(\partial s/\partial x, x) \neq 0 \text{ на } S_0. \quad (7)$$

Пусть $X' = \{x'\} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_l)\}$ и $\Xi' = \{\xi'\} = \{(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_l)\}$ — два $(l+1)$-мерных комплексных пространства. По оператору $a(\partial/\partial x, x)$, действующему в X, строится оператор $a(\xi, -\partial/\partial\xi')$, действующий в Ξ'. Пусть r — его порядок и $\xi' x = \xi_0 + \sum_1^l \xi_i x_i$. Наряду с (6) рассматривается задача Коши

$$a\left(\xi', -\frac{\partial}{\partial \xi'}\right) w(\xi', x) = 1, \quad w(\xi', x) = O(|\xi' x|^2) \quad (8)$$

с фиксированным носителем нулевых начальных данных — гиперплоскостью $\xi' x = 0$ в пространстве Ξ'. Автор строит интегральное преобразование J, посредством которого решение задачи (6) выражается через решение задачи (8) в виде

$$u(z) = J[w(\xi', x), z]. \quad (9)$$

Если w не зависит от ξ_0, то преобразование $J[w, z]$ совпадает с описанным выше. Подчеркнем, что задача Коши (8) не зависит от $s(x)$, а интегральное преобразование J не зависит от $a(\xi, x)$.

Оператор $a(\xi, -\partial/\partial\xi')$ можно строить многими способами. Например, можно положить

$$a(\xi, x') = x_0^q\, a(\xi, x/x_0);$$

тогда оператор $a(\xi, -\partial/\partial\xi')$ будет иметь порядок r, равный степени полинома $a(\xi, x)$ по x. Если исходное уравнение в (6) имело линейные коэффициенты, то уравнение в (8) будет первого порядка. Тем самым решение задачи Коши для уравнения с линейными коэффициентами сводится к квадратурам и решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

М. С. Агранович

6721. Задача Коши для линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. I. Сирота (The initial value problem for linear partial differential equations with variable coefficients. I. Shirota Taira), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 1, 31—36 (англ.)

Рассматривается задача Коши для систем вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u,$$

где коэффициенты оператора A предполагаются бесконечно дифференцируемыми и ограниченными вместе со всеми своими производными. Оператор A называется полуограниченным по норме, определяемой равномерно сильно эллиптическим оператором $B^{(s)}(t, x, \partial/\partial x)$ (во всем пространстве $x = (x_1, \ldots, x_e)$), если существует такая непрерывная положительная функция $\gamma(t)$, что

$$\int_{R_x^e} (A(t, x, \partial/\partial x)\, u(x),\, B^{(s)}(t, x, \partial/\partial x)\, u(x))\, dx \geqslant \gamma(t) \int (B^{(s)}(t, x, \partial/\partial x)\, u(x),\, u(x))\, dx$$

для любых $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$ и любых финитных бесконечно дифференцируемых $u(x)$. Предполагается, что оператор A полуограничен по норме, определяемой операторами $B^{(s)}$, $s \to \infty$ ($2s$ — порядок оператора $B^{(s)}$). Тогда задача Коши $\partial u/\partial t - Au = v$, $u(x, 0) = g(x)$ имеет единственное решение в некотором классе функций, который может быть описан как проективный предел пространств H_s, каждое из которых получается пополнением пространства финитных бесконечно дифференцируемых функций в метрике, определяемой оператором $B^{(s)}$. При этом правая часть v и начальная функция g должны принадлежать тому же классу функций. Приведена идея доказательства этой теоремы и даны некоторые примеры.

В. М. Борок

6722. Задача Коши для линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. II. Сирота (The initial value problem for linear partial differential equations with variable coefficients. II. Shirota Taira), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 2, 103—104 (англ.)

Приводится доказательство основной теоремы, сформулированной в предыдущей работе автора (реф. 6721).

В. М. Борок

6723. О задаче Коши-Ковалевской для некоторых уравнений с частными производными. Фридлендер В. Р., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 3, 385—388

Рассматривается задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial^p u}{\partial t^p} = A(t, x)\frac{\partial^q u}{\partial x^q} + f(t, x) \quad (p > q) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x) \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1), \tag{2}$$

где функции $A(t, x)$ и $f(t, x)$ аналитичны по t и принадлежат по x классу $\delta = p/q \geq 1$ в смысле Жевре в области $D(|t| < R, x \in D_1)$. Функция $\varphi(x)$ относится к классу α на множестве D_1 в смысле Жевре, если существуют постоянные M и R такие, что

$$\max_{x \in D_1} |\varphi^{(n)}(x)| < \frac{M(n!)^\alpha}{R^{n\alpha}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Для того чтобы уравнение (1) допускало решение, аналитическое по t около $t = 0$, достаточно, чтобы начальные функции (2) принадлежали в области D_1 классу δ в смысле Жевре.

Теоремы 2. При выполнении условий теоремы 1 получаемое решение будет единственным в классе аналитических по t функций и будет принадлежать относительно x классу δ.

Теорема 3. В том случае, если функции $A(t, x)$, $f(t, x)$, $\varphi_k(x)$ — целые по t и принадлежат классу $\alpha < \delta$ по x, решение будет целой функцией t.

Теорема 1, 2, 3 распространяются и на более общие уравнения. Ю. В. Сидоров

6724. **О новых методах интегрирования уравнений в частных производных посредством аналитических функционалов. Фантапье** (Sur les méthodes nouvelles d'intégration des équations aux dérivées partielles au moyen des fonctionnelles analytiques. Fantappiè Luigi), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., **71**, Paris, 1956, 47—62. Discuss., 62 (франц.)

Автор исследует уравнение

$$L_m u \equiv \frac{\partial^m u}{\partial t^m} + \sum a_{r_0 r_1 r_2} \frac{\partial^m u}{\partial t^{r_0} \partial x^{r_1} \partial x^{r_2}} = f(t, x, y) \tag{1}$$

(искомая функция u зависит от переменных t, x, y, $a_{r_0 r_1 r_2}$ — постоянные, $r_0 + r_1 + r_2 = m$, $r_0 < m$) с начальными условиями Коши $u^{(s)}(0, x, y) = \varphi_s(x, y)$ $(s = 0, 1, \ldots, m-1)$. Все рассматриваемые функции аналитичны.

Уравнение (1) с учетом начальных условий записывается в виде

$$Q(B_1 B_2)u = \overline{f}, \tag{2}$$

где $Q(\alpha, \beta) = 1 + \Sigma a_{r_0 r_1 r_2} \alpha^{r_1} \beta^{r_2}$, $\overline{f}$ — комбинация известных функций, операторы B_1 и B_2 определены так:

$$B_1 f(t, x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t f(\tau, x, y)\, d\tau,$$

$$B_2 f(t, x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^t f(\tau, x, y)\, d\tau.$$

Уравнение (2) решается с помощью операционного исчисления, развитого автором в ряде других работ. Вычисление оператора $1/Q(B_1, B_2)$ приводится с помощью теории вычетов к вычислению выражения

$$\sum_{r=1}^{m} \int_0^{Y_r} dY \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{1}{I_r(X, Y)} \overline{p}(X, Y, t, x, y)\, dX,$$

где Y_r — решения уравнения $Q(0, -1/Y) = 0$, а $I_r(X, Y) = XQ'_\beta - Y'_\alpha$ (α и β — некоторые функции X, Y) — $\overline{p}(X, Y, t, x, y)$ выражение, содержащее известные функции; контур C_1 охватывает точки, где $I_r(X, Y) = 0$. Указываются способы вычисления последнего выражения при различных предположениях об алгебраической кривой $Q(\alpha, \beta) = 0$. В заключение приведены некоторые примеры. Указывается на возможные обобщения. Библ. 30 назв. В. П. Хавин

6725. **О гипотезе Жане. Финци** (On a conjecture of M. Janet. Finzi A. Technion. Israel Inst. Techn. Sci. Publ., 1954—1955, 6, 34—37) (англ.; рез. иврит)

Автор приписывает Жане следующую гипотезу: Если решение системы из n дифференциальных уравнений в частных производных с n неизвестными функциями от $(m+1)$ независимых переменных не зависит от какой-нибудь произвольной функции m переменных, тогда оно не зависит ни от какой произвольной функции меньше, чем от n переменных.

Не давая точного определения гипотезы, автор описывает процесс, который, если допустить существование, устанавливает, по его мнению, проблему.

E. R. Kolchin

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 6, 621.

6726. **О существовании и единственности решения нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости. Киселев А. А., Ладыженская О. А.**, Изв. АН СССР. Сер матем., 1957, 21, № 5, 655—680

Рассматривается краевая задача для уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности в случае нестационарного движения вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области Ω изменения координат x_i, с неподвижной границей s, при наличии действия внешних сил $\mathbf{f}$ и при предельных условиях для вектора скорости $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}|_s + 0, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a}. \tag{1}$$

Пусть Q_T — цилиндр в пространстве x, t $(0 \leqslant t \leqslant T)$. Исследуются обобщенные решения задачи в гильбертовом простанстве $L_2(Q_T)$ вектор-функции $\mathbf{v}$ в следующих трех случаях:

1) $\mathbf{v}(x, t)$ имеет обобщенные производные из $L_2(Q_T)$ первого порядка, суммируема с четвертой степенью по любому сечению Q_T плоскости $t = \text{const}$ и удовлетворяет тождеству

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \mathbf{\Phi} + \nu \sum \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x_k} - \sum v_k \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x_k} - \mathbf{f}\mathbf{\Phi} \right) dx dt = 0 \tag{2}$$

при всевозможных $\mathbf{\Phi}$ из $L_2(Q_T)$, для которых

$$\partial \mathbf{\Phi} / \partial x_k \in L_2(Q_T), \quad \operatorname{div} \mathbf{\Phi} = 0, \quad \mathbf{\Phi}|_s = 0. \tag{3}$$

2) $\mathbf{v}(x, t)$ имеет обобщенные производные из $L_2(Q_T)$ вида $\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t \partial x_i}$ и удовлетворяет тем же условиям, что и в случае 1.

3) $\mathbf{v}(x, t)$ — ограниченная измеряемая функция, имеющая обобщенные производные из $L_2(Q_T)$ вида $\partial \mathbf{v}/\partial x_i$, и удовлетворяет некоторым видоизмененным условиям 1) — 3).

Доказываются теоремы единственности во всех трех случаях, причем из единственности для первого случая вытекает единственность и для второго случая. Применением метода Галеркина доказывается теорема сущест-

вования для первых двух случаев в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0, T]$, где высота T оценивается снизу через данные задачи. Если не действуют внешние силы (а не при действии потенциальных внешних сил, как это утверждается в работе) и данные задачи удовлетворяют некоторому дополнительному условию, то существует единственное обобщенное решение при любом T и оно стремится к нулю при $t \to \infty$.

Параллельно рассматривается та же краевая задача для системы уравнений, получаемой из уравнений Навье-Стокса в случае равенства нулю градиента давления, и доказываются теоремы единственности и существования для всех вышеупомянутых трех случаев. Библ. 17 назв. Д. Е. Долидзе

6727. О классе дифференциальных уравнений в частных производных четного порядка. Вейнштейн (On a class of partial differential equations of even order. Weinstein Alexander), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 39, 245—254 (англ.)

В $(m+1)$-мерном пространстве точек $(x_1, \ldots, x_m, y)$ рассматриваются два дифференциальных оператора вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\alpha}{y}\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\alpha}{y}\frac{\partial}{\partial y},$$

где α — действительный параметр, $-\infty < \alpha < \infty$, обозначаемые одним символом L_α. Доказывается в «большом»

Теорема. Дифференциальное уравнение

$$L_{\alpha_1} \ldots L_{\alpha_n} w = 0$$

в предположении $\alpha_r \neq \alpha_j - 2(r-j)$ $(j < r = 2, 3, \ldots, n)$ имеет общее решение вида

$$w = u^{(\alpha_n)} + u^{(\alpha_{n-1}-2)} + \ldots + u^{(\alpha_1-2(n-1))},$$

где через $u^{(\alpha)}$ обозначается любое решение уравнения $L_\alpha u = 0$ (оно может быть решением уравнения эллиптического типа, или гиперболического, в соответствии с тем, какие уравнения рассматриваются).

В «малом» наиболее общие результаты в направлении представления общих решений уравнений, левые части которых являются результатом применения к неизвестной функции произведения дифференциальных операторов, получены Я. Б. Лопатинским (Матем. сб., 1945, **17** (59), № 2, 267 — 288).

Полученный результат в случае операторов L_{α_i} эллиптического типа и $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ сравнивается с известной формулой Альманси для общего решения полигармонического уравнения. В случае операторов L_{α_i} гиперболического типа $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $n = 2$, полученная формула общего решения уравнения $L_0 L_0 w = 0$ применяется к решению задачи Коши с начальными условиями

$$w = f_0(x), \quad w_y = f_1(x), \quad w_{yy} = f_2(x), \quad w_{yyy} = f_3(x)$$

при $y = 0$.

Рассматривая оператор L_{2n} $(n = 1, 2, \ldots)$ эллиптического или гиперболического типа и обозначая через L_{2n}^{n+1} $(n+1)$-кратную итерацию оператора L_{2n} для уравнения $L_{2n}^{n+1} w = 0$, автор получает, как частный случай теоремы, известную теорему Фридрихса.

Б. Р. Лаврук

6728. Метод квадратичных форм в задачах о малом параметре при старших производных. Бирман М. Ш., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 13, 9—12 (рез. англ.)

$A\alpha$, $\alpha \geqslant 0$ — семейство самосопряженных положительно определенных операторов в гильбертовом пространстве H; $[u, v]_\alpha$ — билинейная форма оператора A_α, H_α — область определения этой формы.

Теорема. Пусть: 1) $[u, u]_\alpha \geqslant \gamma^2(u, u)$, где γ^2 — положительная постоянная, одинаковая для всех α; 2) при $0 \leqslant \beta < \alpha$ $H_\alpha \subset H_\beta$ и $[u, u]_\alpha \geqslant [u, u]_\beta$ для $u \in H_\alpha$; 3) H_α плотно в H_0 в метрике $[u, u]_0$ и $[u, u]_\alpha \to [u, u]_0$ при $\alpha \to 0$. Тогда при $\alpha \to 0$ решение u_α уравнения $A_\alpha u_\alpha = f$ сходится в метрике $[u, u]_0$ к решению u_0 уравнения $A_0 u_0 = f$.

В частности, A_α^{-1} сходится к A_0^{-1} сильно в H. Последний результат в менее общих предположениях был получен Като (РЖМат, 1955, 339). В условиях теоремы семейство A_α может быть пронумеровано не числами, а элементами любого частично упорядоченного множества. Отмечается, что теорема переносится на некоторые классы несамосопряженных операторов.

Приведенная выше теорема используется для исследования краевых задач для эллиптических уравнений, содержащих малый параметр при старших производных. Указывается та краевая задача, к решению которой стремится решение краевой задачи упомянутого типа; параметр, входящий в уравнение, может быть элементом любого частично упорядоченного множества (например, может быть совокупностью нескольких численных параметров) и может входить не только в дифференциальное уравнение, но и в краевые условия задачи. Предполагается, что как исходное, так и вырожденное уравнение имеет четный порядок.

Автор приводит некоторые примеры краевых задач с малым параметром. Укажем один из них. Пусть

$$A_\varepsilon = \varepsilon \Delta^2 u - \Delta u; \quad \left[-\varepsilon \frac{\partial \Delta u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u\right]_\Gamma = 0,$$

$$\sigma(x) \geqslant 0, \quad \varepsilon > 0,$$

где Γ — граница конечной области Ω. При $\varepsilon \to 0$ решение уравнения $A_\varepsilon u = f$ стремится, в метрике

$$[u, u]_0 = \int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega + \int_\Gamma \sigma u^2 d\Gamma,$$

к решению краевой задачи

$$-\Delta u = f; \left[\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u\right]_\Gamma = 0.$$

С. Г. Михлин

6729. Элементарное решение уравнения с частными производными 4-го порядка с двойной характеристикой. Антохи-Теодореску (Soluţia elementară a ecuatiei cu derivate parţiale de ordinul al patrulea cu pînză caracteristică dublă. Antohi-Teodorescu Veronica), An. Univ. «C. I. Parhon». Ser. ştiinţ. natur., 1957, № 15, 9—24 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается уравнение

$$F(u) = (\Delta_2 + \theta_1)\Delta_2 u + c^{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} + d^\alpha u_\alpha + eu = 0 \qquad (1)$$

в римановом пространстве R_m с нечетным числом изме-

рений $m = 2n + 1$. Элементарное решение уравнения (1) имеет вид:

$$u = \Gamma^{-m/2+2} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \Gamma_j,$$

где функции φ_j являются решениями дифференциального уравнения (Фукса) вида

$$\frac{d}{ds}\left[\dot{\varphi}^2 s^{2(p-1)+m} S_z^j\right] = \frac{f_i}{16} \dot{\varphi} s^{2(p-2)+m+j} S.$$

Эти функции являются голоморфными внутри и на характеристическом коноиде. Таким образом, полученное решение является сходящимся для

$$\Gamma(\pi_\alpha, x^\alpha) < \frac{1}{\xi_1}\left(1 - \frac{\sigma}{\rho}\right)^7.$$

Резюме автора

6730. Асимптотическое поведение спектральной матрицы оператора теории упругости. Флексер М. Ш., Докл. АН СССР, 1957, 115, № 3, 470—472

Пусть Ω — конечная область пространства R_3 и $\Delta^* u = b^2 \Delta u + (a^2 - b^2)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u$ $(a > b > 0$, u — вектор-функция). Пусть L — какой-либо самосопряженный оператор, порожденный дифференциальной операцией $-\Delta^*$ в Ω, а μ_n^2 и $u_n(p) = \{u_n^{(1)}(p), u_n^{(2)}(p), u_n^{(3)}(p)\}$ соответственно собственные значения и собственные вектор-функции уравнения

$$Lu - \mu^2 u = 0 \quad (u = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})).$$

Пусть $\theta(p, q; \mu)$ есть спектральная матрица оператора L с элементами

$$\theta_{ik}(p, q; \mu) = \sum_{\mu_n < \mu} u_n^{(i)}(p) u_n^{(k)}(q),\ p, q \in \Omega.$$

В работе доказана следующая теорема:

Пусть h — произвольное положительное число и Ω_h — множество точек области Ω, расстояние которых до границы области Ω не меньше, чем h. Пусть $p, q \in \Omega_h$. Тогда справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\overline{\lim}_{\mu\to\infty} \frac{1}{\mu^2} \sup_{p,\,q\,\in\,\Omega_h} \left| \theta_{ik}(p,q;\mu) - \frac{1}{b_3}\theta(r/b;\mu)\delta_{ik} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\mathrm{si}\,(\mu r/b) - \mathrm{si}\,(\mu r/a)}{r} \right| < \frac{10^8 (a^{-3} + 2b^{-3})}{3\pi^2 h},$$

где $\theta(r, \mu)$ — спектральная функция оператора Лапласа во всем пространстве, δ_{ik} — символ Кронекера; si — интегральный синус, $r = |p - q|$.

Этот результат уточняет один результат А. Плейеля (Pleijel A., Arkiv mat., astron. och. fys., 1940, A27, № 13, 74), который был вновь получен иным путем Т. В. Бурчуладзе (РЖМат, 1955, 3231).

При доказательстве автор использует метод референта (РЖМат, 1956, 440) и тауберову теорему В. А. Марченко (РЖМат, 1956, 8048). Б. М. Левитан

6731. Преобразования Баклунда, относительно которых остаются инвариантными дифференциальные уравнения в частных производных. Спрингер (Baecklund transformations which leave partial differential equations invariant. Springer George), Northwest. Univ. Studies. Ser. Math. and Phys. Sci., 1956, № 3, 73—78 (англ.)

Продолжение исследований Лёвнера (Loewner, J. Analyse Math. Jerusalem, 1952). Автор рассматривает некоторые системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями от двух независимых переменных, инвариантные относительно преобразований Баклунда (точечные преобразования независимых переменных исключаются). И. С. Аржаных

6732. Бесконечные коммутативные алгебры, присоединенные к системам уравнений с частными производными. Рошкулец (Algebre infinite, comutative, asociate la sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale.) Roşculeţ Marcel N.), Studii şi cercetări mat., 1956, 7, № 3-4, 321—371 (рум.; рез. русск., франц.)

Обобщая ранее полученные результаты (РЖМат, 1956, 8765, 2956; 1957, 2253), автор излагает методы интегрирования систем однородных, линейных уравнений с частными производными любого порядка и с постоянными коэффициентами с помощью моногенных функций гиперкомплексной переменной для случая коммутативной и ассоциативной алгебры с единицей над полем действительных чисел и, вообще, бесконечного ранга, причем такая алгебра специально подбирается для данной системы дифференциальных уравнений. Например, для системы вида

$$a_i^j \frac{\partial V^0}{\partial x^i} + b_i^j \frac{\partial V^1}{dx^i} = 0,\ (i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

с двумя неизвестными функциями: V^0 и V^1 (знаки сумм по повторяющимся индексам здесь и ниже опускаются) берется алгебра с базой $\theta_0 = 1$, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ при условии

$$b_i^j \theta_1 \theta_i + a_i^j \theta_i = 0$$

и данной системе удовлетворяют функции

$$V^0 = \mathrm{Real}\, f(\omega),\ V^1 = \mathrm{Real}\,[\theta_1 \cdot f(\omega)],$$

где $\omega = \theta_i x^i$, $f(\omega) = \theta_i u^i$; $\mathrm{Real}\, f(\omega) = u^0$,

$f(\omega)$ — любая моногенная по ω.

Для системы с $s + 2$ неизвестными функциями вида

$$a_{0,i}^j \partial V^0/\partial x^i + a_{1,i}^j \partial V^1/\partial x^i = b_{k,i}^j \partial W^k/\partial x^i$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, s)$$

берется

$$\omega = \theta_i x^i + \varphi_i x^{r+j}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s;\ r + s = n;\ \theta_0 = 1),$$

где θ_i и φ_j — элементы коммутативной и ассоциативной алгебры с единицей над полем действительных чисел, удовлетворяющие условию

$$a_{0,i}^j \theta_i + a_{1,i}^j \theta_1 \cdot \theta_i = b_{k,i}^j \cdot \varphi_k \theta_i$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, s),$$

причем полагаем

$$\theta_{r+j} \equiv \varphi_j;\quad \theta_0 = 1.$$

Данной системе удовлетворяют функции

$$V_0 = \mathrm{Real}\, f(\omega);\ V_1 = \mathrm{Real}\,[\theta_1 \cdot f(\omega)];\ W^k = \mathrm{Real}\,[\varphi_k \cdot f(\omega)]$$
$$(k = 1, 2, \ldots, s),$$

если $f(\omega)$ — любая моногенная по ω. Аналогичный метод применяется к системе любого порядка с одной неизвестной функцией $U(x_0, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ вида

$$\frac{\partial^p}{\partial y_1^p} \Lambda_0^1 + \frac{\partial^{p-1}}{\partial y_1^{p-1}} \Lambda_1^1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial y^1} \Lambda_{p-1}^1 + \Lambda_p^1 = 0,$$

$$\frac{\partial^p}{\partial y_n^p}\Lambda_0^n + \frac{\partial^{p-1}}{\partial y_n^{p-1}}\Lambda_1^n + \ldots + \frac{\partial}{\partial y_n}\Lambda_{p-1}^n + \Lambda_p^n = 0,$$

где $\Lambda_0^i, \Lambda_1^i, \ldots, \Lambda_p^i$, $(i = 1, \ldots, n)$ — дифференциальные операторы порядка $0, 1, \ldots, p$ соответственно, составленные из операций $\partial/\partial x_0, \ldots, \partial/\partial x_m$ над U. Доказывается, что всякое решение U, разлагающееся в ряд Маклорена в некоторой окрестности начала координат, приводится к виду

$$U = \mathrm{Real}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\lambda_r\omega^r\right),$$

где λ_r — гиперкомплексные постоянные, а ω — гиперкомплексная линейная функция от $x_0, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$.

Имеются опечатки: на стр. 325, строка 12 сверху: θ вместо θ_1; на стр. 345 в формуле (54) пропущено $= 0$ на стр: 347 в уравнении (58): ∂^p/y_1^p вместо $\partial^p/\partial y_1^p$.

Библ. 9 назв. В. С. Федоров

6733. О классификации неустойчивых минимальных поверхностей с многоугольными границами. Маркс (On the classification of unstable minimal surfaces with polygonal boundaries. Marx Imanuel), Communs Pure and Appl. Math., 1955, 8, № 2, 235—244 (англ.)

Рассматриваются неустойчивые минимальные поверхности, ограниченные простым замкнутым многоугольником γ с N вершинами (они циклически занумерованы: $P_1, P_2, \ldots, P_N, P_{N+1} = P_1$) в трехмерном евклидовом пространстве. Для их классификации используется число m' отрицательных характеристических значений оператора $L[f] = -\Delta f + 2KWf$, являющегося выражением Эйлера для второй вариации площади поверхности $E[f] = \int\int_{v>0} f(f_u^2 + f_v^2 + 2KWf^2)\,du\,dv$ (здесь $f = f(u, v) =$ вариация вдоль нормали к поверхности, K — гауссова кривизна, W — дискриминант первой квадратичной формы, минимальная поверхность изометрически отображена на верхнюю полуплоскость). Иной подход к классификации этих поверхностей дают результаты М. Шиффмана по квазиминимальным поверхностям. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_N, p_{N+1} = p_1$ суть точки на оси $v = 0$, циклически расположенные. Поверхность $\bar{x}(u, v)$, $v > 0$, называется квазиминимальной с границей γ, если $\bar{x}(u, v)$ отображает каждый сегмент p_ip_{i+1} в прямую, определяемую $\overline{P_iP_{i+1}}$, и минимизирует интеграл Дирихле $D[\bar{x}] = \int\int_{v>0}(x_u^2 + x_v^2)\,du\,dv$ среди всех таких функций. Шиффман показал, что для данных параметров положения $\{p\} = \{p_1, \ldots, p_{N-3}\}$ (три точки фиксируются) существует единственная квазиминимальная поверхность с данной границей и что для этой поверхности интеграл Дирихле $D[\bar{x}] = d(p)$ имеет производные всех порядков по всем p_i. Автор показывает, что всякая минимальная поверхность $\bar{z}(u, v)$ является квизиминимальной, причем ей соответствуют такие значения $\{p^*\}$, при которых функция $d(p^*)$ стационарна. Индекс m квадратичной формы

$$q(s) = \sum_{i,j=1}^{N-3}\frac{\partial^2 d(p^*)}{\partial p_i \partial p_j}s_i s_j$$

может быть использован для классификации неустойчивых минимальных поверхностей.

Основной результат автора состоит в том, что $m' = m$.

Доказательство основано на построении, с помощью некоторой вариации, рассматриваемой одновременно как вариация поверхности и ее отображения, функционала $Q(s)$ равного $q(s)$ и отличающегося от $E[f]$ на неотрицательное слагаемое. Доказывается также, что $q(s)$ вырождается только тогда, когда $L[f]$ имеет нулевое характеристическое значение.

Основные результаты работы с ссылкой на автора кратко приведены у Р. Куранта (РЖМат, 1957, 477).

Е. Д. Гарбер

6734. Об ограниченности в L_p производных решений эллиптических уравнений и систем. Кошелев А. И., Докл. АН СССР, 1957, 116, № 4, 542—544

Для решения эллиптических систем устанавливается априорная оценка в норме W_p^{2m}, где $2m$ — порядок оператора, через норму свободного члена в L_p.

В области Ω n-мерного евклидова пространства, ограниченной односвязной и достаточно гладкой поверхностью S, рассматривается эллиптическая система уравнений

$$Lu = \sum_{k_1,\ldots,k_{2m}=1}^{n} a^{k_1,\ldots,k_{2m}}(x)\frac{\partial^{2m}u}{\partial x_{k_1}\ldots\partial x_{k_{2m}}} + Tu = f(x), \qquad (1)$$

где $u(x) = [u_1(x), \ldots, u_N(x)]$, $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_N(x)]$, $a^{(k)}(x)$ — квадратные матрицы порядка N^2, Tu — линейный дифференциальный оператор порядка ниже $2m$. Обобщенным решением системы (1) при граничных условиях

$$u\Big|_S = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = \ldots = \frac{\partial^{m-1}u}{\partial \nu^{m-1}}\Big|_S = 0, \qquad (2)$$

где ν — направление внешней нормали к S, называется функция $u(x) \in W_p^{2m}(\Omega)$, удовлетворяющая системе (1) почти всюду в Ω и граничным условиям (2).

Теорема. Если коэффициенты системы (1) непрерывны, $f \in L_p(\Omega)$ $(p > 1)$ и существует обобщенное решение задачи (1) — (2), то это решение удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_p^{2m}(\Omega)} \leqslant C_1\|f\|_{L_p(\Omega)} + C_2\|u\|_{L_p(\Omega)}, \qquad (3)$$

где C_1, C_2 не зависят от u, f.

Неравенство (3) для любой внутренней подобласти Ω' области Ω было получено автором ранее (РЖМат, 1957, 5583). При доказательстве априорной оценки (3) в пограничной полоске применяется функция Грина системы (1) с постоянными коэффициентами для полупространства $x_n \geqslant 0$. Такая функция построена референтом (РЖМат, 1956, 3018). Оценка (3) позволяет, в случае положительно определенного оператора, провести доказательство существования обобщенного решения задачи (1), (2)

Теорема существования устанавливается также для квазилинейных уравнений вида

$$Lu + \lambda L_1 u = f,$$

где L — линейный эллиптический оператор, а L_1 — нелинейный дифференциальный оператор и $f \in L_p(\Omega)$, в предположении достаточно хороших дифференциальных свойств оператора L_1 и малости параметра λ.

О. В. Гусева

6735. Целые решения дифференциального уравнения $\nabla^p u = f(u)$. Вальтер (Ganze Lösungen der Differentialgleichung $\Delta^p u = f(u)$. Walter Wolfgang), Math. Z., 1957, 67, № 1, 32—37 (нем.)

Под целым решением понимается непрерывно дифференцируемое во всем пространстве $2p$ раз решение рассматриваемого уравнения. Доказана теорема: пусть $f(s)$ непрерывна и положительна для всех s и $f(s) \geqslant s^{1+\alpha}$ для $s \geqslant s_0 (\alpha < 0)$; тогда не существует ни одного целого решения указанного уравнения в случае двух независимых переменных. То же утверждение справедливо для большого числа независимых переменных, если потребовать дополнительно, чтобы $f(s) \geqslant \delta > 0$. Построен пример для $p = 2$, показывающий, что последнее условие нельзя отбросить. А. М. Ильин

6736. Решение задачи Коши для уравнения $\partial^2 u/\partial t^2 + \Delta\Delta u = 0$. **Сидоров Ю. В.**, Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 4, 341—348

Рассматривается задача Коши $\partial^2 u / \partial^2 t + \Delta\Delta u = 0$, $u\Big|_{t=0} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x)$. При этом $t \geqslant 0$, x — точка n — мерного пространства.

Предварительно доказывается теорема об обращении n — мерного интеграла Фурье для функций $\psi(x)$ таких, что они и их частные производные до порядка $2\left[\dfrac{n-1}{4}\right]+2$ непрерывны и абсолютно интегрируемы по всему пространству.

С помощью этой теоремы доказываетя интегральная формула, дающая решение задачи Коши при том условии, что $\varphi(x)$ и ее частные производные до порядка $2\left[\dfrac{n+1}{4}\right]+4$ непрерывны и абсолютно интегрируемы. Эта формула является обобщением формул Бусинеска (Boussinesq, Application des potentials, 1885), полученных для $n = 1$ и $n = 2$. Приводится пример, показывающий, что если $\varphi(x)$ не удовлетворяет наложенным на нее условиям, то функция $u(x, t)$, найденная по этой формуле, может не являться решением задачи. Кроме того, доказывается, что всякое достаточно гладкое решение задачи может быть представлено по этой формуле. Д. М. Эйдус

6737. О решении задачи Дирихле уравнений с неразделяющимися переменными для прямоугольника. **Минасян Р. С.**, Докл. АН АрмССР, 1956, 23, № 4, 145—152 (рез. арм.)

Дается в явном виде решение задачи Дирихле для уравнения

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = P(x, y)$$
$$(\beta - \alpha^2 > 0),$$

удовлетворяющее следующим краевым условиям: $U(x, 0) = S_0(x)$; $U(x, d) = S(x)$, $U(0, y) = T_0(y)$; $U(b, y) = T(y)$, где $P(x, y)$ — суммируемая, а $S_0(x)$, $S(x)$, $T_0(y)$, $T(y)$ непрерывны и имеют суммируемые первые производные и, кроме того, $S_0(0) = T_0(0)$, $S_0(b) = T(0)$, $S(0) = T_0(d)$ и $S(b) = T(d)$.

Решение представлено в виде ряда Фурье по sin

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d}$$

и по cos

$$U(x, y) = \frac{\varphi_0(x)}{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_n(x) \cos \frac{k\pi y}{d}.$$

Н. И. Мозжерова

6738. Краевая задача с тангенциальной производной для уравнений эллиптического типа. **Вольская** (Problème aux limites à la dérivée tangentielle pour l'équation du type elliptique. Wolska J.), Bull. Acad. polon. sci., 1956, Cl. 3, 4, № 9, 563—567 (франц.)

Пусть D плоская область ограничена кривой Жордана «C», имеющей в каждой точке вращающуюся касательную и удовлетворяющей условию Гельдера.

Предположим, что функция $a(P)$ определена на C и удовлетворяет условию Гельдера, а функция $\Phi(P, u, t)$ определена для

$$P \in C, \quad |u| \leqslant R_1, \quad |t| \leqslant R_2 \quad (R_1 > 0, \ R_2 > 0)$$

и удовлетворяет условиям:

$$|\Phi(P, u, t) - \Phi(P_1, u_1 t_1)| \leqslant$$
$$\leqslant K(|P - P_1|^{\alpha} + |u - u_1|^{\beta} + |t - t_1|)$$
$$(\alpha > 0, \ \beta > 0)$$

и функция $F(x, y, u, v, w)$ удовлетворяет условиям Гельдера относительно всех переменных

$$(x, y) \in D + C, \quad |u| \leqslant R_1, \quad |v| \leqslant R_2 \quad |w| \leqslant R_2.$$

Автор доказывает существование функции, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta u = F(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y)$$

внутри D и условию

$$du/dn + a(P)u = \Phi(P, u, du/ds) \quad \text{для } P \in C, \qquad (1)$$

где $\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$, $\partial u/\partial y$ означает производную по направлению нормали $\partial u/\partial s$ тангенциальную производную.

Автор предполагает кроме того, что константа K и верхняя граница для функций $|F|$, $|\Phi|$ достаточно малы, и нулевое решение является единственным решением определенного уравнения Фредгольма, связанного с задачей Δu 0 D, $du/dn + a(p)u = 0$ на C. Результат является обобщением результата Погожельского (РЖМат, 1956, 5248) относящегося к уравнению $\Delta u = 0$ условиями (1).

В доказательстве автор пользовался представлением решения в виде суммы потенциалов, она получает некоторый интеграл уравнения и доказывает существование решения теоремы Шаудера о неподвижной точке. A. Plis'

6739. Решение задачи Дирихле-Неймана для операторов метагармонического, волнового и диффузии методом собственных функций. (Первое сообщение). **Гарнир, Гобер** (Le problème de Dirichlet — Neumann pour les opérateurs métaharmonique, des ondes et de la diffusion par la méthode des fonctions propres. (Première communication). Garnir H. G., Gobert J.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1957, **26**, № 6, 279—289 (франц.)

Для метагармонического оператора—$\Delta + z$ (z — произвольное комплексное число) рассмотрена смешанная задача Дирихле — Неймана в области Ω n-мерного евклидова пространства такой, что собственные функции оператора Лапласа образуют полную ортонормированную систему и собственные значения — последовательность, сходящуюся к—∞. Используя методы теории операторов в гильбертовом пространстве, авторы изучают свойства резольвенты, построенной в виде ряда по собственным функциям, и получают весьма элементарными методами известные относящиеся к рассматриваемой задаче результаты. И. В. Гельман

6740. Гармоническое решение уравнения Пфаффа. **Авдеев Н. Я.**, Уч. зап. Ростовск. н/Д. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 4, 75—78

Получены условия, необходимые и достаточные для существования гармонического решения, т. е. решения $U(x, y, z) = c$, удовлетворяющего уравнению Лапласа $\Delta_3 U = 0$ для уравнения Пфаффа

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0. \quad (1)$$

Приведена формула для определения интегрирующего множителя уравнения (1), соответствующего гармоническому решению, если таковое существует. Показано, что все такие интегрирующие множители отл-

чаются друг от друга лишь постоянным множителем и что всякое гармоническое решение представляется в виде: $\Phi = C_1 U + C_2$, где U — некоторое гармоническое решение, а C_1, C_2 — произвольные постоянные. Г. Л. Мизернюк

6741. **О равномерной сходимости разложений по собственным функциям при суммировании в порядке возрастания собственных чисел. Ильин В. А.**, Докл. АН СССР, 1957, 114, № 4, 698—701

Изучается сходимость разложений по собственным функциям уравнения

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

в произвольной области g любого четного числа измерений с однородным краевым условием любого из трех видов.

Имеет место следующая теорема: Пусть g допускает применение формулы Грина, а f — произвольная функция, заданная в g и удовлетворяющая следующим двум условиям: 1) $f \in W_p^{(N/2)}(g)$ $(p > 2)$, 2) сама функция f и ее повторные лапласины до порядка $[(N-2)/4]$ для случая первой краевой задачи и до порядка $[(N-4)/4]$ для случаев 2-й и 3-й краевых задач удовлетворяют в среднем соответствующему однородному краевому условию. Тогда для любого $\alpha < N\frac{p-2}{4p}$, если $2 < p < 2N/(N-1)$, и $\alpha < 1/4$, если $p \geqslant 2N/(N-1)$, ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i u_i(p)\, \lambda_i^{\alpha} \qquad (1)$$

($u_i(p)$ — собственные функции, f_i — коэффициенты Фурье) сходится равномерно в любой строго внутренней подобласти g' области g.

В частности, при $\alpha = 0$ ряд (1) совпадает с рядом Фурье функции $f(p)$ и, значит, при перечисленных выше условиях функция $f(p)$ разлагается в области g' в равномерно сходящийся ряд Фурье. Доказательство теоремы лишь намечено. Б. М. Левитан

6742. **О равномерной сходимости разложений по собственным функциям нечетномерных областей. Ильин В. А.**, Докл. АН СССР, 1957, 115, № 4, 650—652

Устанавливаются достаточные условия равномерной (но не абсолютной) сходимости разложения по собственным функциям оператора Лапласа.

Теорема. Пусть G — конечная область в N-мерном ($N > 1$ нечетное) пространстве, допускающая применение формул Грина к собственным функциям, f — функция, которая определена в G и удовлетворяет условиям: 1) $f \in W_p(N-1)/2\,(G)$, где $p > 2N/(N-1)$; 2) функции $f, \Delta f, \Delta^2 f, \ldots, \Delta_k f$, где $k = [(N-2)/4]$ в случае первой краевой задачи и $k = [(N-4)/4]$ в случае второй или третьей краевой задачи, удовлетворяют в обобщенном смысле соответствующему однородному краевому условию. Тогда при суммировании в порядке возрастания собственных чисел ряд Фурье этой функции сходится к ней равномерно в любой строго внутренней подобласти. При $N = 3$ для случая второй или третьей краевой задачи удовлетворения краевому условию вообще не требуется.

Найденные условия не могут быть ослаблены. Для четномерных областей соответствующий вопрос рассмотрен автором ранее (реф. 6741). Д. М. Эйдус

6743. **Асимптотика собственных значений и функций задач типа Дирихле для одного класса эллиптических систем. Драпкин А. Б.**, Докл. и сообщ. Ужгородск. ун-та. Сер. физ.-матем. и хим., 1957, № 1, 7—8

Пусть D — конечная область n-мерного пространства Евклида R_n, ограниченная поверхностью S типа Ляпунова. Приводятся асимптотические формулы для собственных векторов и собственных значений матричного дифференциального оператора $A(x, \partial/\partial x)$ второго порядка эллиптического типа, с достаточно гладкими коэффициентами.

Для вывода асимптотических формул используется метод Карлемана и оценка регулярных частей соответствующих матриц Грина, предложенная Я. Б. Лопатинским. Доказательства не приведены. Б. М. Левитан

6744. **Об эллиптических системах дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Бицадзе А. В.**, Докл. АН СССР, 1957, 112, № 6, 983—986

В работе рассматриваются эллиптические системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными вида

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + A_1 u_x + B_1 u_y + C_1 u = 0, \qquad (1)$$

где A, B, C, A_1, B_1, C_1 — непрерывные вещественные квадратные матрицы порядка n в некоторой области D переменных x, y, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$,

$$\eta A\eta + \eta B\xi + \xi B\eta + \xi C\xi \geqslant 0 \qquad (2)$$

для любых $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Для задачи Дирихле формулируется следующая альтернатива Фредгольма. Неоднородная задача всегда разрешима, если соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение. Для некоторых частных случаев систем (1) выведены достаточные условия для того, чтобы однородная задача Дирихле имела только тривиальное решение.

Приведены примеры систем вида (1), не удовлетворяющих условию (2), когда задача Дирихле всегда имеет решение и притом единственное, и примеры, когда задача Дирихле невозможна. Ю. В. Сидоров

6745. **О классах уравнений, приводящихся к уравнению Лапласа. Баллабх** (On a class of equations reducible to Laplace's equation. Ballabh R.), Ganita, 1954, 5, № 2, 93—96 (англ.)

В работе показано, что уравнение

$$\Delta p = \left\{f(r)\frac{\partial}{\partial r} + 1\right\}\left\{F(r)\frac{\partial}{\partial r}\right\}p,$$

где Δ — оператор Лапласа, а $r^2 = x^2 + y^2$ в случае плоскости и $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ в случае пространства, заменой переменных

$$\log \rho = \pm \int \frac{dr}{r(1 - f \cdot F)^{1/2}}$$

сводится к уравнению Лапласа $\Delta p = 0$. Ю. В. Сидоров

6746. **Вывод уравнения обратной задачи теории ньютонова потенциала. Козманова А. А.**, Докл. АН СССР, 1957, 116, № 1, 21—23

Под обратной задачей потенциала понимается задача отыскания односвязной области D, имеющей при заполнении веществом с плотностью $\mu \equiv 1$ данный внешний потенциал V_e. Решением этой задачи называется функция

$$\bar{r}(x, y, z) = X(x, y, z)\,\bar{i} + Y(x, y, z)\,\bar{j} + Z(x, y, z)\,\bar{k},$$

отображающая шар T единичного радиуса с центром в начале координат на область D.

Автор получает для трехмерного пространства нелинейное интегро-дифференциальное уравнение обратной задачи, обобщающее соответствующее интегральное уравнение плоской задачи (РЖМат, 1957, 1494).

При этом предполагается, что область D имеет кусочно-гладкую границу, а функция $\bar{r}(x, y, z)$ удовлетворяет условию Гёльдера и является потенциально-гармонической в области T', дополняющей шар T до всего пространства, т. е. $\operatorname{div}\bar{r}=0$, $\operatorname{rot}\bar{r}=0$ в T'. Искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{4\pi}\int\int_\sigma\left[\operatorname{grad}\frac{1}{\rho(x', y', z', \xi, \eta, \zeta)}\right]\bar{n}(x', y', z')\bar{U}_e(X(x' y', z'),$$

$$Y(x', y', z'), Z(x', y', z'))]\,d\sigma=-\frac{4}{3}\pi\bar{r}(\xi, \eta, \zeta)+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\int_\sigma\left[\operatorname{grad}\frac{1}{\rho(x', y', z', \xi, \eta, \zeta)}\right]\bar{n}(x', y', z)\bar{P}(x', y', z')\Big]d\sigma.$$

Здесь $\bar{U}_e=\operatorname{grad}V_e$; σ — поверхность шара T; $\bar{n}$ — нормаль к σ; (x', y', z') — точка сферы σ; (ξ, η, ζ) — точка области T'; $\rho(x', y', z', \xi, \eta, \zeta)$ — расстояние между соответствующими точками; $\bar{P}$ — некоторый вектор, зависящий от функции $\bar{r}$ и ее частных производных первого порядка. Квадратные скобки обозначают определенное по формуле $[\bar{a}\bar{b}\bar{c}]=-(\bar{b}\bar{c})\,\bar{a}+(\bar{c}\bar{a})\,\bar{b}-(\bar{a}\bar{b})\,\bar{c}$ тройное произведение векторов. Ю. А. Шашкин

6747. Задача Неймана для дифференциальных форм на римановых многообразиях. Коннер (The Neumann's problem for differential forms on Riemannian manifolds. Conner P. E.), Mem. Amer. Math. Soc., 1956, № 20, 1—58 (англ.)

На ориентируемом римановом многообразии M класса C^∞ дается решение обобщенной задачи Неймана для дифференциальных форм (относительно понятий, употребляемых в работе, см. Ж. де Рам, Дифференцируемые многообразия, М., 1956, гл. V; РЖМат, 1958, 03 К). Открытое множество $B\subset M$ называется конечным многообразием, если $\bar{B}$ компактно и если его граница в B состоит из конечного числа непересекающихся замкнутых многообразий, регулярно вложенных в M. Касательная составляющая $t\varphi$ формы φ, заданной на B, определяется как ограничение φ на bB, нормальная же составляющая определяется формулой $n\varphi=\varphi-t\varphi$. Пусть A есть гильбертово пространство дифференциальных форм с конечной нормой, d и δ — замыкания внешних дифференциала и кодифференциала в A, d_c— замыкание дифференциала, ограниченного на внешних формах с компактными носителями, δ_c определяется аналогично. Пусть $\widetilde{A}$ есть подпространство A, образованное формами $d\varphi=\delta\varphi=0$, и $\widetilde{A}_t$, $\widetilde{A}_n$ — пересечения A с областью задания d_c и δ_c соответственно, состоящие из гармонических форм с исчезающими касательными или нормальными составляющими, и F, F_t, F_n — операторы ортогонального проектирования на $\widetilde{A}$, $\widetilde{A}_t$, $\widetilde{A}_n$ соответственно. Вводятся следующие операторы Лапласа: $\Delta_N=\delta_c d+d_c\delta$, $\Delta_L=\delta d_c+d_c\delta$, $\Delta_M=\delta_c d+d\delta_c$ с соответствующими областями определения $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$, так что $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ состоят из форм, удовлетворяющих на bB условиям $nd\varphi=t\delta\varphi=0$, $t\varphi=t\delta\varphi=0$, $n\varphi=nd\varphi=0$ соответственно.

Основные результаты работы, относящиеся с этим операторам, можно сформулировать в виде трех утверждений:

На конечном многообразии B существуют три оператора N_0, L_0, M_0, обладающие следующими свойствами:

I. Оператор N_0 есть вполне непрерывное линейное отображение $A\to\mathfrak{N}$, ядро которого совпадает с $\widetilde{A}$, а образ — с ортогональным дополнением $\widetilde{A}$ в $\mathfrak{N}$. Оператор N_0 перестановочен с Δ_N и $\Delta_N N_0\varphi=\varphi-F\varphi$, $\varphi\in A$, так что справедливо разложение

$$A=d_c\delta\mathfrak{N}+\delta_c d\mathfrak{N}+\widetilde{A}.$$

II. Оператор L_0 есть вполне непрерывное линейное отображение $A\to\mathfrak{L}$, ядро которого совпадает с $\widetilde{A}_t$ и образ — с ортогональным дополнением $\widetilde{A}_t$ в $\mathfrak{L}$. Оператор L_0 перестановочен с d_c, δ и Δ_L и $\Delta_L L_0\varphi=\varphi-F_t\varphi$, $\varphi\in A$, так что справедливо разложение

$$A=d_c\delta\mathfrak{L}+\delta d_c\mathfrak{L}+\widetilde{A}_t.$$

III. Оператор M_0 есть вполне непрерывное линейное отображение $A\to\mathfrak{M}$, ядро которого совпадает с $\widetilde{A}_n$ и образ — с ортогональным дополнением $\widetilde{A}_n$ в $\mathfrak{M}$. Оператор M_0 перестановочен с операторами d, δ_c и Δ_M и $\Delta_M M_0\varphi=\varphi-F_n\varphi$, так что имеет место разложение

$$A=d\delta_c\mathfrak{M}+\delta_c d\mathfrak{M}+\widetilde{A}_n.$$

Существование оператора M_0 дает полное решение проблемы Неймана на конечном многообразии B, состоящей в нахождении решения $\Delta\psi=\mu$, нормальная составляющая которого имеет предписанные значения. Этот результат содержит в себе ряд теорем относительно гармонических тензоров на римановых многообразиях, в частности автор с их помощью строит гармонические тензоры с некоторыми заданными особенностями. Библ. 25 назв. И. И. Данилюк

6748. Систематическое решение линейных граничных задач. Бюрга (Résolution systématique de problèmes aux limites linéaires. Burgat Paul), Z. angew. Math. und Phys., 1957, 8, № 4, 297—303 (франц.; рез. англ.)

Указан метод устранения некоторых затруднений, возникающих при применении преобразования Лапласа к решению граничных задач для уравнений в частных производных. Эти затруднения бывают связаны с необходимостью определять новые неизвестные функции, входящие в преобразованную задачу, или вычислять сложные контурные интегралы при обратном преобразовании. Идея метода — представить решение преобразованной задачи в виде ряда по собственным функциям способом, указанным в предыдущей работе автора (РЖМат, 1953, 736).

В качестве примера рассмотрена задача

$$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}=F(x),\ \lim_{y\to+0}U(x, y)=G(x)\ (0<x<l),$$

$$|U(x, y)|<M\ (0\leqslant x\leqslant l,\ y\geqslant 0),$$

$$\lim_{x\to+0}[\alpha_1U(x, y)+\alpha_2U_x(x, y)]=A,$$

$$\lim_{x\to l-0}[\beta_3U(x, y)+\beta_4U_x(x, y)]=B\ (y>0),$$

где A, B, M, α_i, β_i — постоянные.

Преобразованием Лапласа (L) она сводится к задаче $u''+s^2u=sG(x)+H(x)+F(x)/s$, $\alpha_1u(0, s)+\alpha_2u'(0, s)=A/s$, $\beta_3u(l, s)+\beta_4u'(l, s)=B/s$, $(u(x, s)=L\{U(x, y)\}$, $H(x)=\lim_{y\to+0}U_y(x, y)$ — новые неизвестные функции), решение которой находится в виде ряда

$$u=\sum_1^\infty\frac{1}{\omega_k^2-s^2}\left\{\frac{\omega_k}{N_k}(A-\rho_kB)\,\frac{1}{s}-\right.$$

$$-sG_k - H_k - \frac{F_k}{s}\Big\}(\alpha_1 \sin\omega_k x - \alpha_2\omega_k\cos\omega_k x),$$

где

$$T_k = \frac{1}{N_k}\int_0^l T(\xi)(\alpha_1\sin\omega_k\xi - \alpha_2\omega_k\cos\omega_k\xi)\,d\xi \quad (T \equiv F, G, H),$$

ω_k, N_k и ρ_k вычисляются по формулам, указанным в § 1 реферируемой работы, а H_k находятся из условия

$$\left[\frac{\omega_k}{N_k}(A-\rho_k B)\frac{1}{s} - sG_k - H_k - \frac{F_k}{s}\right]_{s=\omega_k} = 0.$$

Отсюда

$$U(x, y) = \sum_1^\infty \left\{\left(\frac{\omega_k}{N_k}(A-\rho_k B) - F_k\right)\frac{1-e^{-\omega_k y}}{\omega_k^2} + G_k e^{-\omega_k y}\right\}(\alpha_1\sin\omega_k x - \alpha_2\omega_k\cos\omega_k x).$$

Отмечено, что этот метод можно распространить и на случай большего числа переменных. Автор указывает ряд преимуществ своего метода, в частности то, что его применение не выводит из вещественной области. Рассмотрен также пример, когда собственные функции не ортогональны. И. В. Гельман

6749. К проблеме Дирихле для уравнения $\Delta u = F(x, u, \operatorname{grad} u)$. Симода (Sur le problème de Dirichlet discontinu dans l'équation $\Delta u = F(x, u, \operatorname{grad} u)$. Simoda Seturo. Mem. Osaka Univ. Lib. Arts Ed. Ser. B. 1954, № 3, 29—36) (франц.)

Мы используем терминологию и обозначения реферата более ранней статьи (РЖМат, 1958, 340); в конце которого, b^* заменяется на d^*. Если f определяется на подмножестве $e \in \bar{d}$ и $y \in \bar{e}$, положим $f^*(y) = \limsup f(x)$ при $x \to y$, $x \in e$, аналогично $f_*(y) = \liminf f(x)$. Пусть $\underline{\omega}$ и $\bar{\omega}$ — ограниченные гладкие функции такие, что $\underline{\omega} \in \underline{Z}$, $\bar{\omega} \in \bar{Z}$ и $\bar{\omega} \geqslant \underline{\omega}$ в d. Пусть h — ограниченная функция на d^* такая, что $\underline{\omega}_* \leqslant h_* \leqslant h^* \leqslant \bar{\omega}^*$ на d^* (в тексте $\underline{\omega}^* \leqslant h_*$). Пусть $F(x, \nu, q)$ непрерывна и ограничена на соответствующей области и предположим, что $\Delta\bar{\omega}(x) \leqslant F(x, \bar{\omega}(x), \nabla\bar{\omega}(x))$ и $\Delta\underline{\omega}(x) \geqslant F(x, \underline{\omega}(x), \nabla\underline{\omega}(x))$. Тогда существует по крайней мере одно $u \in \bar{Z} \cap \underline{Z}$ такое, что $\Delta u(x) = F(x, u(x), \nabla u(x))$ и $\underline{\omega} \leqslant u \leqslant \bar{\omega}$ в d, в то время как $h_* \leqslant u_* \leqslant u^* \leqslant h^*$ на d^*. F. A. Ficken

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 2, 160.

6750. Об уравнении с частными производными второго порядка и о новом обобщении функций Бесселя. Чорэнеску (Asupra unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea şi o nouă generalizare a funcţiilor lui Bessel. Ciorănescu N., Bul. Inst. politehn. Bucureşti, 1956, 18, № 1—2, 1—4 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается уравнение

$$(ar_2 + 1)\Delta u + 4\lambda u = 0,$$

аналитическое решение которого ищется в виде ряда по гармоническим функциям $u_k(r, \theta)$

$$u(r, \theta) = \sum_{u=0}^\infty u_k(r, \theta) r^{2k} \qquad (1)$$

Функции $u_k(r, \theta)$ в свою очередь могут быть представлены в виде

$$u_k(r, \theta) = \sum_{k=0}^\infty (A_n^k \cos n\theta + B_n^k \sin n\theta) r^n, \qquad (2)$$

подставляя (2) в (1), получим:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^\infty [A_n(r^2)\cos n\theta + B_n(r^2)\sin n\theta] r^n,$$

где $A_n(r^2) = \sum_{k=0}^\infty A_n^k r^{2k}$, $B_n(r^2) = \sum_{k=0}^\infty B_n^k r^{2n}$.

Автор показывает, что $A_n(r)$ и $B_n(r)$ можно преобразовать к такому виду:

$$A_n(r) = r^n\left\{1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{\lambda[(n+1)a+\lambda]\ldots[(k-1)(n+k-1)a+\lambda]}{(n+k)!}\right.,$$

тогда их можно рассматривать как обобщение функций Бесселя, к которым они сводятся, когда $a = 0$.

Из резюме автора

6751. Связь между решениями уравнений Лапласа в полярных и сферических координатах. Андрианов Г. Н., Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1957, вып. 7 (а), 121—131

Известно, что вещественная и мнимая части, а также произведение вещественной и мнимой части любой аналитической функции являются гармоническими функциями. Ввиду этого автор представляет решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$$

в виде

$$u(\rho, \varphi) = AU(\rho, \varphi)V(\rho, \varphi) + BU(\rho, \varphi) + CV(\rho, \varphi) + E\varphi + N, \qquad (1)$$

где A, B, C, E, N — произвольные постоянные, а $U(\rho, \varphi)$, $V(\rho, \varphi)$ — вещественная и мнимая части любой аналитической в области функции.

В виде (1) можно написать и решение уравнения Лапласа в сферических координатах. А именно: имеет место теорема: Любое решение уравнения Лапласа в полярных координатах является решением уравнения Лапласа в сферических координатах, если в первом заменить полярный радиус ρ произведением $r\sin\theta$, где r — радиус сферы, θ — сферическая координата.

Н. И. Мозжерова

6752. О некоторых нелинейных функциональных проблемах. Булиган (Sur quelques problèmes fonctionnels non linéaires. Bouligand Georges), C. r. Acad. sci., 1955, 241, 1537—1539 (франц.);

Об одной вариационной проблеме. Булиган (Sur un problème variationnel. Bouligand Georges), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 8, 975—976 (франц.)

Ставится задача: найти функцию $U(x, y)$, гармоническую в области $D(x^2 + y^2 < 1)$, если известны значения $\overline{\operatorname{grad}^2 U}$ на границе C области. Пусть $f(z) = U + iV$, где V — сопряженная гармоническая. Задача сводится к отысканию $f'(z)$, если известен квадрат его модуля на C. Пусть $\varphi(z)$ голоморфна в D, $\varphi(0) \neq 0$ и $|\varphi|_C^2 = \overline{\operatorname{grad}^2 U}$. Положив $f'(z) = \{z^n\varphi(z)\}$, где n — целое $\geqslant 0$, получим счетное множество решений. Другую систему решений получим, если вместо z^n возьмем $[(z-a_k):(z-1:\bar{a}_k)]^{m_k}$, где a_k — точки из D. Множество A этих точек конечно, если $\overline{\operatorname{grad}^2 U}$ ограничен снизу на C положительным числом и может быть бесконечным, если на C имеются нули $\overline{\operatorname{grad}^2 U}$. Решение этой задачи для односвязной области D дает ответ на вариационную задачу: отыскать функцию U в области D

с теми же граничными условиями, обращающую в минимум $\iint_D \overline{\text{grad}}^2 U dxdy$. Во второй заметке доказывается, что множество функций, имеющих непрерывный градиент в D и удовлетворяющих условиям вариационной задачи, некомпактно. Я. П. Бланк

6753. **Системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка эллиптического типа. Миранда** (Systèmes elliptiques d'équations linéaires aux dèrivées partielles du premier ordre. Miranda C.), Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali 1954. Roma, 1955, 30—38 (франц.)

Статья представляет собой обзор результатов в области граничных задач для эллиптических систем уравнений в частных производных первого порядка. Она содержит результаты многих авторов, относящиеся к системам уравнений эллиптического типа вида:

$$a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{11}\frac{\partial v}{\partial x}+b_{12}\frac{\partial v}{\partial y}=c_{11}u+c_{12}v+f_1,$$
$$a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}+b_{21}\frac{\partial v}{\partial x}+b_{22}\frac{\partial v}{\partial y}=c_{21}u+c_{22}v+f_1,$$

где a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} $(i, j=1, 2)$ f_1 и f_2 — функции переменных x и y в замкнутой области T.

Ищется решение, удовлетворяющее условиям

$$a(s)u+b(s)v=\varphi$$

на границе области T, при различных предположениях относительно регулярности коэффициентов.

Автор дает приложение этих результатов к вариационному исчислению и конформным отображениям. Он также рассматривает определенную систему эллиптического типа с $n\geqslant 2$ независимыми переменными, применяя ее к вариационной задаче для интеграла

$$I=\int_T f\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)dx_1,\ldots,dx_n$$

Получены, кроме того, некоторые результаты относительно общего решения. Библ. 27 назв. A. Pliś

6754. **Теоремы единственности и оценки для нормальных гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Хёрмандер** (Uniqueness theorems and estimates for normally hyperbolic partial differential equations of the second order. Hörmander Lars), 12te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953. Lund, 1954, 105—115 (англ.)

Автор рассматривает уравнение

$$\Delta_2 u+(b, \text{grad}\, u)+cu=\varphi$$

в области D риманова многообразия с метрикой $g_{ik}dx^i dx^k$ с лоренцевой сигнатурой (Δ_2 — оператор Бельтрами 2-го порядка, b — вектор, c и φ — элементы класса C^1). Предполагая относительно области D, следующее: 1) граница области состоит из кусков класса C^1, S_t-ориентированного во времени и S^+- и S^--ориентированных в пространстве, 2) соответствующим выбором коэффициентов область D локально задается в окрестности $S_t x^1<x^1(x^2,\ldots,x^n)$, где x^1 — коэффициент, ориентированный во времени, 3) существует функция χ класса C^1 в D такая, что $\text{grad}\,\chi$ будет вектором времени, — автор строит некоторое векторное поле (u-поле), с помощью которого (рассматривая некоторые интегралы квадратичных форм относительно u и $\text{grad}\, u$ и применяя формулу Грина) доказывает единственность решения задачи с условиями Коши на S^+ и граничными условиями на S_t и дает некоторые (интегральные оценки типа Фридрихса—Леви. S. Lojasiewicz

6755. **Теорема единственности и оценка нормального гиперболического дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. Хёрмандер** (Uniqueness theorems and estimates for normally hyperbolic partial differential equations of the second order. Hörmander Lars), Medd. Lunds univ. mat. semin., 1954, 12 (англ.)

Перепечатано из C. r. 12te Skand. matematikerkongr. Lund (реф. 6754).

6756. **Гиперболическое решение обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Авдеев Н. Я.**, Уч. зап. Ростовск.-н/Д. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 4, 61—68

Решение $u(x, y)=c$ уравнения

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0 \qquad (1)$$

называется гиперболическим решением (г. р.), если оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (2)$$

Если (1) — уравнение в полных дифференциалах, то для существования г. р. достаточно выполнения условия

$$\partial M/\partial x=\partial N/\partial y. \qquad (3)$$

В общем случае необходимое и достаточное условие существования такого решения имеет вид:

$$\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x,$$

где

$$P=\frac{M\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)+N\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{M^2-N^2},$$
$$Q=\frac{M\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)+N\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)}{M^2-N^2}$$

Оно находится путем определения интегрирующего множителя уравнения (1), удовлетворяющего равенству

$$\partial(\mu M)/\partial x=\partial(\mu M)/\partial y.$$

Все такие интегрирующие множители имеют вид: $\mu=C_{\mu_0}$, где μ_0 — один из них, а C — произвольная постоянная. Если u_0 — некоторое г. р., то любое другое г. р. представляется в виде $u=c_1u_0+c_2$ (c_1, c_2 — некоторые постоянные).

Показано, что для существования y (1) г. р. необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi=\ln\frac{M+N}{M-N}$ удовлетворяла равенству (2).

Доказаны и другие утверждения. Г. Л. Мизерюк

6757. **К вопросу об обосновании метода Фурье для уравнения колебаний. Ильин В. А.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 4, 289—296

В N-мерной конечной области G, ограниченной поверхностью Г, рассматривается смешанная задача

$$\Delta v-\frac{1}{a^2}v_{tt}=f(x, t),\ v(x, 0)=\varphi(x),\ v_t(x, 0)=$$
$$=\psi(x),\ v|_\Gamma=0.$$

О. А. Ладыженская (РЖМат, 1955, 3774) доказала, что при некоторых предположениях относительно f, φ, ψ, Г метод Фурье дает классическое решение задачи. В реферируемой работе доказывается это же утверждение в предположении, что f, φ, ψ удовлетворяет условиям

О. А. Ладыженской, а Г удовлетворяет более слабому условию принадлежности к классу Ляпунова.

Д. М. Эйдус

6758. Проблема о начальных и граничных значениях для волнового уравнения в полубесконечном цилиндре. Хаяси, Токусима дайгаку когакубу кэнкю хококу Scient. Papers Fac. Engng Tokushima Univ., 1955, № 6, 106—107 (японск.)

6759. Зависимость решений гиперболических уравнений от коэффициентов и от данных на характеристиках. Кордуняну К., Ж. чистой и прикл. матем. Акад. РНР. 1956, 1, № 1, 45—49

Исследуется следующий вопрос: зависит ли непрерывно (имея в виду рассмотрение малых приращений в смысле метрики Чебышева) решение задачи Гурса для гиперболического уравнения

$$z_{xy} + a(x, y) z_x + b(x, y) z_y + c(x, y) z = d(x, y) \quad (1)$$

с условиями на характеристиках

$$z(x, 0) = f(x),\ z(0, y) = g(y) \quad (2)$$

(функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$, $f(x)$, $f'(x)$, $g(y)$, $g'(y)$ непрерывны в некотором прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant \alpha$, $0 \leqslant y \leqslant \beta$) от a, b, c, d, f, g без дополнительных предположений относительно характера изменения их производных, какие были сделаны в предыдущей работе автора (РЖМат, 1957, 6690).

Приводится пример, показывающий, что в общем случае ответ является отрицательным.

Доказываются два критерия устойчивости: если придать малые приращения функциям a, b, c, d, f и g таким образом, чтобы полные вариации f и g (в первом критерии) или же полные вариации a и b относительно x и соответственно y (во втором критерии) получили малые приращения, то решение $z(x, y)$ получит малые приращения (независимо от размеров прямоугольника).

Указывается схема доказательства критерия устойчивости решений нелинейных уравнений вида

$$z_{xy} = F(x, y, z, z_x, z_y)$$

с условиями (2) на характеристиках.

Работа примыкает к одноименной статье автора (РЖМат, 1956, 6586).

Д. Б. Тополянский

6760. Об обобщении классических проблем для системы гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Шмыдт (Sur une généralisation des problèmes classiques concernant un système d'équations différentielles hyperboliques du second ordre à deux variables indépendantes. Szmydt Z.), Bull. Acad. polon. sci., 1956, Cl. 3, 4, № 9, 579—584 (франц.); Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, 4, № 9, 569—574

Результаты, содержащиеся в статье, являются обобщением полученных автором ранее (РЖМат, 1958, 351).

Предполагается:

а) вектор-функция $F(x, y, U, P, Q)$ (где $F = (f_1, \ldots, f_n)$, $U = (u_1, \ldots, u_n)$, $P = (p_1, \ldots, p_n)$, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$) непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|F| \leqslant N,\ |F(x, y, U, P, Q) - F(x, y, U, \widetilde{P}, \widetilde{Q})| \leqslant$$
$$\leqslant M(|P - \widetilde{P}| + |Q - \widetilde{Q}|)$$

в области $|x| \leqslant \alpha$, $|y| \leqslant \beta$, $|U| \leqslant r$, $|P| \leqslant r$, $|Q| \leqslant r$;

б) вектор $\overset{\circ}{U} = (\overset{\circ}{u}_1, \ldots, \overset{\circ}{u}_n)$ удовлетворяет неравенству $|\overset{\circ}{U}| \leqslant c$;

в) непрерывная вектор-функция $G = (g_1, \ldots, g_n)$ удовлетворяет неравенствам

$$|G(x, U, Q)| \leqslant c,\ |G(x, U, Q) - G(x, U, \overline{Q})| \leqslant K_1 |Q - \widetilde{Q}|$$

в области $|x| \leqslant \alpha$, $|U| \leqslant r$, $|Q| \leqslant r$;

г) функция $H = (h_1, \ldots, h_n)$ удовлетворяет неравенствам $|H| \leqslant c$, $|H(y, U, P) - H(y, U, \widetilde{P})| \leqslant K_2 |P - \widetilde{P}|$ в области $|y| \leqslant \beta$, $|U| \leqslant r$, $|P| \leqslant r$, где $r > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $m = \max(\alpha, \beta)$, $N \leqslant \min(r/m,\ r/m^2)$, $c \leqslant \min(r - mN,\ (r - Nm^2)/(1 + 2m))$, $K_1 K_2 < 1 - mM$. При сделанных выше предположениях существует функция $U = (u_1, \ldots, u_n)$, удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений

$$U_{xy} = F(x, y, U, U_x, U_y)$$

и условиям:

$$u_i(\overset{\circ}{x}_i,\ \overset{\circ}{y}_i) = \overset{\circ}{u}_i,$$
$$\partial u_i / \partial x = g_i(x, U(x, y), U_y(x, y)) \text{ для } y = \gamma_i(x),\ |x| \leqslant \alpha,$$
$$\partial u_i / \partial y = h_i(y, U(x, y), U_x(x, y)) \text{ для } x = \lambda_i(y),\ |y| \leqslant \beta,$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

где $(\overset{\circ}{x}_i,\ \overset{\circ}{y}_i)$ — точки прямоугольника $|x| \leqslant \alpha$, $|y| \leqslant \beta$ $y = \gamma_i(x)$, $x = \lambda_i(y)$ непрерывные кривые, определенные в этом прямоугольнике.

Доказательство основано на теореме Шаудера о неподвижной точке.

Если функции F, G, H еще дополнительно удовлетворяют условию Липшица по U и константа Липшица достаточно мала, то существует только одно такое решение и его можно получить методом последовательных приближений.

В статье даны некоторые варианты этой проблемы.

A. Pliś

6761. Об общем решении волнового уравнения Даламбера. Кастольди (Sulla più generale soluzione ondosa dell'equazione di D'Alembert. Castoldi Luigi. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1954 (1955), 24, 145—151 (итал.)

Автор получает необходимые и достаточные условия, наложенные на функцию амплитуды $A(P)$ и на функцию $\varphi(P)$ (которая определяет фронты волны или поверхности постоянной фазы) такие, что $\Psi_f(P, t) \Psi \equiv A(P) \times f[\varphi(P)] - ct]$ будет удовлетворять волновому уравнению

$$\Delta\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = 0$$

для произвольной (неограниченной) $f \in C^2$. Здесь t — время, а P — точка любого n-мерного пространства с положительно определенной метрикой Римана.

Условие на поверхности постоянной фазы есть то, что ортогональные траектории к этим поверхностям будут геодезическими линиями. Определение A дается точно в терминах решения эллиптического дифференциального уравнения в частных производных второго порядка на n — 1-мерной поверхности постоянной фазы.

R. B. Davis

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 1, 42.

6762. Расположение характеристик систем из двух линейных уравнений в частных производных 2-го порядка с тремя независимыми переменными. Моисил (Configurația caracteristică a sistemelor de două ecuații cu derivate parțiale lineare, de ordinul II cu trei variabile independente. Moisil Gr. C.), Comun. Acad. RPR, 1957, 7, № 8, 689—692 (рум.; рез. русск., франц.)

Для систем гиперболического типа, приведенных к каноническому виду,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

для которых характеристические плоскости определяются формулами $\pm x\pm y\pm z=0$, характеристические прямые —формулами $x=0$, $y\pm z=0$, $y=0$, $x\pm z=0$, $z=0$, $x\pm y=0$, гиперхарактеристические плоскости — формулами $x=0$, $y=0$, $z=0$ и полухарактеристические плоскости — формулами

$$\lambda x+y\pm z=0,$$
$$\lambda y+x\pm z=0,$$
$$\lambda z+x\pm y=0,$$

доказывается следующая теорема:

Уравнение, индуцированное вышеуказанной системой на плоскости, не являющейся ни характеристической, ни гиперхарактеристической, ни полухарактеристической, является линейным уравнением с частными производными и постоянными коэффициентами 4-го порядка гиперболического типа, имеющим в качестве характеристик пересечения плоскости с характеристическими плоскостями.

На характеристической или полухарактеристической плоскости уравнение является уравнением 3-го порядка, на гиперхарактеристической плоскости — уравнением 2-го порядка и характеристиками его являются пересечения плоскости с другими характеристическими плоскостями.

Теорема применима и к эллиптическим системам.

Резюме автора

6763. **О линейных гиперболических системах уравнений в частных производных во всем пространстве.** Нагумо (On linear hyperbolic system of partial differential equations in the whole space. Nagumo Mitio), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 10, 703—706 (англ.)

Устанавливаются теоремы существования и единственности решения задачи Коши, а также задачи без начальных данных во всем пространстве для некоторых классов дифференциальных операторов.

Пусть C_0^∞ — совокупность финитных бесконечно дифференцируемых вектор-функций $u=\{u_1(x,t),\ldots,u_m(x,t)\}$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, Λ — самосопряженный линейный дифференциальный оператор в C_0^∞, причем

(1) $(\Lambda u,v)\equiv\int\sum_{i=1}^m \Lambda u_i v_i dx_1\ldots dx_n=(u,\Lambda v)$ для любых $u,v\in C_0^\infty$;

(2) $(\Lambda u,u)\geqslant(u,u)$ для любой $u\in C_0^\infty$.

Через H_Λ обозначено пополнение пространства C_0^∞ по метрике $\|u\|_\Lambda=\sqrt{(\Lambda u,u)}$.

Оператор Λ называется регулярным относительно замкнутого дифференциального оператора Φ с областью определения D_Φ, если для любой функции $w\in C_0^\infty$ существует функция $v\in H_\Lambda\cap D_\Phi$ такая, что $\Lambda v=w$. Если оператор Λ с постоянными коэффициентами удовлетворяет условиям (1) и (2), то он регулярен относительно любого оператора того же вида с ограниченными переменными коэффициентами. Эллиптический дифференциальный оператор, удовлетворяющий условиям (1) и (2), регулярен относительно любого дифференциального оператора того же порядка с ограниченными коэффициентами.

Теорема 1. Пусть оператор Λ удовлетворяет условиям (1) и (2) и регулярен относительно линейного дифференциального оператора Φ. Если $(\Phi u,\Lambda u)\geqslant(\Lambda u,u)$ для всех $u\in C_0^\infty$, тогда для любой функции $\varphi\in H_\Lambda$ найдется единственная функция $u\in H_\Lambda$ такая, что $\Phi u=\varphi$.

Пусть теперь коэффициенты оператора Λ зависят также от t и оператор действует в пространстве функций $u(x,t)=\{u_1(x,t),\ldots,u_m(x,t)\}\in C_0^\infty$. Допустим

(3) $\dfrac{d}{dt}\Lambda u=\Lambda\dfrac{d}{dt}u+\Lambda' u$ и $|(u,\Lambda' u)|\leqslant C'(u,\Lambda u)$

для всех $u(x,t)\in C_0^\infty$.

Через F_Λ обозначается множество функций $u(x,t)$ таких, что: 1) $\int_0^\tau(\Lambda u(x,t)\,u(x,t)\,dt<\infty$ для любого $\tau\geqslant0$; 2) при фиксированном $t>0$ функции $u(x,t)\in H$; 3) $u(x,t)$ зависят непрерывно от параметра t по норме пространства H_Λ ($\leqslant t<\infty$).

Теорема 2. Пусть Λ удовлетворяет условиям (1), (2) и (3) и регулярен относительно оператора $\Phi=\dfrac{\partial}{\partial t}-A$. Если $(Au,\Lambda u)\leqslant C(u,\Lambda u)$ для всех $u\in C_0^\infty$, то для любых $v\in F_\Lambda$ и $\varphi\in H_\Lambda$ существует единственная функция $u(x,t)\in F_\Lambda$, такая что $\Phi u\equiv\equiv\partial u/\partial t-Au=v$, $u(x,0)=\varphi$.

Полные доказательства отсутствуют. В. М. Борок

6764. **Решение задачи теплопроводности для сферы и цилиндра в интегральной форме.** Алексеева О П., Тр. Моск. технол. ин-та пищ. пром-сти, 1957, вып. 8, 5—16

Строится функция $u(x,t)$, удовлетворяющая в области $0\leqslant x\leqslant b$, $t\geqslant0$ уравнению

$$au_{tt}+bu_t=qu_{xx}+ru_x+su,$$

где a, b, q, r, s — функции от x, заданные и непрерывные при $0\leqslant x\leqslant l$, а также условиям: начальным

$$\{u(x,t)\}_{t=0}=0;\quad\{u_t(x,t)\}_{t=0}=0$$

и краевым

$$\{u(x,t)\}_{x=0}=f(t);\qquad(1)$$
$$\{\rho u_x(x,t)+\lambda u_t(x,t)-\mu u(x,t)\}_{x=l}=0,$$

где $f(t)$ — заданная функция, а ρ, λ — постоянные.

Применение преобразования Лапласа — Карсона приводит к нахождению некоторой функции $u^*(x,p)$, представляющей собой решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$(ap^2+bp)u^*=qu_{xx}^*+ru_x^*+su^*\quad(p\text{ — параметр}),$$

удовлетворяющее некоторым условиям, получаемым из (1). Искомое решение $u(x,t)$ выражается затем через $u^*(x,t)$.

В случае $a=0$, $b>0$ (к которому относится уравнение теплопроводности, рассматриваемое в работе) при $f(t)\equiv1$ и при дополнительном предположении относительно $u^*(x,p)$ решение $u(x,t)$ находится в комплексном виде

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{p=0}\frac{e^{pt}}{p}u^*(x,p)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\frac{1}{\tau}\left[e^{i\tau t}u^*(x,i\tau)-e^{-i\tau t}u^*(x,i\tau)\right]d\tau$$

и в вещественном виде

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{p=0}\frac{e^{pt}}{p}U^*(x,p)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{\sin\tau t}{\tau}P(x,\tau)+\frac{\cos\tau t}{\tau}Q(x,\tau)\right]d\tau,$$

где $P(x,\tau)=\operatorname{Re}u^*(x,i\tau)$, $Q(x,\tau)=\operatorname{Im}u^*(x,i\tau)$.

Эти выражения для $u(x,t)$ используются при получении замкнутых решений задач об охлаждении шара и бесконечного цилиндра, для которых функция $u^*(r,p)$ имеет соответственно вид:

$$u^*(r,p)=\frac{Rsh\sqrt{\frac{p}{a}}r}{rsh\sqrt{\frac{p}{a}}R}\quad\text{и}\quad u^*(r,p)=\frac{I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{I_0\left(R\sqrt{\frac{p}{a}}\right)},$$

где a — коэффициент уравнения теплопроводности, R — радиус поверхности, r — радиус внутренней точки шара или цилиндра (расстояние от центра или от оси соответственно).

Получены также разложения решений этих задач в ряд Фурье. Г. Л. Мизернюк

6765. Первая краевая задача и задача Коши для квазилинейного параболического уравнения со многими пространственными переменными. Вентцель Т. Д., Матем. сб., 1957, 41, № 4, 499—520

Рассматривается уравнение

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x,t,u)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^N b_i(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}+$$

$$+f(x,t,u)=\frac{\partial u}{\partial t}$$

в $N+1$-мерном цилиндре $Q\{x\in D,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$. Предполагается, что при $(x,t)\in Q\,|f(x,t,0)|\leqslant F$, $f'_u(x,t,u)\leqslant c$.

Доказано существование решения первой краевой задачи для уравнения (1), непрерывное в замкнутом цилиндре Q вместе с производными, входящими в уравнение, если границы области D и начальная и граничная функции достаточно гладкие, выполнены условия согласования, а также следующее условие:

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\right|<\frac{\lambda}{M_1N}\quad(i,j=1,\ldots,N)$$

при $(x,t)\in Q$, $|u|<M_1$, где

$$M_1=\max\left\{Me^{CT},\quad F\frac{e^{CT}-1}{C-2|c|}\right\}$$

($C>2|c|$, M — максимум начальной и граничных функций), а λ — наименьшее собственное значение матриц $\|a_{ij}\|$ при $(x,t)\in Q$, $|u|<M_1$.

При аналогичных условиях доказано также существование решения задачи Коши для уравнения (1). Доказательство проведено методом плоскостей.

А. М. Ильин

6766 К. Методы математической физики. Левин В. И. М., Учпедгиз, 1956, 242 стр., илл., 4 р. 80 к.

Книга представляет собой учебное пособие для студентов-физиков физико-математических факультетов педагогических институтов; материал ее в основном определен программой курса «Методы математической физики» для пединститутов (изд. 1955 г.).

Книга состоит из двух частей: 1. Математическая теория поля. 2. Дифференциальные уравнения математической физики. Имеется также приложение, посвященное элементам теории вероятностей.

Первая часть содержит главы: 1. Скалярное поле; 2. Векторные поля; 3. Интегральные теоремы; 4. Дифференциальные операции второго порядка и их приложения. В этой части даются определения основных понятий векторного анализа. Большое внимание уделено физической интерпретации вводимых понятий; приведено много примеров. Теоремы существования дивергенции и ротора в тексте формулируются, но не доказываются. (Поскольку в книге нет никаких ссылок на литературу, то неискушенному читателю будет неясно, доказаны ли вообще где-нибудь эти теоремы или нет.)

Вычисление дивергенции, ротора и лапласиана в цилиндрических и сферических координатах производится на основе распространения правил действия с дифференциальным оператором Гамильтона («набла»-вектором). Специальный параграф посвящен объяснению формальных правил ∇-исчисления.

Вторая часть тесно связана с первой (при выводе основных уравнений используется аппарат векторного анализа) и разбита на 5 глав: 5. Уравнение колебаний струны; 6. Уравнение колебаний мембраны; 7. Уравнение теплопроводности; 8. Краевые задачи для уравнения Лапласа; 9. Уравнение Шредингера и некоторые связанные с ним задачи.

В гл. 5 сначала приводится решение Даламбера для бесконечной струны, а затем излагается метод Фурье для свободных и вынужденных колебаний конечной струны.

На примере струны кратко сформулировано понятие корректности постановки задач математической физики. При рассмотрении колебаний круглой мембраны даны основные сведения о бесселевых функциях. Для уравнения теплопроводности рассматривается задача Коши для одномерного уравнения и распространение тепла в конечном стержне. В гл. 8 указывается постановка краевых задач для уравнения Лапласа и решается задача Дирихле для шара (методом Грина и методом разделения переменных) и полуплоскости. В гл. 9 приведены краткие сведения о решении уравнения Шредингера и о его собственных функциях (полиномы Чебышева—Эрмита и Чебышева—Лагерра).

В конце каждой главы имеется небольшое число упражнений. Книга написана на основе общего курса анализа достаточно ясным и доступным языком. Помимо студентов пединститутов, ею могут пользоваться студенты и аспиранты втузов при изучении дополнительных разделов математики. И. Г. Араманович

6767 К. Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики. Изд. 2-е. Уэбстер (Partial differential equations of mathematical physics. 2nd ed. Webster Arthur Gordon. New York, Dover Publs, Inc., 1955, vii, 440 pp., 1.98 doll.) (англ.)

6768 К. Различные дополнения к теории преобразования Лапласа и уравнений в частных производных. Жане (Compléments divers sur la transformation de Laplace et les équations aux dérivées partielles, 2e éd corr. Janet Maurice. Paris, Sec. math., 1957, 47 p.) (франц.)

Второе издание книги автора по применению преобразования Лапласа к некоторым задачам математической физики (РЖМат, 1956, 6603 К) П. И. Кузнецов

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

6769. К динамике твердого тела в римановых пространствах. Стоянович (On the dynamics of a rigid body in Riemannian spaces. Stojano-

witch Rastko), Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, № 7—8, 284—285 (англ.)

Отправляясь от определения твердого тела в римановом пространстве, данного Дондером, автор сначала отмечает тот факт, что компоненты скоростей точек тела при его движении удовлетворяют уравнениям Киллинга для соответствующей параметрической группы движения.

Благодаря этому, вводя соответствующим образом неголономные координаты (псевдокоординаты), автор приводит уравнения движения твердого тела к форме, внешне сходной с обычными динамическими уравнениями Эйлера движения твердого тела вокруг неподвижной точки.

Коэффициенты данных уравнений выражаются через структурные константы группы и главные компоненты тензора инерции тела. В. В. Добронравов

6770. **Критерий устойчивости в форме интегрального уравнения. Гумовский** (Un critère de stabilité sous forme d'une équation intégrale. Gumowski Igor), C. r. Acad. Sci., 1957, 244, № 15, 2004—2007 (франц.)

Рассматривается взаимосвязь между устойчивостью электрической цепи с сосредоточенными параметрами, процессы в которой описываются обыкновенным линейным дифференциальным уравнением и условиями осуществляемости (реализуемости) этой цепи в смысле Боде. С этой целью рассматривается интегральное уравнение Фредгольма, вытекающее из заданного линейного дифференциального уравнения, а условия реализуемости в смысле Боде рассматриваются как частный случай критерия реализуемости в смысле Вальмана, который, в свою очередь, интерпретируется как критерий устойчивости. М. А. Айзерман

6771. **Об устойчивости некоторых нелинейных вынужденных колебаний. Кобори, Минаи** (On the stability of certain nonlinear forced vibrations. Kobori Takuji, Minai Ryoitiro), Proc. 6th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1956. Tokyo, 1957, 499—502 (англ.)

6772. **О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью. Крейн С. Г., Моисеев Н. Н.**, Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 2, 169—174

В работе с помощью методов функционального анализа исследуется известная задача о малых колебаниях твердого тела, имеющего полости, не сплошь заполненные жидкостью. Этими методами доказывается ряд теорем, ранее полученных из других соображений: а) Рассматриваемое твердое тело обладает нормальными колебаниями; б) Положение равновесия, около которого совершаются эти колебания, будет устойчивым, если потенциальная энергия системы, состоящей из твердого тела и жидкости, минимальна для этого положения равновесия; в) Произвольное колебание системы около положения устойчивого равновесия может быть получено комбинированием нормальных колебаний; г) При соблюдении некоторых условий, накладываемых на внешние силы, уравнения вынужденных движений имеют единственное решение.

Л. Н. Сретенский

6773. **Периодические колебания системы Рокарда с двумя степенями свободы в случае квазирезонанса. Аймерих** (Oscillazioni periodiche di un sistema di Rocard a due gradi di liberta nel caso di quasi risonanza. Aymerich Guiseppe. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1954 (1955), 24, 177—186) (итал.)

Система, изученная автором ранее (см. РЖМат, 1957, 6388), рассматривается в случае, когда $\omega_1 - \omega_2 = \varepsilon\sigma(\omega_1+\omega_2)/2$. Установлено, что возможны две или шесть гармонических вибраций; кратко рассмотрены достаточные условия устойчивости. Как и в предыдущей статье, использованы стандартные методы нелинейной механики. J. L. Massera

Перев. из Math. Revs, 1956, 17, № 4, 369

6774. **О свойствах частотного уравнения некоторой колебательной системы. Рашкович** (Über die Eigenschaften der Frequenzgleichungen eines schwingenden Systems. Raškovič Danilo), Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, № 7-8, 278—279 (нем.)

Изучается частотное уравнение для составного маятника (в частности, однородного и стержневого).

Ю. С. Богданов

6775. **О малых колебаниях маятника около устойчивого положения равновесия под действием равномерного вращения. Манолов** (Върху съществуването на малки периодични движения около положение на релативно стабилно равновесие на цилиндрично свързани махала, подложени на равномерна ротация. Манолов Спас), Годишник Софийск. ун-т, Физ.-матем. фак. 1953—1954. Кн. 1, ч. 1, София, 1954, 1—16 (болг.; рез. франц.)

6776. **Новый вариант вывода уравнений плоской задачи колебаний и динамической устойчивости криволинейных стержней. Никулин Г. М.**, Тр. Алтайск. с.-х. ин-та, 1957, вып. 5, 247—257

6777. **Метод Пуанкаре — Лайтхилла — Куа — новое в прикладной математике. Таками Эйро**, Нихон будури гаккайси, Buturi, 1958, 13, № 1, 11—19 (японск.)

6778. **О канонических преобразованиях уравнений теории автоматического регулирования при наличии кратных корней. Троицкий В. А.**, Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 4, 574—577

Обобщается преобразование А. И. Лурье, позволяющее приводить к канонической форме уравнения регулируемых систем с несколькими регулирующими органами в случае, когда собственные значения матрицы, составленной из коэффициентов объекта регулирования, имеют кратные корни. А. М. Летов

6779. **Оптимальная траектория легкой ракеты при квадратичном сопротивлении, экспоненциально зависящем от высоты. Торальдо-ди-Франча** (Sulla traiettoria ottima di un missile leggero, soggetto a una resistenza quadratica, funzione esponenziale dell'altezza. Toraldo di Francia Giuliano), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 3, 401—410 (итал.; рез. англ.)

Движение точечной ракеты при указанных в заглавии предположениях описывается уравнением

$$\varepsilon M(t)\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(t) - \varepsilon M(t)\,\mathbf{g} - ae^{-by}v\mathbf{v},$$

где εM — масса ракеты, $\mathbf{F}(t)$ — реактивная сила, $\varepsilon M g$ — сила тяжести, а $ae^{-by}v\mathbf{v}$ — сила сопротивления. При исчезающей малой массе ракеты (при $\varepsilon \to 0$) ее движение описывается вырожденным уравнением

$$\mathbf{F}(t) - ae^{-by}v\mathbf{v} = 0.$$

В результате решения этого уравнения при условии, что движение ракеты происходит в плоскости xy (x — горизонтальная, а y — вертикальная координата), что $\mathbf{F}(t)$ имеет вид $F_x = F(t)\cos\psi(t)$, $F_y = F(t)\sin\psi(t)$ и что начальные условия нулевые, т. е. $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, горизонтальная координата $x_1 = x(t_1)$ выражается

формулой

$$x_1 = \frac{2}{b}\int_0^{} \frac{F_x(t)\,dt}{\sqrt{F(t)}\left[k - \int_0^{t} \frac{F_y(\xi)}{\sqrt{F(\xi)}}\,d\xi\right]}, \qquad k = 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ставится и решается вариационная задача — нахождение закона изменения $\psi(t)$ при заданной $F(t)$, при котором x_1 является максимальным. Решение имеет вид

$$\sin\psi(t) = \frac{\int_t^{t_1}\sqrt{F(t)}\,dt}{\sqrt{k^2 - \left(\int_0^{t_1}\sqrt{F(t)}\,dt\right)^2 + \left(\int_t^{t_1}\sqrt{F(t)}\,dt\right)^2}}$$

Соответствующая траектория называется оптимальной. Показано, что оптимальные траектории, соответствующие различным начальным точкам $x(0)$, $y(0)$, могут быть совмещены друг с другом путем параллельного переноса. А. Б. Васильева

6780. **Стационарное распределение температуры в многослойных телах. Водичка** (Steady temperature in multilayer bodies. Vodička Vaćlav), Appl. Sci. Res., 1955, A5, № 5, 321—326 (англ.)

Рассматривается простейшая задача о распределении температуры в многослойных телах, сводящаяся к дифференциальным уравнениям вида

$$\frac{d^2u_i}{d\xi^2} + \frac{\omega}{\xi}\frac{du_i}{d\xi} = 0 \qquad \xi_i < \xi < \xi_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

при дополнительных условиях:

$$-\varkappa\frac{du_1}{d\xi} + u_1 = A, \qquad \xi = \xi_1,$$

$$\frac{du_i}{d\xi} + h_{i+1}(u_i - u_{i+1}) = 0, \qquad \xi = \xi_{i+1}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$\frac{du_{i+1}}{d\xi} + h_i'(u_i - u_{i+1}) = 0, \qquad \xi = \xi_{i+1},$$

$$\nu\frac{du_n}{d\xi} + u_n = B, \qquad \xi = \xi_{n+1}$$

(ω, $\varkappa$, ν, A, B, h_{i+1}, h_i' — параметры).

Задача элементарно решается в виде $u_i = u_i(\xi) = P_i + Q_i f(\xi)$, $f(\xi) = 1$, для $\omega = 1$, $f(\xi) = \frac{1}{1-\omega}\xi^{1-\omega}$ для $\omega \neq 1$, P_i и Q_i выражаются через ξ_k и параметры задачи. Формула конкретизируется для плоского, цилиндрического и сферического случаев ($\omega = 0, 1, 2$). А. Б. Васильева

6781. **Устойчивость вертикального положения оси тяжелого гироскопа при гармонических колебаниях точки опоры. Банковская Н. А.,** Укр. матем. ж., 1954, 6, № 4, 418—422

См. РЖМех, 1956, 5716

6782. **Критерий для апериодической или чисто колебательной устойчивости и связь с реактанц-теоремой. Эдельман** (Ein Kriterium für die aperiodische bzw. rein oszillatorische Stabilität und der Zusammenhang mit Reaktanztheoremen. Edelmann H.), Regelungstechnic, 1954, № 11, 264—267 (нем.; рез. англ.)

См. РЖМех, 1956, 5718.

6783. **Одна задача о распространении тепла с граничными условиями, зависящими от времени. Чжоу Цзэ-сунь** (On a problem of heat conduction with time-dependent boundary conditions. Chow Tse-Sun), Z. angew. Math. und Phys., 1957, 8, № 6, 478—484 (англ.; рез. нем.)

Рассматривается следующая краевая задача для уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями, зависящими от времени:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}$$
$$(0 \leqslant \rho < r,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ |z| \leqslant s),$$
$$\frac{\partial u}{\partial\rho} + h_1 u = f_1(\varphi, z)\,\alpha_1(t), \qquad \rho = r,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} + h_2 u = f_2(\rho, \varphi)\,\alpha_2(t), \qquad z = s, \qquad \text{(I)}$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} - h_3 u = f_3(\rho, \varphi)\,\alpha_3(t), \qquad z = -s,$$
$$u(\rho, \varphi, z, t) = u_0(\rho, \varphi, z), \qquad t = 0.$$
$$h_1 > 0,\ h_2 > 0,\ h_3 > 0.$$

Ее решение ищется в виде:

$$u(\rho, \varphi, z, t) = \psi(\rho, \varphi, z, t) + \sum_{l=1}^{3} X_l(\rho, \varphi, z)\,T_l(t).$$

Полагая $T_l(t) = \alpha_l(t)$ и определяя $X_l(\rho, \varphi, z)$, как решения следующих краевых задач для уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 X_l}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial X_l}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 X_l}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 X_l}{\partial z^2} = 0,$$
$$\frac{\partial X_l}{\partial\rho} + h_1 X_l = \delta_{l1} f_1(\varphi, z), \qquad \rho = r, \qquad \text{(II)}$$
$$\frac{\partial X_l}{\partial z} + h_2 X_l = \delta_{l2} f_2(\rho, \varphi), \qquad z = s,$$
$$\frac{\partial X_l}{\partial z} - h_3 X_l = \delta_{l3} f_3(\rho, \varphi), \qquad z = -s,$$

где $\delta_{l,m}$ — символ Кронекера, автор получает для функции $\psi(\rho, \varphi, z)$ задачу с однородными граничными условиями

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right\} - \sum_{l=1}^{3} X_l T_l',$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + h_1\psi = 0, \qquad \rho = r,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial z} + h_2\psi = 0, \qquad z = s, \qquad \text{(III)}$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial z} - h_3\psi = 0, \qquad z = -s.$$

Решение задач (II) и (III) строится с помощью метода разделения переменных. Д. П. Костомаров

6784. **Плоская задача о теплопроводности с переменным коэффициентом теплообмена. Зелиг** (Ebene Wärmeleitprobleme mit variablem Übergangskoeffizient. Selig F.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, № 7-8, 281—284 (нем.)

Задача об отыскании температуры T в области $\mathfrak{B}$ на плоскости (x_1, x_2):

$$\left.\begin{aligned} T_t &= \Delta T \quad \text{в} \quad \mathfrak{B}, \\ T &= 0 \quad \text{при} \quad t \to 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} + hT = C$$ при приближении изнутри области $\mathfrak{B}$ к ее границе Γ, (2) заменяется задачей об отыскании

температуры θ на всей плоскости (x_1, x_2):

$$\left.\begin{aligned}\theta_t = \Delta\theta + \frac{1}{g}\int_\Gamma q(s,t)\,\delta(x_1 - x_1(S))\,\delta(x_2 - x_2(S))\,dS\\ \theta = 0 \quad \text{при} \quad t \to 0\end{aligned}\right\}\ldots \tag{3}$$

с обычными условиями на бесконечности для θ. Функции $x_1 = x_1(S)$ и $x_2 = x_2(S)$ определяют контур Γ, g — функциональный определитель, а $q(s, t)$ представляет распределение источников тепла вдоль границы Γ, определяемое из условия, чтобы θ удовлетворяла соотношению (2). Поскольку θ и T в области $\mathfrak{R}$ удовлетворяют одинаковым дифференциальным уравнениям, а на контуре Γ — одинаковым краевым условиям, то они совпадают в этой области и вместо задачи (1) можно решать задачу (3).

Задача (3) решается методом интегральных преобразований аналогично тому, как это делалось в работе (РЖМат, 1957, 4868). Полученное решение функционально зависит от

$$Q(\omega, n; t) = \int_\Gamma q(s, t)\,\varphi_1(\omega x_1(S))\,\varphi_2(n x_2(S))\,dS,$$

где произведение $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ является ядром интегральной трансформации. При подстановке решения задачи (3) в условие (2) получается функциональное уравнение для определения Q.

Как пример рассмотрено решение для области, представляющей собой круг $0 \leqslant r \leqslant 1$. В качестве координат x_1, x_2 взяты полярные координаты r, φ, а в качестве функций φ_1 и φ_2 для интегральной трансформации — функции $\varphi_1(\omega x_1) = rI_n(\omega r)$ и $\varphi_2(n x_2) = e^{in\varphi}$.

Если h зависит только от φ, т. е. $h = h(\varphi)$, то с помощью последовательного применения трансформации Фурье с ядром $e^{in\varphi}$ и трансформации Лапласа для определения функции Q_n может быть получена бесконечная система уравнений. Эта система является регулярной, и ее решение может быть найдено приближенным методом.

В случае, если $h = h(\tau)$, рекомендуется применить трансформацию

$$\rho = \frac{1}{\alpha}\,h(t(\tau))\,r, \qquad \tau = \frac{1}{\alpha}\int_0^t h^2(\sigma)\,d\sigma,$$

с помощью которой первоначальная задача сводится к задаче с постоянным коэффициентом теплообмена α, но с движущейся границей. Уравнение для q в этом случае является интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода, решение которого может быть найдено приближенным методом. В. И. Беляев

6785. Еще раз о распределении температуры в кольце, вращающемся в переменном температурном поле. К а ш и (Ancora sulla distribuzione della temperatura in un anello rotante in ambienti a temperatura diversa. C a s c i C o r r a d o), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere, Cl. sci. mat. e natur., 1955, **88**, № 2, 368—372 (итал.)

6786. Периодическое температурное поле в клине. П а р к у с (Periodisches Temperaturfeld im Keil. P a r k u s H.), Österr. Ingr-Arch., 1956, **10**, № 2-3, 241—243 (нем.)

6787. К теории образования облаков. К л у б о в и ч К. В., Уч. зап. Минского гос. пед. ин-та, 1957, вып. 7, 129—144

На основе уравнений переноса влаги и тепла в атмосфере рассматривается задача о конденсации водяного пара и образовании облаков под влиянием турбулентного обмена и вертикальных токов. При отсутствии горизонтального переноса влаги, постоянной скорости w вертикальных токов и постоянном коэффициенте турбулентного обмена распределение влажности по вертикали находится из решения уравнения

$$\frac{\partial q}{\partial t} + w\frac{\partial q}{\partial z} = a^2\frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - bq \tag{1}$$

с граничными и начальными условиями:

$$q|_{z=0} = f_1(t); \quad \left.\frac{\partial q}{\partial z}\right|_{z=H} = 0, \tag{2}$$

$$q|_{t=0} = \varphi_1(z),$$

где $b = \text{const}$, H — высота тропопаузы.

Подстановкой $q = ue^{\delta z - \nu t}$; $\delta = \frac{w}{2a^2}$; $\nu = \frac{w^2}{4a^2} + b$ уравнение (1) приводится к обычному одноразмерному уравнению диффузии, решение которого ищется методом Фурье.

Совершенно аналогично при отсутствии горизонтального переноса тепла задача сводится к решению уравнения

$$dT/dt + b' = a^2\,\partial^2 T/\partial z^2 \tag{3}$$

с граничными и начальными условиями

$$T|_{z=0} = f_1(t); \quad \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=H} = 0; \tag{4}$$

$$T|_{t=0} = \varphi_1(z).$$

Исследование решения проводится для 2 частных случаев, соответствующих следующим граничным и начальным условиям:

1) для влажности $q|_{t=0} = q_0 e^{-k\gamma z}$; $q|_{z=0} = q_0$; $\left.\frac{\partial q}{\partial z}\right|_{z=H} = 0$; для температуры $T|_{t=0} = T_0 - \gamma z$; $T|_{z=0} = T_0$; $\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=H} = 0$;

2) при тех же условиях для влажности и начальном распределении температуры, но гармоническом ходе температуры на поверхности земли

$$T|_{z=0} = T_0 + \theta\sin\omega t.$$

Общей оценки быстроты сходимости полученных рядов не проводится.

Приводимые автором численные расчеты и графики указывают на определяющую роль вертикальных токов в процессе конденсации водяного пара и образования облаков. А. А. Пивоваров

6788. К теории нелинейных конических течений. Б у л а х Б. М., Уч. зап. Саратовск. ун-та, 1956, **52**, 9—22

Рассматривается обтекание плоского стреловидного крыла при следующих дополнительных предположениях: 1) кромки крыла сверхзвуковые; 2) угол атаки мал, поэтому движение может рассматриваться как потенциальное и изоэнтропическое.

Движение в целом является коническим, т. е. компоненты скорости являются постоянными вдоль лучей

$$\xi = x/z = \text{const}, \quad \eta = y/z = \text{const}, \tag{1}$$

где за начало координат выбрана точка пересечения кромок.

Если перейти к переменным (1), то уравнение потенциала

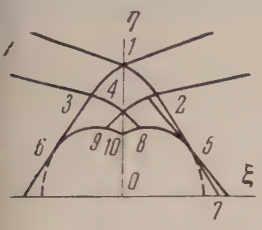
$$\varphi_{xx}\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)+\varphi_{yy}\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)+\varphi_{zz}\left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)-$$
$$-2\varphi_{xy}\frac{uv}{a^2}-2\varphi_{xz}\frac{uw}{a^2}-2\varphi_{yz}\frac{uw}{a^2}=0 \qquad (2)$$

переходит в уравнение

$$AF_{\xi\xi}+2BF_{\xi\eta}+CF_{\eta\eta}=0, \qquad (3)$$

где A, B, C — известные функции от ξ, η; u, v, w, $F=\varphi/z$.

Течение состоит из областей следующих трех типов; 1) области постоянного течения; 2) области косого течения Прандтля — Мейера, соответствующей обтеканию одной кромки крыла, где все величины зависят от одного параметра; 3) собственно конического течения, где все величины зависят от двух параметров.



К реф. 6788

Эти области в плоскости ξ, η разделяются характеристиками уравнения (3) и дискриминантной кривой

$$\Delta=AC-B^2=0, \qquad (4)$$

образующими довольно сложную конфигурацию.

Для верха крыла автор полагает единственно приемлемой конфигурацию, изображенную на рисунке.

Верхние характеристики, проходящие через 1, отделяют область постоянного движения от возмущенного движения. В полосах выше отрезков 1,2; 3,4 и в областях 6,3, 4, 9; 4,8, 2, 5 имеем волны Прандтля — Мейера; в областях 1,2, 3,4 и внутри конуса Маха имеем коническое течение.

Автор подробно исследует возникающую при этом краевую задачу. В частности, ему удалось установить, что линеаризованная теория дает неточное представление для скорости течения в окрестности конуса Маха.

Н. Н. Яненко

6789. Колебания профиля в дозвуковом потоке газа. **Горелов Д. Н.**, Вестн. Ленинград. ун-та, 1957, № 13, 93—101 (рез. англ.)

Излагается приближенное решение задачи о колебаниях тонкого крыла в плоском дозвуковом потоке газа в линеаризованной постановке. Точное решение этой задачи, полученное референтом (Прикл. математ. и механ., 1957, **11**, № 1, 129—146), определяется через функции Матье, зависящие от трех параметров ν, α и γ, связанных между собой соотношениями $\gamma=\nu M=\alpha M^2=\mu M^2/(1-M^2)$. ($M=u_0/a$, $\mu=kb/u_0$), где u_0 — поступательная скорость движения крыла, $2b$ — его ширина, k — частота колебаний и a — скорость звука в невозмущенном газе.

При этом задача сводится к определению функции $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей волновому уравнению $\Delta\varphi+\nu^2\varphi=0$.

Для приближенного решения принимается $\nu\ll 1$, т. е. $\mu\ll(1-M^2)/M$ и волновое уравнение переходит в уравнение Лапласа. Вследствие этого решения задачи значительно упрощаются и силы, и моменты, действующие на колеблющийся профиль, выражаются сравнительно простыми разложениями в ряды по функциям Бесселя. Сопоставление расчетов по этим приближенным формулам с результатами точных вычислений (РЖМех, 1955, 2237) приводит к удовлетворительному совпадению при малых значениях μ, а именно: для чисто изгибных колебаний при $\mu<0{,}2$—$0{,}3$ и для чисто крутильных колебаний при $\mu<0{,}1$.

Отметим, что при принятом допущении ($\nu\ll 1$) заведомо $\gamma\ll 1$. Поэтому приближенные формулы для сил и моментов принимают замкнутую форму, подобно случаю несжимаемой жидкости:

$$Y-Y_0=-\frac{2\rho_0 u_0}{\sqrt{1-M^2}}\int_{-b}^{b}\left[C(\alpha)\sqrt{\frac{b-x}{b+x}}+\right.$$
$$\left.+i\alpha\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}\right]v(x,t)\,dx;$$

$$M-M_0=-\frac{2\rho_0 u b}{\sqrt{1-M^2}}\int_{-b}^{b}\left[\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}+\right.$$
$$+\frac{i\alpha}{2}\,\frac{x}{b}\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}+$$
$$\left.+\frac{1}{2}(C(\alpha)-1)\sqrt{\frac{b-x}{b+x}}\right]v(x,t)\,dx,$$

где ρ_0 — плотность невозмущенного газа, $v(x, t)$ — нормальная скорость колеблений крыла, $C(\alpha)$ — функция Теодорсена, а $Y-Y_0$ и $M-M_0$ — подъемная сила и момент, обусловленные колебаниями крыла.

М. Д. Хаскинд

6790. Построение дозвукового течения сжимаемого газа при помощи течения несжимаемой жидкости. **Бевьерр** (Détermination d'un écoulement compressible subsonique à partir d'un écoulement incompressible. Bévierre P.), Rech. aéronaut., 1955, № 46, 3—5 (франц.)

См. РЖМех, 1956, 7278.

6791. Существование периодических волн вблизи критической скорости. **Литман** (On the existence of periodic waves near critical speed. Littman Walter), Comms Pure and Appl. Math., 1957, **10**, № 2, 241—269 (англ.)

Обширное исследование, посвященное доказательству существования кноидальных волн. Обозначим

$$d\chi/dz=e^{-i\omega}=e^{-i(\theta+i\tau)},$$

где $\chi=\varphi+i\psi$ — комплексный потенциал. Задача определения возможных установившихся движений тяжелой жидкости над гладким горизонтальным дном в постановке Леви — Чивитта — Струика сводится к отысканию функции $\omega(\chi)$, аналитической в полосе $0<\psi<1$, удовлетворяющей условиям: $\theta=0$ вдоль прямой $\psi=0$; $\partial\theta/\partial\psi=\nu e^{-3\tau}\sin\theta$ вдоль прямой $\psi=1$.

Автор полагает $\nu=1/F_r^2=1$, где F_r — число Фруда, и исследует существование периодических (по φ) решений этой краевой задачи, удовлетворяющих условиям симметрии относительно вертикальной прямой, проведенной через вершину волны. Задача сводится к нелинейному интегральному уравнению.

$\omega(\chi)=\theta(\varphi,\psi)+i\tau(\varphi,\psi)=\Omega_\lambda F(\theta(\varphi);\ \tau(\varphi))+i\tau(0)$,

где $F(\theta(\varphi);\ \tau(\varphi))=e^{-3\tau}\sin\theta-\theta$; Ω_λ — интегральный оператор, ядро которого — функция Грина соответствующей линеаризированной задачи. Здесь $2\pi/\lambda$ обозначает длину волны (период по φ).

Далее вводится новое независимое переменное $\hat{\varphi}=\lambda_\varphi$ и совершается предельный переход $\lambda\to 0$. Оказывается, что предельное значение $\tau_\infty(\hat{\varphi})$ удовлетворяет обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению

$$\tau_\infty'''=9\tau_\infty\tau_\infty'.$$

Его решение может быть выражено через эллиптические функции cn. Оно дает приближенное описание кноидальных волн.

Строится аналитическая функция ω_∞ такая, что $\operatorname{Im}\omega_\infty = \tau_\infty$. Далее составляется «вариационное» уравнение. Для этого вводится функция $\delta\omega = \omega - \omega_\infty$, которая удовлетворяет уравнению $\delta\omega = A(\delta\omega) + B_\lambda(\delta\omega)$. Здесь через $A(\delta\omega)$ обозначена производная Фреше оператора $\Omega_\lambda(\omega)$. B_λ — некоторый нелинейный оператор.

Сначала автор исследует линейное уравнение

$$\delta\omega = A(\delta\omega) + F,$$

где F — некоторая заданная функция, и строит обратный оператор

$$\delta\omega = A^{-1}F.$$

В результате автор приходит к нелинейному уравнению

$$\delta\omega = A^{-1}B_\lambda(\delta\omega) = D(\delta\omega).$$

Вводится пространство Банаха B пар функций $\omega = \{\theta, \tau\}$, где $\theta \in B^{(1)}$ (пространство нечетных непрерывных функций, периодических по φ периода $2\pi/\lambda$), $\tau \in B^{(2)}$ (пространство четных непрерывных функций, периодических по φ периода $2\pi/\lambda$) с метрикой

$$\|\omega\|_B = \|\theta\|_{B^{(1)}} + \|\tau\|_{B^{(2)}},$$

где нормы $\|\ \|_{B^i}$ принимаются в смысле метрики $c\left(0, \frac{\pi}{\lambda}\right)$.

Доказывается, что оператор D действует из B в B и преобразует сферу некоторого достаточно большого радиуса R в себя. Тогда доказательство теоремы существования периодических волн сводится к доказательству того, что при достаточно малых λ оператор D есть оператор сжатия:

$$\|D\delta\omega - D\delta\omega'\|_B \leqslant \varkappa_\lambda \|\delta\omega - \delta\omega'\|_B,$$

где $\varkappa < 1$.

Далее этот результат обобщается на числа Фруда, близкие к 1.

Таким образом доказана следующая теорема гидродинамики поверхностных гравитационных волн: Можно указать достаточно малые положительные числа ε и $\lambda(\varepsilon)$ такие, что для любых чисел Фруда, удовлетворяющих неравенству $1 - \varepsilon \leqslant F_r \leqslant 1 + \varepsilon$ на поверхности жидкости могут существовать прогрессивные волны, длина которых $L = \frac{2\pi}{\lambda}$, если только $\lambda < \lambda(\varepsilon)$.

Основываясь на своих результатах, автор предлагает новую приближенную теорию кноидальных волн, имеющих в качестве своего предельного случая (при $\lambda \to 0$) — уединенную волну.

В приложении автор приводит доказательство ряда вспомогательных утверждений, использованных в работе.

Примечание референта. Следует заметить, что из результатов автора не следует теорема существования уединенной волны, так как при $\lambda \to 0$ амплитуда соответствующих периодических волн $\to 0$. Таким образом, теорема Литмана не является обобщением теоремы М. А. Лаврентьева — Фридрихса.

Н. Н. Моисеев

6792. О течении вязкой жидкости в трубе эллиптического сечения под влиянием периодического градиента давления. Кхамруи (On the flow of a viscous liquid through a tube of elliptic section under the influence of a periodic pressure gradient. Khamrui S. R.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, 49, № 2, 57—60 (англ.)

Рассматривается нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости параллельно оси трубы, когда градиент давления есть периодическая функция времени. Представляя скорость течения как периодическую функцию времени с коэффициентом, зависящим от положения точки в поперечном сечении трубы, и применяя эллиптические координаты, автор, интегрирует уравнение движения при помощи разложения в ряд по функциям Матье.

В случаях малой и большой частоты колебания градиента давления автор получает приближенные значения скорости в конечном виде. Д. Е. Долидзе

6793. Распространение непериодических волн в сжимаемой вязкой среде. Ханин (Propagation of an aperiodic wave in a compressible viscous medium. Hanin Meir). J. Math. and Phys., 1957, 36, № 3, 234—249 (англ.)

6794. Метод Мусхелишвили для исследования плоских движений несжимаемых вязких жидкостей. Стэнеску (Metoda Mușhelișvili în mișcările plane ale fluidelor vîscoase incompresibile. Stănescu Cristian), Bul. ştiinţ. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1957, 9, № 2, 395—414 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается медленное стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости на плоскости xy. Функция тока удовлетворяет бигармоническому уравнению, решение которого выражается при помощи двух аналитических функций комплексного переменного $z = x + iy$. Область движения может быть ограничена как неподвижными стенками, так и твердыми поверхностями, вращающимися вокруг оси.

Используя условие прилипания к твердой границе, автор решает граничную задачу для вышеупомянутых аналитических функций в многосвязной области сведение к интегро-дифференциальному уравнению, которое для разных случаев границ решается методом Н. И. Мусхелишвили (Сингулярные интегральные уравнения, 1946 Гостехиздат). Даются формулы для определения гидродинамической реакции и момента.

В конце работы изложенный способ применяется для расчета модератора с двумя закрылками Библ. 16 назв. Д. Е. Долидзе

6795. Движение простого клина по поверхности воды. Скуайр (The motion of a simple wedge along the water surface. Squire H. B.), Proc. Roy. Soc., 1957, **A243**, № 1232, 48—64 (англ.)

6796. О собственных значениях в краевой задаче о трехмерной неустойчивости ламинарного пограничного слоя у вогнутых стен. Хеммерлин (Über das Eigenwertproblem der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden. Hämmerlin Günther), J. Rational. Mech. und Analysis, 1955, 4, № 2, 279—321 (нем.)

Исследуется стабилизирующее действие вогнутой цилиндрической стены большого (сравнительно с толщиной пограничного слоя) радиуса по отношению к трехмерным возмущениям, причем обнаруживается (впервые открытое Г. Гёртлером в 1940 г.) явление специфической неустойчивости ламинарного слоя, выражающееся в возникновении вихревых нитей, имеющих направление основного потока (перпендикулярно образующим цилиндрической стены). Проблема сводится

к следующей краевой задаче:

$$u'' - \tau^2 u = \frac{dU}{d\eta} v,$$

$$v'''' - (\tau^2 + \sigma^2) v'' + \tau^2\sigma^2 v = -\mu\sigma^2 U u,$$

$$u(0) = v(0) = v'(0) = 0,\ u(\infty) = v(\infty) = v'(\infty) = 0,$$

причем ищутся собственные значения параметра μ в зависимости от σ и τ (здесь u и v — составляющие скорости по направлениям, перпендикулярным образующим цилиндра, соответственно, вдоль цилиндра и внутрь его, U — безразмерная скорость невозмущенного потока и производные берутся по η-расстоянию от стены, отнесенному к толщине пограничного слоя).

Задача сводится к системе интегральных уравнений, и искомые собственные значения находятся итерационным процессом. Полученные таким образом приближения сведены в таблицу и проиллюстрированы графиками для следующих профилей скоростей $U(\eta)$: а) линейного, б) параболического, в) профиля Блазиуса (парабола четвертой степени), г) простейшего профиля с точкой перегиба (парабола третьей степени), д) профиля с гладким переходом в ламинарный слой (непрерывность первой производной) и е) аналитического профиля.

В конце работы наименьшее собственное значение подсчитывается также исходя из теории Фредгольма.

В. И. Левин

6797. Эффективная вязкость суспензии сферических частиц. К и н ч (The effective viscosity of suspensions of spherical particles. K y n c h G. J.), Proc. Roy. Soc., 1956, **A237**, № 1208, 90—116 (англ.)

6798. Математическая теория крутильных и изгибных колебаний анизотропного стержня. А п ф е л ь б е к (Mathematische Theorie der Torsions- und Biegungsschwingungen anisotroper Stäbe. A p f e l b e c k A l o i s), Чехосл. матем. ж., 1957, **7**, № 3, 374—412 (нем., рез. русск.)

Исследуется система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

описывающая совместные изгибно-крутильные колебания призматического стержня. Здесь $v(x, t)$ и $u(x, t)$ — функции, пропорциональные поперечному смещению и углу закручивания соответственно; α, β, γ, δ — коэффициенты анизотропии стержня.

Доказывается, что рассматриваемая система имеет единственное решение при начальных условиях:

$$v(x, 0) = \varphi(x),\ u(x, 0) = \mu(x),\ v_t(x, 0) = \psi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \nu(x)$$

и граничных условиях на свободных концах $x = 0$ и $x = l$ стержня:

$$\alpha \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Методом разделения переменных получены собственные значения и собственные функции. Доказана ортогональность собственных функций, вещественность собственных значений и дискретность их спектра. Построена функция Грина краевой задачи. Я. С. Уфлянд

6799. Поперечный удар по бесконечному растянутому стержню. С о л о д о в н и к о в В. В., Тр. Харьковск. инж.-строит. ин-та, 1955, вып. 4, 263—288

См. РЖМех, 1956, 6196.

6800. О разделении сферических координат в теории упругости. Ц а й И. П., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 21, 123—133

Рассматриваются частные решения уравнений статики и динамики упругого тела в сферических координатах. Составляющие перемещений задаются в форме:

$$u_r = A'(r) B'(\theta, \varphi),\ u_\theta = A''(r) B''(\theta, \varphi),$$

$$u_\varphi = A'''(r) B'''(\theta, \varphi)$$

при решении задачи статики и в форме:

$$u_r = e^{-i\omega t} A'(r) B'(\theta, \varphi),\ u_\theta = e^{-i\omega t} A''(r) B''(\theta, \varphi),$$

$$u_\varphi = e^{-i\omega t} A'''(r) B'''(\theta, \varphi)$$

при решении задачи динамики. В обеих задачах для функций B', B'', B''' получаются одинаковые значения:

$$B' = P_n^{(m)} \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix},$$

$$B'' = -P_n^{(m)} \sin\theta \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix},$$

$$B''' = -mP_n^{(m)} \operatorname{cosec}\theta \begin{matrix}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{matrix}.$$

Функции A', A'', A''' в окончательных выражениях представлены степенными функциями r (задача статики) или функциями Бесселя (задача динамики).

К. В. Соляник-Красса

6801. Решение уравнения статического упругого поля в классе обобщенных функций. Х о д ж а е в Л. Ш., Ш и р и н б е к о в И. М., Докл. АН Таджикской ССР, 1957, вып. 21, 79—82

В уравнениях теории упругости:

$$L\mathbf{u} = (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} = -\rho;$$

$$\begin{cases}\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\} \\ \rho = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}\end{cases}$$

каждая производная заменяется на свертку с соответствующей производной от δ-функций, уравнения преобразуются по Фурье, причем свертки заменяются на произведение образов Фурье. Из полученной алгебраической системы находятся образы Фурье от компонент вектора $\mathbf{u}$, затем применяется обратное преобразование Фурье и находится вектор смещения $\mathbf{u}$. Утверждается, 1) что все эти операции законны, если u_i, ρ_i и их образы Фурье считать обобщенными функциями в функциональном пространстве S; 2) что единственность полученного решения очевидна.

По поводу содержания статьи сделаем следующие замечания:

1. Утверждение 2) неверно, так как $\mathbf{u} = \text{const}$, например, является решением уравнения $L\mathbf{u} = 0$ в классе обобщенных функций в пространстве S.

2. Операция деления на r^k (k=2, 4, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, применяемая в статье, нуждается в пояснениях, так как деление в этом случае неоднозначно.

3. Определение сходимости последовательности функций $\{\varphi_n\}$ в пространстве S, данное в статье, неверно так как нетрудно привести примеры последовательностей $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in S$, $\varphi_n \to \varphi$ в том смысле, как это определено в статье, но $\varphi \in S$.

В статье имеются опечатки.

В. М. Бабич

6802. О разложении в степенной ряд по параметру решения уравнения упругого равновесия. С т о п п е л л и (Sulla sviluppabilità in serie di potenze di un parametro delle soluzi oni delle equazioni dell'

elastostatica isoterma. Stoppelli Francesco), Ricerche mat., 1955, 4, 58—73 (итал.)

6803. Плоский изгиб стержней переменного сечения. Грубин А. Н., Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1957, вып. 7 [а], 43—54

Предлагается приближенный способ определения напряжений при плоском изгибе поперечной распределенной нагрузкой консолей, ограниченных двумя симметричными гладкими кривыми $y_1 = \pm f(x)$.

Математическая задача заключается в решении системы уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

с дополнительными интегральными условиями:

$$\int_{-y_1}^{y_1} \sigma_x y dy = M_x; \quad \int_{-y_1}^{y_1} \sigma_x dy = 0; \quad \int_{-y_1}^{y_1} \tau_{xy} dy = Q_x,$$

и граничными условиями:

а) при $y = \pm y_1$ $\tau_{xy} = \pm \sigma_x \cdot y_1'$;

б) при $y = y_1$ $\sigma_y = \tau_{xy} \cdot y_1' - q_x$;

в) при $y = -y_1$ $\sigma_y = -\tau_{xy} \cdot y_1'$.

M_x, Q_x и q_x — заданные величины, определяющие внешнюю нагрузку. Принимается, что нормальные напряжения σ_x в поперечных сечениях можно представить в виде:

$$\sigma_x = \frac{M_x y^k}{I_k},$$

где

$$I_k = \frac{2}{k+2} y_1^{k+2}.$$

Причем вначале неопределенная постоянная k — определяется вариационными методами.

Напряжения σ_y и τ_{xy} находятся из уравнений равновесия. Точно удовлетворяются граничные условия на верхней и нижней поверхностях консоли и приближенно (в интегральном смысле) на торцах.

Применение способа показано на двух примерах изгиба плоского усеченного конуса.

К. В. Соляник-Красса

6804. Применение формулы Грина для численного исследования упругих пластин. Смодич (Application de la formule de Green à l'examen numérique des plaques élastiques. Szmodits K.), Acta techn. Acad. sci. hung., 1957, 18, № 3-4, 383—391 (франц.; рез. русск., нем., англ.)

Задача сводится к численному решению уравнений Лапласа и бигармонического при помощи разностного аналога формулы Грина. Входящие в формулу Грина неизвестные граничные значения определяются из соответствующей системы разностных уравнений.

Способ иллюстрируется простым числовым примером.

К. В. Соляник-Красса

6805. Закрученная сфера. Снелл (The twisted sphere. Snell C.), Mathematika, 1957, 4, № 8, 162—165 (англ.)

Дается решение задачи об упругом кручении однородной изотропной сферы парами, приложенными к концам ее диаметра. Решение получено применением биполярных координат. Ни результат, ни метод его получения не являются новыми. Задача кручения тела, образованного вращением кругового сегмента вокруг его хорды, впервые была решена Тимпе (Timpe A., Math. Ann., 1912, 71, 480). Значительное упрощение в решении этой задачи, достигающееся применением биполярных координат, произведено К. В. Соляником-Крассой. См. его монографию «Кручение валов переменного сечения», ГТТИ, 1949, гл. V, особенно § 39, где приводится решение, вновь полученное автором реферируемой статьи, которому, судя по его литературным ссылкам, остались неизвестными вышеназванные работы.

Н. А. Ростовцев

6806. О некоторых вопросах теории тонких упругих оболочек. Рейснер (On some aspects of the theory of thin elastic shells. Reissner Eric), J. Boston Soc. Civil Engrs, 1955, 42, № 2, 100—133 (англ.)

См. РЖМех, 1956, 7696.

6807. К вопросу о типе уравнений теории пластичности. Либерман Ю. М., Докл. АН СССР, 1957, 116, № 1, 32—34

Для плоского деформированного или напряженного состояния с условием пластичности

$$S^2 = f(p), \quad p = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y),$$
$$S^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2$$

устанавливается тип уравнений равновесия в зависимости от вида функции $f(p)$. Автор показывает, что в гиперболическом и параболическом случаях выполняются условия: $[f'(p)]^2 \geq 4f$, и дает геометрическую интерпретацию этих условий (в гиперболическом случае существует огибающая кругов Мора, в параболическом случае огибающая вырождается в точку, а в эллиптическом случае огибающей нет). В частном случае условия пластичности по Мизесу возможны как гиперболический, так и эллиптический тип. Для условия пластичности по Сен-Венану в случае одного знака главных нормальных напряжений уравнения равновесия будут параболического типа.

И. С. Аржаных

6808. Метод приближенного разделения переменных и его применение к граничным задачам электродинамики и акустики. Вайнштейн Л. А., Ж. техн. физики, 1957, 27, № 9, 2109—2128

При решении двумерных краевых задач для волнового уравнения

$$\Delta_{xy} w + k^2 w = 0$$

в области со сложными границами часто прибегают к конформному преобразованию $x + iy = Af(u + iv)$ (где положительный вещественный коэффициент пропорциональности A, имеющий размерность длины, вводится для того, чтобы функция f была безразмерной), отображающему заданную область на прямоугольник τ ($u_1 \leqslant u \leqslant u_2$; $v_1 \leqslant v \leqslant v_2$) на плоскости (u, v) (некоторые из чисел u_1, u_2, v_1, v_2 могут быть взяты равными $\pm\infty$). При этом в новых переменных волновое уравнение, как известно, принимает вид:

$$L[w] = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \varkappa^2 g(u, v) W = 0 \qquad (1)$$

и допускает решение методом разделения переменных лишь в случае $g(u, v) = g_1(u) + g_2(v)$.

В предлагаемом методе и в случае общей функции $g(u, v)$ ищется функция $W(u, v)$, представимая в виде $W = U(u) \cdot V(v)$ и дающая «наилучшее приближение» уравнения (1). «Наилучшее приближение» определяется

из условия обращения в нуль вариации функционала

$$S = \frac{1}{2}\iint_{\tau} \{L[w]\,w^* + L[w^*]\,w\}\,du\,dv \qquad (2)$$

при дополнительных условиях $\delta W = 0$ и $\frac{\partial \delta W}{\partial n} = 0$ на границе σ прямоугольника τ. При этом для функций U и V получается система уравнений:

$$\frac{d^2U}{du^2} + [-p^2 + \varkappa^2 P(u)]\,U = 0, \qquad (3)$$

где $p^2 = -\dfrac{\int_{v_1}^{v_2} \frac{d^2V}{dv^2}\,V^*\,dv}{\int_{v_1}^{v_2} |V|^2\,dv}$; $\quad P(u) = \dfrac{\int_{v_1}^{v_2} g(u, v)\,|V|^2\,dv}{\int_{v_1}^{v_2} |V|^2\,dv}$

и $$\frac{d^2V}{dv^2} + [-q^2 + \varkappa^2 Q(v)]\,V = 0, \qquad (4)$$

где $q^2 = -\dfrac{\int_{u_1}^{u_2} \frac{d^2U}{du^2}\,U^*\,du}{\int_{u_1}^{u_2} |U|^2\,du}$; $\quad Q(v) = \dfrac{\int_{u_1}^{u_2} g(u, v)\,|U|^2\,du}{\int_{u_1}^{u_2} |U|^2\,du}$

Система (3), (4) может быть также получена применением формулы Грина к выражениям:

$$\int_{v_1}^{v_2} L[w]\,V^*\,dv = 0; \quad \int_{u_1}^{u_2} L[w]\,U^*\,du = 0.$$

Решение системы (3), (4) проведено для ряда физических задач, в которых функция $g(u, v)$ имеет вид $g(u, v) = 1 + 2e^u \cos v + e^{2u}$ и $A = d/2\pi$, что соответствует конформному отображению плоскости (x, y) с разрезами $y = \pm\frac{d}{2}$; $x < 0$ на полосу $-\pi < v < \pi$; $-\infty < u < \infty$ плоскости (u, v). Таковыми задачами являются: плавное сопряжение плоского волновода с рупором и отражение плоской волны от волнистой поверхности, имеющей форму циклоиды или трохоиды. Для указанных задач проведено приближенное решение системы (3), (4) и получен ряд формул, определяющих физические характеристики явления. В последнем случае, в частности, проведено исследование условий распространения поверхностных волн. А. Г. Свешников

6809. **О плоских магнито-гидродинамических волнах с произвольным направлением распространения.** **К р у п и** (Sulle onde piane magneto-idrodinamiche propagantisi in una generica direzione. C r u p i G i o v a n n i), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 4, 604—609 (итал., рез. англ.)

Исходя из общей системы уравнений магнитной гидродинамики

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} = \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \dfrac{1}{c}\mathbf{I}; \\ \operatorname{rot} E = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B}{\partial t}; \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\operatorname{grad})\,\mathbf{v} = \mathbf{F} + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{1}{c}[\mathbf{I}\times\mathbf{B}] - \operatorname{grad} p\right); \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]; \quad \mathbf{I} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right);$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu c}[\mathbf{v}\times\mathbf{D}];$$

автор показывает, что в случае решения, имеющего вид плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении $\mathbf{u}$, составляющем угол θ с направлением внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$, должно удовлетворяться уравнение

$$m\left(\frac{\partial^3 \mathbf{B}}{\partial x^2\,\partial t} + \frac{\partial^3 \mathbf{B}}{\partial y^2\,\partial t} + \frac{\partial^3 \mathbf{B}}{\partial z^2\,\partial t}\right) + V^2\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0,$$

где $m = \dfrac{c^2}{\mu\sigma}$; $V^2 = \dfrac{B_0^2}{\rho\mu}$. При этом для волнового числа k плоской волны получаются выражения

$$k = \pm\left(\frac{\omega}{W} + i\alpha\right),$$

где

$$W = \frac{(V^4\cos^4\theta + m^2\omega^2)^{1/2}}{\left(\frac{1}{2}V^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sqrt{V^4\cos^4\theta + m^2\omega^2}\right)^{1/2}};$$

$$\alpha = \frac{m\omega^2\,(V^4\cos^4\theta + m^2\omega^2)^{-1/2}}{2\left(\frac{1}{2}V^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sqrt{V^4\cos^4\theta + m^2\omega^2}\right)^{1/2}}.$$

А. Г. Свешников

6810. **Замечание о граничных условиях в электродинамике движущихся тел.** **Т о т а р о** (Una osservasione sulle condizioni al contorno dell'elettrodinamica dei corpi in moto. T o t a r o C á r m e l o), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 4, 609—611 (итал., рез. англ.)

Показано, что соотношения $B_n^{(2)} - B_n^{(1)} = 0$, $D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = \omega$ (ω — плотность поверхностного заряда) для нормальных составляющих векторов **B** и **D** на границе раздела двух сред, движущихся с одной скоростью **v**, являются следствием уравнений Минковского и условий непрерывности на границе раздела касательных составляющих напряженностей электрического **E*** и магнитного **H*** поля в движущейся системе координат, связанных с векторами **B** и **D** формулами

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}];$$

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} - \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{D}].$$

А. Г. Свешников

6811. **Об одной граничной задаче электродинамики движущихся тел.** **Т о т а р о** (Su un problèma al contorno della elettrodinamica dei corpi in moto. T o t a r o C a r m e l o), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 4, 658—663 (итал.; рез. англ.)

Рассматривается задача о падении плоской электромагнитной волны на движущуюся границу раздела двух полупространств. Направление движения границы раздела к ней перпендикулярно. Падающая волна поляризована так, что вектор напряженности электрического поля параллелен границе раздела. Характеристики отраженной и преломленной волны определяются из граничных условий для касательных составляющих полей на границе раздела, взятых в виде:

$$\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right)_S^{(2)} - \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right)_S^{(1)} = 0;$$

$$\left(\mathbf{H} - \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{D}]\right)_S^{(2)} - \left(\mathbf{H} - \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{D}]\right)_S^{(1)} = 0.$$

Полученные формулы являются обобщением классических формул Френеля для данного случая движения границы раздела. А. Г. Свешников

6812. Формулировка аналитического принципа Гюйгенса. Ессель (Une formulation analytique du principe de Huygens. Jessel Maurice), C. r. Acad. Sci., 1954, 239, 1599—1601 (франц.)

6813. О собственном поле движущегося заряда. Аржаных И. С., УзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1957, № 11, 5—9 (рез. узб.)

Пусть заряд e массы m движется в электромагнитном поле, состоящем из поля внешних источников и собственного поля заряда. Внешнее поле характеризуется плотностью зарядов ρ и током $\mathbf{j}$, собственное поле заряда — плотностью ρ_e и током $\mathbf{j}_e$, причем

$$\mathbf{j}_e = \rho_e \mathbf{v}.$$

Автор рассматривает задачу совместного решения уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{c}(\mathbf{j}+\mathbf{j}_e), \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{E} = (\rho+\rho_e). \\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

и уравнений движения заряда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right),$$

где $T = -mc^2\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$. Показано, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ выражаются формулами

$$\mathbf{E} = \frac{mc^2}{e}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial \pi}{\partial t} + \operatorname{grad}(1+\pi^2)^{1/2}\right],$$

$$\mathbf{H} = -\frac{mc^2}{c}\operatorname{rot}\pi,$$

где π — вектор, удовлетворяющий следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} - \Delta\pi + \operatorname{grad}\left[\operatorname{div}\pi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(1+\pi^2)^{1/2}\right] + \frac{\pi}{(1+\pi^2)^{1/2}}\operatorname{div}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial \pi}{\partial t} + \operatorname{grad}(1+\pi^2)^{1/2}\right] = -\frac{e}{mc^3}\mathbf{j} + \frac{\rho e \pi}{c(1+\pi^2)^{1/2}}.$$

Уравнение (1) сводится к интегро-дифференциальному уравнению с производными первого порядка в запаздывающих аргументах по времени. Д. П. Костомаров

6814. Стационарные точки вариационного метода Швингера решения задач рассеяния — седловые точки. Долф (A saddle point characterization of the Schwinger stationary points in exterior scattering problems. Dolph C. L.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1957, 5, № 3, 89—104 (англ.)

Разбираются решения задач рассеяния в случае стационарного уравнения Шредингера или скалярного волнового уравнения с помощью вариационного метода Швингера (наиболее близкое к целям данной работы изложение которого дано в книге Морса и Фешбака (РЖМат, 1956, 5907)), в котором изучение характеристик рассеяния производится на основании определения стационарной точки некоторого функционала. Например, при решении скалярной задачи дифракции на замкнутой поверхности S для определения амплитуды R дифрагированной волны исследуется функционал

$$\frac{1}{R} = -\frac{\int_S\int_S \dfrac{\partial \psi}{\partial n}(s)\dfrac{e^{ik|r-r_0|}}{4\pi|r-r_0|}\cdot\dfrac{\partial \psi}{\partial n}(s_0)\,ds\,ds_0}{\left(\int_S e^{ik_i r}\dfrac{\partial \psi}{\partial n}\,ds_0\right)^2}$$

В работе показано, что стационарная точка соответствующего функционала является седловой точкой как для его действительной, так и для мнимой части. Тем самым для решения задачи необходимо знать точное стационарное значение либо действительной, либо мнимой части функционала. Это не позволяет оценить ошибку при использовании функций сравнения, что привело к ряду ошибочных результатов (РЖМат, 1957, 4051). А. Г. Свешников

6815. О несимметричной теории чистого гравитационного поля. Сайама (On a non-symmetric theory of the pure gravitational field. Sciama D. W.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, 54, № 1, 72—80 (англ.)

6816. О физико-математической точке зрения на проблему атомных устройств. Пиньедоли (Sull'aspetto fisico-matematico del problema delle pile atomiche. Pignedoli Antonio), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 25, 250—272 (итал.)

См. также: 6586, 6657, 6658, 6660, 6661, 6665, 6832—6834, 6864, 6865, 6879, 6925 Д, 6931, 7177—7185, 7188

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *В. В. Немыцкий*

6817. О существовании решений бесконечной системы нелинейных интегральных уравнений. Никитин Б. Д., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, 57, 81—98

Последовательность функций $\{u_i(x)\}$, каждая из которых суммируема со своей степенью на множестве G конечной лебеговой меры r-мерного евклидова пространства, рассматривается как вектор u пространства Фреше S, в котором расстояние между векторами u и v определяется формулой

$$\rho(u,v) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i \|u_i - v_i\|(1+\|u_i-v_i\|)^{-1},$$

где

$$\lambda_i > 0,\ \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i < \infty,\ \|u_i\| = \left(\int_G |u_i(x)|^{p_i}dx\right)^{1/p_i},\ p_i \geqslant 1.$$

При помощи принципа неподвижной точки в S доказывается теорема: Система уравнений

$$u_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_G K_{ik}(x,y,u_1(y),u_2(y),\ldots)\,dy,\ i=1,2,3,\ldots$$

имеет решение, принадлежащее пространству S, если выполнены условия: $K_{ik}(x,y,u_1,u_2,u_3,\ldots)$ непрерывны

по $(u_1, u_2, u_3, \ldots)$, $|K_{ik}(x, y, u_1, u_2, \ldots)| \leqslant B_{ik}(x, y)$,

$|K_{ik}(x+h, y, u_1(y), u_2(y), \ldots) - K_{ik}(x, y, u_1(y), u_2(y), \ldots)| \leqslant$
$\leqslant |B_{ik}(x+h, y) - B_{ik}(x, y)| \, |f_{ix}(y, u_1(y), u_2(y), \ldots)|$,

$\sum_{k=1}^{\infty} \int_G B_{ik}(x, y)\, dy < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \int_G B_{ik}(x, y)\, dy \right\| < \infty$,

$\int_G |f_{ik}(y, u_1, u_2, \ldots)|^{q_i} dy \leqslant D_i < \infty$, $p_i^{-1} + q_i^{-1} = 1$.

М. М. Вайнберг

6818. **Решение интегрального уравнения Лихтенштейна-Гершгорина в теории комформных отображений. 1. Теория. Варшавский** (On the solution of the Lichtenstein — Gershgorin integral equation in conformal mapping. 1. Theory. Warschawski S. E.), Nat. Bur. Standards. Appl. Ser., 1955, № 42, 7—29 (англ.)

Решается задача построения функции $w = f(z)$, отображающей конформно область G, ограниченную некоторой кривой C, заданной уравнением $z = z(S)$, на единичный круг $|w| < 1$. В основу положено выведенное С. А. Гершгориным (Матем. сб., 1933, 40, 48—58) интегральное уравнение

$$\theta(s) = \int_0^L K(s, t)\, \theta(t)\, dt - 2\beta(s), \qquad (1)$$

где

$$\theta(s) = \arg f[z(s)], \quad K(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_t} \ln \frac{1}{r_{st}},$$

$$r_{st} = |r(s) - r(t)|,$$

$$\beta(s) = \arg \frac{z_2 - z(s)}{z_1 - z(s)}, \quad f(z_1) = 0, \quad f(z_2) = 1$$

Уравнение (1) решается по методу последовательных приближений. Реферируемая первая часть работы посвящена разработке теории.

Исследуются следующие вопросы: 1. Оценка быстроты сходимости процесса последовательных приближений и величины погрешности, допускаемой при замене искомой функции или ее первой производной их приближениями. 2. Оценка величины второго собственного значения λ_2 ($\lambda_1 = 1$). 3. Оценка изменения λ_2 при вариации контура.

Результаты автора формулируются в виде двух лемм и восьми теорем. Приведем из последних три характерные.

Теорема 1.

Пусть $f(s)$ — абсолютно непрерывная и периодическая на интервале $(0, z)$ функция и существует $\|f'\|$ в смысле Лебега; и пусть

$$f_{n+1}(s) = \int_0^L K_{n+1}(s, t)\, f(t)\, dt.$$

Тогда существует предел $\gamma = \lim_{n\to\infty} f_{n+1}(s)$, причем справедлива оценка

$$|f_{n+1} - \gamma| \leqslant \frac{\|f'\|}{|\lambda_2|^n} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2 - 1}}\, \|K(s, t)\|.$$

Теорема 5.

Пусть контур C класса C''_α, т. е. вторая производная $Z''(s)$, удовлетворяет условию Гельдера с показателем α. Тогда производная $\theta'_{n+1}(s)$ приближения решения уравнения (1) сходится к $\theta'(s)$, причем имеет место оценка

$$|\theta'_{n+1} - \theta'(s)| \leqslant \frac{1}{\pi} \|\theta'_0 - \theta'\| \cdot \left\| \frac{\partial K(s, t)}{\partial t} \right\| \left[\frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2 - 1} \right]^{1/2}.$$

Теорема 8.

Если контур C класса C'_α, $1/2 < \alpha \leqslant 1$, то справедливо неравенство

$$\frac{1}{\lambda_2^2} \leqslant \frac{1}{2} \left[\int_0^L K_2(s, s)\, ds - 1 \right].$$

Ф. Д. Гахов

6819. **Решение интегрального уравнения Лихтенштейна—Гершгорина в теории конформных отображений. II. Расчет экспериментов. Тодд, Варшавский** (On the solution of the Lichtenstein-Gershgorin integral equation in conformal mapping. II. Computational experiments. Todd John, Warschawski S. E.), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1955, № 42, 31—44 (англ.)

Дается численное решение интегрального уравнения Гершгорина (см. реф. 6818) для случая, когда контур C есть эллипс, заданный параметрическими уравнениями

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad k = \frac{a}{b}$$

методом последовательных приближений. Вычисления производились на электронных счетных машинах. Рассмотрены три значения параметра k: 1,2, 2,5. Данные вычислений приведены в виде 10 таблиц. Указывается время, затраченное на получение каждого приближения и на весь процесс в целом. Проводятся оценки погрешности. Из рассмотрения приложенных таблиц можно получить интересные данные о быстроте сходимости процесса приближений для различных значений параметра k.

Ф. Д. Гахов

6820. **О построении уравнения разветвления. Покорный В. В.,** Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1957, вып. 5, 15—21

Рассматривается уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^1 A_{10}(x, y)\, \varphi(y)\, dy + \lambda \int_0^1 A_{01}(x, y)\, dy +$$

$$+ \int_0^1 \left(\sum_{m+n \geqslant 2} \lambda^n A_{mn}(x, y) [\varphi(y)]^m \right) dy \qquad (1)$$

с вещественными и непрерывными по совокупности $x, y \in [0, 1]$ коэффициентами $A_{mn}(x, y)$. Предполагается, что при $\lambda = 0$ это уравнение имеет изолированное решение $\varphi(x) \equiv 0$.

Устанавливается вид коэффициентов уравнения разветвления, когда 1 — собственное значение ядра $A_{10}(x, y)$ ранга r. Без доказательства отмечается, что всякое малое непрерывное решение представляется по дробным степеням параметра λ (при $r = 1$ это известно).

Доказывается, что если 1 — простое собственное значение ядра $A_{10}(x, y)$, то уравнение (1) имеет n малых решений, представимые в виде: $\varphi_\lambda(x) = \sum_{\nu=1}^{\alpha} \varphi_\nu(x)\, \lambda^{\nu/s}$, где $1 \leqslant s \leqslant n$, $n = \min \left\{ k : \frac{\partial}{\partial \alpha^k} F(0, 0) \neq 0 \right\}$, $F(\alpha, \lambda) = 0$ — уравнение разветвления при $r = 1$. Данное предложение представляет собой объединение предложения Э. Шмидта (Schmidt E., Math. Ann., 1908, 65, 370—399), что в данном случае существует n решений, и предложения Н. Н. Назарова (Тр. САГУ, Ташкент, 1941, серия V-a, Математика, вып. 33, стр. 79), что в этом случае решения представляются по дробным степеням λ.

М. М. Вайнберг

6821. **Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля. Филимон** (Asupra ecuaţiei integro-diferenţiale a lui Prandtl. Filimon Ioan), Bul. şti-

int. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1957, 9, № 2, 381—385 (рум.; рез. русск., франц.)

Как показал Треффтц (Trefftz E., Math Ann., 1921, 82, 306), интегро-дифференциальное уравнение Прандтля, относящееся к определению циркуляции вокруг профиля конечного размера, эквивалентно решению смешанной граничной задачи.

Исходя из этой последней формулировки задачи Прандтля, автор доказывает, что для профилей, параметры формы которых имеют выражение

$$p\sigma = \frac{m_0 + \sum_{k=1}^{k=s} m_{2k}\cos k\sigma)}{n_0 + \sum_{k=1}^{k=t} n_{2k}\cos(2k\sigma)},$$

решение сводится к квадратурам. Резюме автора

6822. **Разрешимость краевых задач для некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений. Монахов В. Н.,** Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 2, 66—69

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$Lu = (A + B)u = f,$$

$$Au = \sum_{i,j+1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + a(x)u(x),$$

$$Bu = \int_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1} b_{ij}(x,y)\frac{\partial^2 u(y)}{\partial y_i \partial y_j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_i} + b(x,y)u(y)\right] du, \qquad (1)$$

где $a_{ij}(x)$ — непрерывны и имеют ограниченные обобщенные производные первого порядка по x_i, а коэффициенты $a_i(x)$, $b_{ij}(x)$, $a(x)$, $b(x,y)$ — ограничены и измеримы. Оператор L — невырожденный и положительно определенный. Граница области Ω дважды непрерывно дифференцируема и на ней задано краевое условие

$$\{\partial u / \partial N + hu\}_S = 0, \qquad (2)$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^{h} a_{ij}\cos(n, x_j)\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

а h — непрерывна и имеет все ограниченные обобщенные производные первого порядка.

Имеет место теорема: При сделанных выше предположениях относительно оператора L уравнение (1) имеет единственное решение из $\mathring{W}_2^2(\Omega)$ при любой функции $f(x) \in L_2(\Omega)$, где $\mathring{W}_2^2(\Omega)$ — замыкание в норме $W_2^2(\Omega)$ трижды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию (2). Н. И. Мозжерова

6823. **К расчету циркуляции скользящего крыла большого удлинения. Монахов Н. М.,** Изв. высш. учебн. заведений. Авиац. техн., 1958, № 1, 19—26

6824. **О некотором классе сингулярных интегральных уравнений. Штейнберг** (Sur une classe d'équations intégrales singulières. Steinberg J. Technion. Israel Inst. Techn. Sci. Publ., 1954—1955, 6, 85—93) (франц.; рез. иврит)

Автор изучает уравнение

$$f(s) - \lambda\int_{-\infty}^{\infty} K(\mu s - t)f(t)\,dt = 0. \qquad (1)$$

Пусть μ не является корнем из единицы и пусть $K(u)$ а) аналитична по $u = u' + iu''$ в полосе B, содержащей действительную ось, в) $|K(u)| = o(|u'|^{-r})$ для каждого $r > 0$ при $u \to \infty$ в B. с) $1/\lambda_1 = \int_{-\infty}^{\infty} K(u)du \neq 0$; тогда для μs в B уравнение (1) имеет характеристические числа $\lambda_n = \lambda_1\mu^{1-n}$ $(n = 1, 2\ldots)$, для каждого из которых уравнение (1) имеет полиномиальные решения степени $n-1$. Если $\mu = \exp\{2\pi iMN^{-1}\}$ $(M < N$ и целые) и а), с) имеют место, в то время как $|K(u)| = 0(h > 0$ для $u \to \infty$ в $B)$, тогда для μs в B существует N областей, содержащих $\lambda_n = \lambda_1\mu^{1-n}$ соответственно, так что каждое λ в этих областях является характеристическим числом уравнения (1). W. J. Trjitzinsky

Перев. из Math. Revs, 1956, 17, № 4, 376

6825. **О слабой непрерывности оператора Немыцкого. Шрагин И. В.,** Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1957, 57, 73—79

Пусть $g(u, x)$ — функция, порождающая оператор Немыцкого (РЖМат, 1957, 2428). При помощи теоретико-функциональной конструкции устанавливается теорема: Для того чтобы оператор Немыцкого был слабо непрерывным из L^p в L^{p_1} $(1 \leqslant p < \infty,\ 1 \leqslant p_1 \leqslant \infty)$, необходимо и достаточно выполнение условия: почти при всех x функции $g(u, x) = a(x) + b(x)u$, $u \in (-\infty, +\infty)$, где $a(x) \in L^{p_1}$. При этом, если $p_1 > p$, то $b(x) \equiv 0$, если $p_1 \leqslant p$, то $b(x) \in L^r$, где $r = \infty$ при $p_1 = p$ и $r = pp_1(p - p_1)^{-1}$ при $p_1 < p$. М. М. Вайнберг

См. также: 7194, 7195, 6796

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

6826. **Полная вариация и длина кривой. Баяда, Кардамоне** (La variazione totale e la lunghezza di una curva. Baiada E., Cardamone G.), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1957, 11, № 1—2, 29—71 (итал.)

Если $f(x)$ — абсолютно непрерывная на отрезке (a, b) функция, то ее полная вариация имеет вид

$$v = \int_a^b |f'(x)|\,dx,$$

а длина кривой $y = f(x)$ выражается формулой

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx,$$

причем в обеих в формулах интегрирование понимается в смысле Лебега.

Если $f(x)$ — функция ограниченной вариации, но не является абсолютно непрерывной, то интегралы в правых частях этих формул существуют, но формулы не верны (примеры Витали).

Для функций ограниченной вариации, необязательно являющихся абсолютно непрерывными, авторы доказывают следующие формулы:

$$v = \lim_{h\to 0}\int_a^b \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| dx,$$

$$S = \lim_{h\to 0}\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{f(x)+h) - f(x)}{h}\right)^2}\,dx.$$

Предполагается, что $f(x)$ равна $f(a)$ при $x<a$ и $f(x)=f(b)$ при $x>b$. Интегрирование понимается в смысле Римана. Доказательство осуществляется средствами элементарного анализа. А. В. Погорелов

6827. **Полная вариация, длина кривой и интеграл вариационного исчисления.** Баяда (La variazione totale, la lunghezza d'una curva e l'integrale del calcolo delle variazioni in una variabile. Baiada Emilio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, 22, № 5, 584—588 (итал.)

Приводятся теоремы, доказательства которых даны в совместной работе автора и Кардамоне (реф. 6826). Кроме того, сформулирована еще одна теорема, указывающая связь предыдущих теорем с интегралами вариационного исчисления. А. В. Погорелов

6828. **Обобщение понятия границы.** Флеминг, Янг (A generalized nation of boundary. Fleming W. H., Young L. C.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 76, № 3, 457—484 (англ.)

Рассматривается несколько общих задач вариационного исчисления с точки зрения применения метода линейных пространств, предложенного Янгом (Young) в его предыдущих статьях (см., например, Bull. Soc. Math. France, 1951, 79, 59—84). Результаты Янга применяются, в частности, для обобщения минимальной теоремы Чезари (Cesari, Amer. J. Math., 1952, 74, 265—295), А. Г. Сигалова (Успехи матем. наук, 1951, 6, 16—101, или Amer. Math. Soc. Transl., 1953, № 83) и Данскина (Danskin, Riv. Mat. Univ. Parma, 1952, 3, 43—63), а также теорем М. Г. Крейна и Д. П. Мильмана об экстремальных точках.

Отображение $x(u, v)$ единичного квадрата на m-мерное пространство R^m называется представлением Дирихле, если $x(u, v)$ абсолютно непрерывна в смысле Тонелли и $\iint (x_u^2 + x_v^2)\, du\, dv < \infty$. Поверхность Дирихле с представлением Дирихле $x(u, v)$ является неотрицательным линейным функционалом L, определенным поверхностным интегралом $(L, f) = \iint f[x(u, v), I(u, v)]\, du\, dv$ в пространстве E^m положительно однородных подынтегральных функций f m-мерных задач вариационного исчисления. Как это было ранее определено Янгом, обобщенная поверхность есть произвольный неотрицательный линейный функционал L над E^m. Сходимость понимается в слабом смысле*, т. е. если для всех f имеет место $(L, f) \to (L_0, f)$, то $L \to L_0$. Точной подынтегральной функцией φ в E^m называется такая функция, для которой $(L, \varphi) = 0$, каким бы замкнутым полиэдром ни был L. Обобщенная граница (кратко: g-граница) обобщенной поверхности L есть линейный функционал $\lambda(L)$, полученный при условии, что область функционала L состоит из точных подынтегральных функций. g-Граница λ является допустимой, если для некоторой поверхности Дирихле L имеет место $\lambda = \lambda(L)$. Если $\lambda(L) = 0$, то L является замкнутым. Если $L \neq 0$ и если из $L = L_1 + L_2$ с замкнутыми L_1 и L_2 вытекает $L_1 = kL$ для некоторого k, $0 \leqslant k \leqslant 1$, то L называется базисно замкнутым. Обобщенная поверхность L называется расположенной в подпространстве A пространства R^m, если $(L, f) = 0$ для всех x из замкнутого подмножества множества A и для всех I. Наконец, L является базисно (λ), если L является экстремальной точкой множества всех функционалов с g-границей λ. После введения этих определений авторы доказывают следующие четыре теоремы. 1. Пусть λ_0 является допустимым. Для того чтобы L_0 имела g-границу $\lambda(L_0) = \lambda_0$, необходимо и достаточно, чтобы L_0 являлась w^*-пределом последовательности линейных комбинаций $\Sigma k_j L_j$ поверхностей Дирихле L_i с положительными коэффициентами при $\lambda(L_j) = \gamma_i \lambda_0$, где γ_j — положительные целые и $\Sigma k_j \gamma_j = 1$. Если размерность m пространства R^m равна 3, то γ_j можно приравнять единице. 2. Пусть $m = 3$. Если $\lambda \neq 0$ является допустимой и L_0 является базисно (λ), то L_0 является w^*-пределом последовательности поверхностей Дирихле с обобщенной границей. 3. Пусть $m = 3$. Если L_0 является базисно-замкнутым, то kL_0 является w^*-пределом последовательности замкнутых поверхностей Дирихле для некоторого $k > 0$. 4. Пусть f_0 принадлежит E^m, а A — компактное выпуклое подпространство R^m. Тогда для того чтобы существовали точная подынтегральная функция φ и величина $\varepsilon > 0$ такие, что $f_0(x, I) \geqslant \varphi(x, I) + \varepsilon(I)$ для всех $x \in A$ и для всех I, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий: а) $(L, f_0) > 0$ для любого базисно-замкнутого L, расположенного в A; в) существует открытое множество Ω, содержащее A, и $\varepsilon_1 > 0$ такие, что $(L, f) \geqslant \varepsilon_1 \times \times area \times (L)$ для любого замкнутого полиэдра L, расположенного в Ω.

Эти теоремы применяются для доказательства теорем о расположении замкнутых неотрицательных линейных функционалов L (из-за громоздкости мы их не приводим), а также теорем, упомянутых нами в начале реферата.

Теорема Мильмана обобщается следующим образом. Пусть $A \subset R^m$ компактно. Тогда любая экстремальная точка w^*-замкнутой выпуклой меры с (Г) множества Г неотрицательных линейных функционалов L, расположенных в A, является w^*-пределом некоторой последовательности из Г. Этот факт был ранее известен в ограниченном случае (Мильман Д. П., Докл. АН СССР, 1947, 57, 119—122). Теорема Крейна—Мильмана (Studia Math., 1940, 9, 133—138) обобщается так: пусть $A \subset R^m$ компактно и пусть f_0 принадлежит E^m при $x \in A$. Тогда если минимум для (L, f_0) существует в w^*-замкнутом множестве Г неотрицательных линейных функционалов L, расположенных в A, то этот минимум достигается в экстремальной точке множества Г.

J. M. Danskin

Перев. из Math. Rev., 1955, 16, № 7, 721.

6829. **Вычисление последовательных вариаций кратного интеграла инвариантным методом Де-Донде.** Де-Слоовере (Le calcul des variations successives d'une intégrale multiple, par la méthode invariantive de Th. De Donder. De Sloovere H.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 10, 1028—1032 (франц.)

Развиваются и уточняются некоторые вычисления, приведенные в предыдущей статье автора (РЖМат, 1954, 5625). Г. И. Жотиков

6830. **Об экстремалях обобщенных метрических пространств.** Моор (On the extremals of the generalized metric spaces. Moor Arthur), Bul. Inst. politehn. Iasi, 1956, 2, № 3—4, 19—26 (англ.; рез. русск., рум.)

Рассматриваются экстремали метрических пространств с опорными элементами (x^i, u_i) или (x^i, u^i), где u_i — относительный ковариантный вектор (векторная плотность) веса $-p$, а u^i — контравариантный вектор веса p. Эти пространства введены Схоутеном и Хаантьесом (Schouten J. A., Haantjes J., Monatsh. Math. Phys., 1936, 43, 161—176). Экстремали были изучены Фриманом, рассматривавшим вариации основного интеграла вдоль кривых $t = \text{const}$ в поле объекта $u^i(t, v)$, задаваемого на двумерном многообразии точек $x^i(t, v)$ (Freeman J. G., Quart. J. Marh., 1944, 15, 70—83). В настоящей работе автор рассматривает объект u^i (соотв. u_i) в пространстве линейных элементов, касательных к

рассматриваемым кривым. Это позволяет получить уравнения экстремалей как уравнения Эйлера — Лагранжа, соответствующие интегралу

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik}(x, u(x, \dot{x}))\, \dot{x}^i \dot{x}^k}\, dt.$$

В заключение рассматриваются некоторые специальные случаи полей $u^i = u^i(x, \dot{x})$; в частности, положив u^i параллельным линейному элементу x^i, автор получает результаты Фримана. Б. Л. Лаптев

6831. Элементарное исследование задачи Какея. Мампель (Eine elementare Behandlung des Umdrehungsproblems von Kakeya. Mampel K. L.), Math.-phys. Semesterber., 1957, 5, № 3-4, 239—251 (нем.)

Задача Какея заключается в отыскании области наименьшей площади, в которой данный отрезок AB можно повернуть так, чтобы его концы поменялись местами. При этом на область накладываются те или иные дополнительные ограничения. Например, можно потребовать, чтобы область была выпуклой или чтобы она содержалась внутри заданного круга и т. д. Автор доказывает, что для любого $\sigma > 0$ внутри круга достаточно большого радиуса можно указать область с площадью σ, в которой заданный отрезок AB можно повернуть указанным образом. А. В. Погорелов

6832. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М., Успехи физ. наук, 1957, 63, № 1а, 5—32

Рассматривается вопрос о выведении искусственного спутника Земли на его орбиту с помощью ракетных ускорителей, и ставится ряд вариационных задач о программе работы ускорителей: изменение в полете направления тяги (определение угла тангажа) для обеспечения минимальной затраты топлива и достижения максимальной горизонтальной скорости в конце пути выведения, установление режима расходования топлива для тех же целей. В § 1, где рассмотрена одна ракета, и в § 2, где рассмотрен составной ускоритель, делается упрощающее предположение об отсутствии аэродинамических сил сопротивления и предполагается, что гравитационное поле Земли плоскопараллельное (постоянство ускорения силы тяжести). В § 3 учитывается изменение центрального поля силы тяжести с высотой и принимается во внимание вращение Земли. Пусть $V(t)$ — идеальная скорость, которую имел бы ускоритель только под действием силы тяги, T — время движения на участке выведения спутника на его орбиту, u и w — горизонтальная и вертикальная проекции скорости движения в процессе выведения, а $u_0 = v_0 \cos\vartheta_0$, $w_0 = v_0 \sin\vartheta_0$ — начальные значения u и w. Составляется функционал

$$J = v_0 \cos\vartheta_0 + \int_0^T \left\{ \frac{dV}{dt} \cos\varphi + \lambda_1 \left(\frac{dw}{dt} - \frac{dV}{dt} \sin\varphi + g \right) + \lambda_2 \left(\frac{dy}{dt} - w \right) \right\} dt$$

(φ — угол тангажа) и вычисляется полная вариация δJ. Равенство $\delta J = 0$ выражает условие оптимальности горизонтальной скорости при наличии связей

$$\frac{dw}{dt} - \frac{dV}{dt} \sin\varphi + g = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} - w = 0.$$

Из вариационного условия вытекает, что при оптимальном режиме, независимо от закона изменения тяги, угол тангажа определяется равенством

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_0 - Ct, \quad C = \text{const}.$$

Ставится вопрос о наилучшем выборе идеальной скорости V, что связано с режимом работы двигателя ускорителя, при установленном законе изменения угла тангажа. Для решения этой задачи получена формула

$$\delta u = C \int_0^T \sin\varphi\, \delta V\, dt$$

и рассмотрены четыре возможных способа обеспечения наивыгоднейшего расходования топлива. Подробно рассмотрен случай, когда время T не фиксировано, а выбирается из условия максимума конечной горизонтальной скорости. Получены расчетные формулы, и приводится реальный пример расчета. В основу анализа движения с заданным режимом расходования топлива положен установленный закон линейной зависимости тангенса угла тангажа от времени. Составная ракета рассматривается как ускоритель с прерывным законом изменения тяги. И в этом общем случае получены расчетные схемы для определения оптимального режима. Приводятся графики, иллюстрирующие полученные выводы. Отмечаются также некоторые ограничения на возможность получения различных комбинаций высоты запуска и скорости выведения при фиксированных параметрах составляющих подобных ракет.

Для учета изменения силы тяжести принимаются формулы

$$g_x = g\frac{x}{R}, \quad g_y = g - 2g\frac{y}{R}, \quad g_z = 0$$

(R — радиус Земли, оси xyz вращаются вместе с Землей). Учет вращения осуществляется добавлением ускорений переносного и Кориолиса. Решается вариационная задача о максимальной горизонтальной скорости на заданной высоте при заданной тяге. Получена формула для определения тангенса угла тангажа (дробно-линейная функция от комбинации тригонометрических и гиперболических функций времени). Отдельно рассмотрен случай, когда $\omega_z = 0$ (запуск на полюсе или в меридиональной плоскости). В случае, когда число

$$T\sqrt{\frac{g}{R}}$$

мало, $\operatorname{tg}\varphi$ является дробно-линейной функцией времени, а если пренебречь поправками на центральное поле тяжести, то $\operatorname{tg}\varphi$ является линейной функцией времени. И. С. Аржаных

6833. Исследование уединенной ударной волны низкого сверхзвукового течения. Кондо (Studies on the low-supersonic flow with a detached shock wave. Kondo Jiro), Proc. 6th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1956. Tokyo, 1957, 253—258 (англ.)

Рассматривается плоское установившееся сверхзвуковое течение политропной жидкости при небольших числах Маха в предположении, что существует уединенная ударная волна. Из уравнения неразрывности компоненты скорости представлены через функцию тока, и составлен функционал, обращение в минимум которого дает уравнения задачи. Фронт волны ищется в виде

$$x = \delta + \alpha_1 y^2 + \alpha_2 y^4 + \ldots,$$

и аналогично плотность и функция тока —

$$\rho = \rho_0(x) + \rho_1(x)\,y^2 + \rho_2(x)\,y^4 + \ldots,$$
$$\psi = y\,[\psi_0(x) + \psi_1(x)\,y^2 + \ldots].$$

Затем функции ρ_i и ψ_i связываются зависимостями, вытекающими из интеграла Бернулли. Если, наконец, представить ρ_i и ψ_i в виде степенных рядов и подставить все значения в установленный ранее функционал, то коэффициенты разложений определятся из условий экстремальности. Рассмотрен пример, когда фронт ударной волны представляет собой окружность при M-2. И. С. Аржаных

6834. **Численное рассмотрение одной нелинейной вариационной проблемы газовой динамики. Гиперт** (Numerische Behandlung eines nichtlinearen Variationsproblems aus der Gasdynamik. Gispert H.-G.), Ber. Internat. Math.-Kolloq., 1955, (1957), Nov., 113—118 (нем.)

Решение задачи об установившемся безвихревом обтекании профиля дозвуковым плоскопараллельным потоком дает стационарное значение интегралу

$$J = \iint_B c^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}\,dx\,dy.$$

Здесь B — область течения $c^2 = c_0^2 - \frac{\varkappa-1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 - v_0^2)$ (c — скорость звука), $\Phi(x, y)$ — потенциал скоростей, v_0 и c_0 — соответственно, скорость и скорость звука набегающего потока, $\varkappa$ — отношение теплоемкостей. Для случая обтекания круга Φ ищется приближенно в виде

$$\Phi = \Phi_1(x, y) + \sum_{k=1}^{3} f_k(s)\cos(2k-1)v,$$

где Φ_1 — потенциал соответствующего течения несжимаемой жидкости, v и $r = s^{-1}$ — полярные координаты. Условие $\delta J = 0$ приводит к системе уравнений вида

$$LF(s) + NF(s) + R(s) = 0 \qquad (1)$$

для вектора $F = \{f_1, f_2, f_3\}$; L и N — соответственно, линейный однородный и нелинейный дифференциальные операторы второго порядка с граничными условиями

$$F(s) \xrightarrow[s\to+0]{} 0, \quad F'(s) \xrightarrow[s\to1-0]{} 0, \qquad (2)$$

$R(s)$ — известный вектор. Задача (1) — (2) решается последовательными приближениями: $LF_1 + R = 0$, $LF_{n+1} + NF_n + R = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$). Линейные краевые задачи на каждом шаге решаются разностным методом при небольшом числе точек. Приведены результаты вычисления значений скорости на профиле в двух первых приближениях при $v_0/c_0 = 0{,}35$ и $\varkappa = 1{,}5$. Производится сравнение с результатами, полученными ранее другим методом. При $v_0/c_0 = 0{,}40$ для $n = 1$ возникают местные сверхзвуковые зоны вблизи профиля. Автор оставляет открытым вопрос об их фактическом существовании у точного решения. Обоснование применяемых приближенных приемов отсутствует. Приведен результат аналогичного расчета (в первом приближении) обтекания эллипса. М. Ш. Бирман

6835 Д. **Вариационные задачи в нелинейной теории упругих оболочек. Айнола Л. Я.,** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., АН ЭстССР, Таллин, 1957

См. также: 6752, 6753, 7145

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редактор *В. В. Немыцкий*

6836. **Действительные числа. (Преподавание в высшей технической школе с большой программой математики.) Ляпунов А. А.,** Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 149—156

6837. **О равномерной непрерывности функции. Виленкин Н. Я.,** Матем. просвещение, вып. 1, 1957, 167—168

6838. **Об обобщенном полиноме Эрмита. Аль-Салам** (On a generalized Hermite polynomial. Al-Salam Waleed A.), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 2, 241—246 (англ.)

Рассматриваются полиномы $G_{n,\nu}(x)$, изученные Тоскано (РЖМат, 1958, 456). Выводятся соотношения

$$H_m(x)\,G_{n,\nu}(x) =$$
$$= \sum_{r=0}^{m} r!\binom{m}{r}\binom{n+\nu+1}{r} G_{n+m-2r,\nu}(x),\ m \leqslant n,$$
$$[G'_{n,\nu}(x)]^2 - G'_{n+1,\nu}(x)\,G'_{n-1,\nu}(x) \geqslant 0$$

и некоторые подобные неравенства.

Примечание референта. Содержание последнего отдела статьи непонятно из-за опечатки в первой формуле стр. 245. Г. К. Энгелис

6839. **Полиномы, обладающие биномиальным свойством. Кролл** (Polynomials with the binomial property. Krall H. L.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 5, 342—343 (англ.)

Последовательность полиномов $b_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{ni}\,x^i$, $b_{nn} \neq 0$, называется 1) биномиальной, если

$$b_n(x+y) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} b_i(x)\,b_{n-i}(y),\ n = 0, 1, \ldots,$$

2) основной типа 0, если $b_0(x) = 1$, $b_n(0) = 0$ ($n > 0$) и существует такой дифференциальный оператор

$$J(b) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\,b^{(i)}(x)$$

(c_i — постоянные, $c_1 \neq 0$), что (при $n > 0$) $J(b_n) = b_{n-1}(x)$.

В статье доказывается, что $\{b_n(x)\}$ — биномиальная последовательность тогда и только тогда, если $\{b_n(x)/n!\}$ — основная последовательность типа 0.

Г. К. Энгелис

6840. **Об одном операторе. Пайвин А. У.,** Уч. зап. Глазовск. пед. ин-та, 1956, вып. 3, 108—111

Рассматривается функция $f(x)$, непрерывная, неотрицательная и суммируемая на $[0, \infty)$. Предполагается, что она бесконечное число раз дифференцируема в точ-

ке $x=0$ и что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{f^{(n-1)}(0)}=-\alpha,$$

где $0<\alpha<\infty$. Утверждается, что в этих условиях функция $f(x)$ является аналитической на $[0,\infty)$. Доказывается, что α является характеристичным числом функции $f(x)$ по Ляпунову. Кроме того, доказывается, что введенный автором оператор B,

$$Bf=-\frac{f'(x)}{f(0)}$$

обладает свойствами: а) каждая функция последовательности Bf, $B(Bf)$, ..., $B^n f$, ... имеет одно и то же характеристичное число α, б) эта последовательность на любом сегменте $[0, b]$, где $0<b<\infty$, сходится равномерно к функции $\alpha e^{-\alpha x}$. Примечание референта. Существования производных $f^{(n)}(x)$ $(n=1, 2,\ldots)$ в точке $x=0$ и сходимости всюду ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ недостаточно для того, чтобы этот ряд сходился к породившей его функции $f(x)$. Исходя из указанных условий, нельзя утверждать, что $f(x)$ является функцией, аналитической на $[0,\infty)$. Из условия суммируемости $f(x)$ на $[0,\infty)$ не следует существование предела $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{f'(x)}{f(x)}dx$ и справедливость преобразований, применяемых при его вычислении. Имеются опечатки.

И. П. Макаров

6841. Нелинейные рекуррентные соотношения для некоторых классических функций. Уэбстер (Non-linear recurrence relations for certain classical functions. Webster M. S.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 4, 249—252 (англ.)

Доказывается, что некоторые нелинейные рекуррентные соотношения, содержащие три последовательных члена некоторой последовательности функций, характеризуют те или другие специальные функции. Например, если $f_n(x)$ — полином степени n, $f_0(x)=1$, $f_1(x)=-x+\alpha+1$ и для каждого целого $n>0$

$$x[(f_n')^2-f_{n-1}'f_{n+1}']=nf_n^2-(n+1)f_{n-1}f_{n+1}+f_{n-1}f_n,$$

то $f_n(x)=L_n^{(\alpha)}(x)$ (полиномы Лагерра). Другие теоремы относятся к ультрасферическим полиномам, полиномам Эрмита и функциям Бесселя первого рода.

Г. К. Энгелис

6842. О дифференцировании высшего порядка. Пандрес (On higher ordered differentiation. Pandres Dave, Jr), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 8, Part 1, 566—572 (англ.)

Устанавливается формула для нахождения производной n-го порядка от сложной функции одного независимого переменного с несколькими промежуточными аргументами. С этой целью вводится в рассмотрение матрица

$$\Delta_n=\begin{pmatrix} D_1 & -1 & 0 & 0\ldots 0\\ D_2 & D_1 & -2 & 0\ldots 0\\ D_3 & D_2 & D_1 & -3\ldots 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ D_n & D_{n-1} & \ldots D_3 & D_2 & D_1 \end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \cdot 1-n\end{matrix}$$

и доказывается, что при условии непрерывности функции $y=f[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_q(x)]$ и ее частных производных по аргументам $u_1, \ldots, u_q$ до n-го порядка включительно, имеет место равенство

$$\frac{d^n y}{dx^n}=|\Delta_n|f(u_1, u_2, \ldots, u_q), \qquad (1)$$

где $|\Delta_n|$ — определитель матрицы Δ_n, а его элементы D_i являются дифференциальными операторами вида

$$D_i=\frac{1}{(i-1)!}\sum_{n=1}^{q}\frac{d^i u_h}{dx^i}\frac{\partial}{\partial u_h}.$$

Равенство (1), очевидно, справедливо для $n=1$, а для любого n оно доказывается методом математической индукции, пользуясь разложением определителя по элементам последней строки.

Полученный результат применяется при разложении в степенной ряд мероморфной функции конечного рода.

А. Г. Школьник

6843. О теоремах существования определенного интеграла. Коровкин П. П., Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 227—233

6844. Вычисление одного класса несобственных интегралов разложением в ряд. Муратов Л. М., Уч. зап. Удмуртск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 11, 122—126

6845. Заметка по технике интегрирования по частям. Марков (Замітка про техніку інтегрування частинами. Марков О. О.), Наук. зап. Херсонськ. держ. пед. ин-т, 1956, вып. 7, 43 (укр.)

Рекомендуется не пользоваться вспомогательными переменными u и v.

А. Г. Школьник

6846. О расположении нулей одного класса интегральных полиномов. Божоров (Върху разпределението на нулите на една класа интегрални полиноми. Божоров Е.), Годишник Хим.-технол. ин-т, 1954, 1, 9—12 (болг.; рез. русск.)

Доказывается теорема: Если все нули полинома $p(z)$ находятся в полосе R, параллельной мнимой оси, и если $f(x)$ — четная, положительная на $[-1, +1]$ функция, причем $xf(1-2x)$ возрастает монотонно на $[0,1]$, то нули полинома

$$\int f(x)[p(z+x)+p(z-x)]dx$$

тоже находятся в R.

Г. К. Энгелис

6847. Об определителях, связанных с неравенством Гильберта. Сойер (On determinants associated with Hilbert's inequality. Sawyer W. W.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 2, 133—138 (англ.)

Рассматривается величина

$$E=\int_1^n\int_1^n(x+y)^{-1}f(x)f(y)\,dx\,dy\Big/\int_1^n f^2(x)\,dx.$$

Считая $\sqrt{x}f(x)$ полиномом от $u=\sqrt{x/n}$, автор находит полином $\Sigma_{r=0}^{N}k_r u^r$ наперед заданной степени N, максимизирующий E: $\Sigma_{r=0}^{N}k_r u^r=\det Q$, где $Q=\|q_{ij}\|_{ij=0}^{N}$, $q_{00}=2$, $q_{0s}=C_{N+1}^{s}u^s$ $(s=1, \ldots, N)$, $q_{N0}=1$, $q_{r0}=0$ $(r=1, \ldots, N-1)$, $q_{rs}=S^{N-r}c_s$ $(s=1, \ldots, N$, $1\leqslant r\leqslant N$, $N-r$ — четно, $c_s=\int_0^1(1-t^s)(1+t^2)^{-1}dt)$, $q_{rs}=s^{N-r}$ $(s=1, \ldots, N$, $1\leqslant r\leqslant N$, $N-r$ — нечетно). При этом $\max E=\pi-2\sigma_N\nu^{-1}+O(\nu^{-2})$, где $\nu=\ln n$,

а σ_N находится из уравнения $\det P = 0$, $P = \| p_{ij} \|_{i,\,j=0}^{N}$,

$$p_{N0} = \int_0^1 x^{-1} \operatorname{arc\,tg}\, x dx - \sigma_N,\ p_{N-1,\,0} = 1,$$

$$p_{r0} = 0\ (r = 0, \ldots, N-2),$$

при $r = 0, \ldots, N$, $s = 1, \ldots, N$

$$p_{rs} = \begin{cases} s^{N-r} c_s & \text{при четном } N-r, \\ s^{N-r} & \text{при нечетном } N-r. \end{cases}$$

А. А. Нудельман

6848 К. Математический анализ; современный подход к интегральному и дифференциальному исчислению. Апостол (Mathematical analysis; a modern approach to advanced calculus. Apostol Tom M. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1957, 565 p.., 8.50 doll.), Publishers Weekly, 1957, **172**, № 10, 81 (англ.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

6849. Две теоремы о рядах с положительными членами. Стипанич (Due teoremi sulle serie a termini positivi. Stipanić E.), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 1, 50—56 (итал.)

Автор доказывает две теоремы, примыкающие к известным теоремам Абеля и Дини о рядах с положительными членами (Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, ГТТИ, т. II, 1948, стр. 338—339).

Теорема 1. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n'$ сходятся, $(c_n,\ c_n' > 0)$ и имеют суммы соответственно s и s'.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{c_n'} = g > 0$ и $\dfrac{c_n'}{r_{n-1}'} \leqslant \dfrac{c_n}{r_{n-1}}$ $(r_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} c_k$, $r_{n-1}' = \sum_{k=n}^{\infty} c_k')$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{c_n}{r_{n-1}} - \dfrac{c_n'}{r_{n-1}'} \right)$ сходится и его сумма равна $\dfrac{\theta}{g} \left(\dfrac{s}{s'} - g \right)$, $0 \leqslant \theta < 1$.

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{c_n'} = 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \dfrac{c_n}{r_n} - \dfrac{c_n'}{r_n'} \right| = +\infty$.

Теорема 2. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n' = +\infty$; $d_n,\ d_n' > 0$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d_n}{d_n'} = t > 0$, $\dfrac{d_n'}{D_n'} \leqslant \dfrac{d_n}{D_n}$ $(D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$, $D_n' = \sum_{k=1}^{n} d_k')$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{d_n}{D_n} - \dfrac{d_n'}{D_n'} \right)$ сходится, и его сумма равна $\theta \dfrac{d_1'}{d_1} \left(t - \dfrac{d_1}{d_1'} \right)$ $(0 \leqslant \theta < 1)$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d_n}{d_n'} = 0$, то $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \dfrac{d_n'}{D_{n-1}} - \dfrac{d_n'}{D_{n-1}'} \right| = +\infty$. В заключение автор приводит обобщение последней теоремы.

В. П. Хавин

6850. О критерии Коши сходимости бесконечного ряда. Вилански й (On the Cauchy criterion for the convergence of an infinite series. Wilansky Albert), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 7, Part I, 469—471 (англ.)

Бесконечная матрица A называется матрицей Коши, если для любой сходящейся последовательности $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ произведение Ax есть нуль. Последовательность x удовлетворяет условию Коши, если для некоторой матрицы Коши A, Ax есть нуль.

Если задана счетная совокупность условий Коши, то существует неограниченная последовательность, удовлетворяющая всем этим условиям (РЖМат, 1956, 4607, теорема 4,3.)

Дается новое доказательство этой теоремы.

М. Д. Калашников

6851. Несколько теорем о произведениях методов суммирования. Парамесваран (Some product theorems in summability. Parameswaran M. R.), Math. Z., 1957, **68**, № 1, 19—26 (англ.)

Пусть P и Q — два метода суммирования вещественных последовательностей $s = \{s_n\}$. Если к последовательности s применить сначала преобразование Q и к полученной последовательности применить преобразование P, то получим новую последовательность $P(Q_s)$. Если эта последовательность сходится, то последовательность s суммируется методом PQ.

Доказывается равносильность (Харди Г., Расходящиеся ряды, М., Изд-во ин. лит., 1951) методов PQ и P, когда в качестве метода Q берется метод, определяемый преобразованием

$$t_n = \frac{\lambda_0 s_n + \lambda_1 s_{n-1} + \ldots + \lambda_n s_0}{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n},$$

где $\{\lambda_n\}$ — последовательность (вообще говоря, комплексных) чисел.

Теорема 1, доказываемая автором, касается того случая, когда P есть метод Вороного (неправильно названный автором методом Нёрлунда). Точная формулировка этой теоремы следующая:

Пусть $p_n \geqslant 0$ и $P_n = p_0 + p_1 + \ldots = p_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, тогда из равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_0 s_n + p_1 s_{n-1} + \ldots + p_n s_n}{P_n} = l$$

следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_0 t_n + p_0 t_{n-1} + \ldots + p_n t_0}{P_n} = l$$

и наоборот. Здесь предполагается, что последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию $\Sigma_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < |\lambda_0|$. Аналогичные теоремы доказываются для методов Абеля, Бореля и других. В этих случаях на последовательность $\{\lambda_n\}$ накладываются более жесткие условия. Библ. 9 назв.

Ф. И. Харшиладзе

6852. О второй теореме совместности в теории абсолютной суммируемости методом Рисса. Прасад, Пати (On the second theorem of consistency in the theory of absolute Riesz summability. Prasad B. N., Pati T.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **85**, № 1, 122—133 (англ.)

Пусть $\{\lambda_n\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к бесконечности при $n \to \infty$. Ряд Σc_n называется абсолютно суммируемым (R, λ, γ) или суммируемым $|R, \lambda, \gamma|$, если функция $f(\omega) = C_{\lambda}^{(\gamma)}(\omega) / \omega^{\gamma}$, где $C_{\lambda}^{(\gamma)}(\omega) = \Sigma_{\lambda_n \leqslant \omega} (\omega - \lambda_n)^{\gamma} c_n$, имеет ограниченное изменение в интервале (h, ∞) при некотором $h > 0$.

Доказывается следующая теорема: Если $\varphi(t)$ — неотрицательная монотонно возрастающая функция, определенная для $t \geqslant 0$, $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, $\varphi'(t)$ — монотонно неубывающая функция, $\varphi(t)$ представляет из себя неопределенный интеграл $(k+2)$-го порядка, где $k = [\gamma]$ — целая часть числа γ и функция $t^r \varphi^{(r)}(t) / \varphi(t)$ $(r = 1, 2, \ldots, k+1)$ имеет ограниченное изменение в интервале (h, ∞), то из $|R, \lambda_n, \gamma|$-суммируемости ряда Σc_n следует $|R, \varphi(\lambda_n), \gamma|$-суммируемость этого ряда. Библ. 12 назв. Ф. И. Харшиладзе

6853. **Некоторые мерсеровы теоремы в теории суммирования. Парамесваран** (On some Mercerian theorems in summability. Parameswaran M. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 968—974 (англ.)

Автор устанавливает несколько теорем типа Мерсера (о классической теореме Мерсера см. Харди, Расходящиеся ряды, М., Изд-во ин. лит., 1951, стр. 135), обобщающие соответствующие результаты Лава (Love E. R., J. London Math. Soc., 1952, **27**, 413—429), Агнью (РЖМат, 1955, 2273), Бозанке (Bosanquet L. S., J. London Math. Soc., 1938, **13**, 177—180). Пишем $y = Ax$, если $y_n = \Sigma_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$, $A = \{a_{nk}\}$ —некоторая матрица. Пусть (c_0), (c), (m) обозначают соответственно множество всех последовательностей $x(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ сходящихся к нулю, сходящихся, ограниченных. Пусть далее (M) и (K) — данные множества последовательностей. Обозначим через $\Gamma(M, k)$ множество матриц A таких, что из $x \in (M)$ вытекает $Ax \in (k)$.

Теорема 1. Пусть $A \in \Gamma(M, K)$, где $(M) = (c_0)$, (c) или (m). Тогда из $(E + qA)\, x \in (M)$ и $q \mid \overline{\lim}_{n\to\infty} \Sigma_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < 1$ вытекает, что $x \in (M)$ если выполняется одно из следующих условий: 1) $x \in (m)$ или 2) A — треугольная матрица $(a_{nk} = 0$ для $k > n)$.

Теорема 4. Если треугольная матрица $P \in \Gamma(|c|, |c|)$,

$$|p_{nn}| - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \sum_{i=n}^{k} (p_{ki} - p_{k-1,i}) \right| > \lambda > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

то тогда из $Px \in (|c|)$ следует $x \in (|c|)$, где $(|c|)$ — множество всех абсолютно сходящихся последовательностей. (Необходимые и достаточные условия для того, чтобы $P \in \Gamma(|c|, |c|)$, сформулированы в работе Мирса (Mears F. M., Ann. math., 1937, 38, 594—601).

Теорема 5. Если $A \in \Gamma(c, c)$ является матрицей Хаусдорфа (см. Харди, стр. 311) и удовлетворяет условию

$$|a_{nn}| - \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk}| > \lambda > 0, \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

то из $Ax \in (|c|)$ вытекает $x \in (|c|)$.

Доказательства основываются на нескольких леммах об абсолютной суммируемости и трактовке матриц A, принадлежащих соответствующему семейству матриц Γ, как элементов банаховой алгебры с нормой $\|A\| = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|$. (О банаховых алгебрах см. РЖМат, 1957, 4989 К). Цитируется работа Широкова (РЖМат, 1956, 5307), где методы функционального анализа используются для установления одной мерсеровой теоремы Лава (цитир. выше). И. И. Огиевецкий

6854. **Методы суммирования, основанные на степенных рядах. Боруэйн** (On methods of summability based on power series. Borwein D.), Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1957, **A64**, № 4, 342—349 (англ.)

Пусть степенный ряд $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$, $p_n \geqslant 0$, имеет радиус сходимости ρ_p. Будем говорить, что последовательность s_n суммируется методом P к l $(s_n \to l(P))$, если

$$\lim_{x \to \rho_p} \frac{1}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n = l.$$

Метод суммирования Q определяется аналогично, соответственно с заменой степенного ряда $p(x)$ на степенный ряд $q(x)$, $q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$, $q_n \geqslant 0$, радиуса сходимости ρ_q. Основным результатом работы является теорема: Если а) $p_n = q_n \int_0^1 t^n\, d\chi(t) \geqslant \delta q_n \int_0^1 t^n\, |d\chi(t)|$ начиная с некоторого $n \geqslant N_0$, где $1 \geqslant \delta > 0$ и $\chi(t)$ имеет ограниченную вариацию в $(0,1)$, б) $\rho_p = \rho_q > 0$ и метод P регулярен, то из суммируемости последовательности s_n методом Q к l вытекает ее суммируемость к l методом P, т. е. $P \supseteq Q$.

Из приложений данной теоремы, указанных в работе, приведем следующее. Метод суммирования (A, α), $\alpha \geqslant -1$, определяется как метод суммирования P, соответствующий степенному ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \begin{cases} (1-x)^{-(\alpha+1)}, & \text{если } \alpha > -1, \\ -x \log(1-x), & \text{если } \alpha = -1, \end{cases}$$

$(A, 0)$ — известный метод суммирования Абеля, тогда имеет место следующая теорема включения для метода (A, α): Если $-1 \leqslant \alpha < \alpha'$, то $(A, \alpha) \subset (A, \alpha)'$. И. И. Огиевецкий

6855. **Некоторые приложения функциональных методов Банаха к суммируемости. Парамесваран** (Some applications of Banach functional methods to summability. Parameswaran M. R.), Proc. Indian Acad. Sci., 1957, **A45**, № 6, 377—384 (англ.)

Пусть X и Y — два пространства числовых последовательностей $x = \{x_i\}$ и $y = \{y_i\}$, $A = \{a_{ik}\}$ — некоторая бесконечная матрица чисел, а $\Gamma(X, Y)$ — класс матрицы A, обладающих тем свойством, что если $\{x_i\} \in X$, то последовательность

$$y_i = A_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

принадлежит к Y. Автор рассматривает пространства m, c и c_0 соответственно ограниченных, сходящихся и сходящихся к нулю последовательностей (Банах С., Курс функционального анализа, Радянська школа, 1948). Через $\Gamma(c, \rho c)$ о означается класс матриц A, которые всякую сходящуюся последовательность переводят в последовательность, сходящуюся к пределу $\rho \lim_{i\to\infty} x_i$, а через $R_{(X)}(A)$ — совокупность последовательностей $\{y_i\}$ таких, что $y_i = A_i(x)$, где $\{x_i\} \in X$

Если $A \in \Gamma(c, c)$, $\lim_{i\to\infty} a_{ik} \delta_k$, $\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = \rho$, $\rho - \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \neq 0$, $\{y_i\} \in c$, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i = 0$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{in} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (1)$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{x_i\} \in c$ такая, что

$$|A_i(x) - y_i| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (2)$$

Если $A \in \Gamma(m, m)$, а последовательность $\{y_i\}$ такова, что для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность

$\{x_i\} \in m$, удовлетворяющая условию (2), то какой бы ни была последовательность $\{\alpha_i\}$, для которой имеет место (1), справедливо равенство $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i = 0$.

Если $A \in \Gamma(c, c)$ и соотношения (1) возможны лишь тогда, когда $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, то в тех случаях, когда $\rho - \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \neq 0$, совокупность $R_{(c)}(A)$ всюду плотна в (c). Если $A \in \Gamma(m, m)$ и $R_{(m)}(A)$ всюду плотно в c_0, то соотношения (1) возможны лишь тогда, когда $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Устанавливаются еще некоторые другие предложения того же типа. А. Ф. Тиман

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

6856. Некоторые неравенства, содержащие полиномы Эрмита. Данезе (Some inequalities involving Hermite polynomials. Danese Arthur E.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 5, 344—346 (англ.)

Частично используя известные ранее соотношения

$$\Delta_n(x) = H_n^2(x) - H_{n+1}(x) H_{n-1}(x) > 0,$$

$$\Delta_n'(x) = (n-1)[H_{n-1}(x) H_n(x) - H_{n-2}(x) H_{n+1}(x)],$$

$$\operatorname{sgn} \Delta_n'(x) \operatorname{sgn} x,$$

доказывается ряд аналогичных неравенств, из которых отметим следующие:

$$(n+1) H_n^2(x) - (n-1) H_{n+2}(x) H_{n-2}(x) \geqslant 0, \quad n \geqslant 2;$$

$$\operatorname{sgn}[H_n(x) H_n'(x) - H_{n+1}(x) H_{n-1}'(x)] = \operatorname{sgn} x, \quad n \geqslant 1;$$

$$[H_n'(x)]^2 - H_{n+1}''(x) H_{n-1}(x) \leqslant 0, \quad n \geqslant 1;$$

$$[H_n'(x)]^2 - H_{n+1}(x) H_{n-1}''(x) \geqslant 0, \quad n \geqslant 1);$$

$$n\Delta_n''(x) = [H_n''(x)]^2 - H_n(x) H_n^{(4)}(x) \geqslant 0, \quad n \geqslant 2$$

($H_n(x)$ здесь определяются как $(-1)^n \exp(x^2/2) \times \times [\exp(-x^2/2)]^{(n)}$. Г. К. Энгелис

6857. Некоторые конечные формулы суммирования для классических ортогональных полиномов. Аль-Салам, Карлиц (Some finite summation formulas for the classical orthogonal polynomials. Al-Salam W. A., Carlitz L.), Rend. mat. e applic., 1957, 16, № 1—2, 74—95 (англ.)

Выводится ряд сумматорных формул типа

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{t-1} \left\{ x + (x^2-1)^{1/2} \cos \frac{2\pi r}{t} \right\}^n$$

где $P_n(x)$ — полином Лежандра порядка n, а t — произвольное целое число, бо́льшее чем n. Эта формула аналогична интегралу Лапласа

$$P_n(x) = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \{x + (x^2-1)^{1/2} \cos\varphi\}^n \, d\varphi$$

и переходит в него в пределе при $t \to \infty$.

Для полиномов Эрмита имеет место аналогичная формула

$$H_m(x) H_n(x) = \frac{2^{1/2(m+n)} m!\, n!}{(m+n)!} \frac{1}{t} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{t-1} H_{m+n}\left\{ x\left(1 + \sec\frac{2r\pi}{t}\right)\right\} \times$$

$$\times \cos^{1/2(m+n)} \frac{2r\pi}{t} \cos(m-n)\frac{r\pi}{t},$$

где $t > \max(n, m)$, которой соответствует формула Бейли

$$H_m(x) H_n(x) = \frac{2^{1/2(m+n)} m!\, n!}{(m+n)!} \times$$

$$\times \int_0^{\pi} H_{n+m}\{x(1+\sec\varphi)^{1/2}\} \cos^{1/2(m+n)}\varphi \cos\frac{1}{2}(m-n)\varphi d\varphi.$$

Далее для полиномов Лежандра доказываются более сложные формулы, например:

$$\frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} P_n\left\{xy + (x^2-1)^{1/2}(y^2-1)^{1/2} \cos\left(\varphi + \frac{2k\pi}{t}\right)\right\} \times$$

$$\times \cos r\left(\varphi + \frac{2k\pi}{t}\right) = P_n^r(x) P_n^r(y),$$

$$0 \leqslant r \leqslant n, \quad t < r+n,$$

где $P_n^s(x)$ означает присоединенную функцию Лежандра. Для полиномов Якоби $P_m^{(\alpha,\beta)}(z)$ имеет место формула суммирования

$$\frac{1}{st} \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{t-1} \left(\cos\mu \cos\frac{2j\pi}{s} + i \sin\mu \cos\frac{2k\pi}{t}\right)^{2k} =$$

$$= \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n} P_n(\cos 2\mu) \quad (s, t > 2n),$$

которой соответствует двойной интеграл Бейтмана

$$\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} (\cos\mu \cos\varphi + i \sin\mu \cos\chi)^{2n} \, d\varphi \, d\chi =$$

$$= \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n} P_n(\cos 2\mu)$$

и

$$(x\cos\varphi + y\cos\theta)^n =$$

$$= 2^{-n} \sum_{\substack{0 < u+v < n \\ u+v \equiv n \pmod 2}} \varepsilon_u \varepsilon_v \binom{m}{m+v} x^u y^v (x^2-y^2)^m \times$$

$$\times P_m^{(u,v)}\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right),$$

$$\varepsilon_0 = 1, \ \varepsilon_u = 2 \text{ при } u \geqslant 1$$

с интегральной аналогией

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\chi\cos\varphi + y\cos\theta)^n \cos p\varphi \cos q\theta \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= 2^{-n} \varepsilon_p \varepsilon_q \binom{n}{1/2(n-p+q)} x^p y^q (x^2-y^2)^{\frac{1}{2}(n-p-q)} \times$$

$$\times P^{\left(p,\ q\right.}_{\frac{1}{2}(n-p-\left.\right.} \left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right).$$

Для ортогональных полиномов Лагерра устанавлива-

ются формулы

$$L_{n+m}(x^2)=(-1)^{m+n}\frac{m!n!}{(2m)!\,(2n)!}\frac{1}{2}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{t-1}H_{2m}\left(x\sin\frac{\pi k}{t}\right)H_{2n}\left(x\cos\frac{k\pi}{t}\right),$$

$$L_n^{(\alpha)}(x^2)=(-1)^n\frac{(n+\alpha)!\sqrt{n}}{(2n)!\,\Gamma(\alpha+1/2)}\frac{1}{t}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{t-1}\sin^{2\alpha}\frac{k\pi}{t}H_{2n}\left(x\cos\frac{k\pi}{t}\right),$$

из которых первая аналогична формуле Фельдхейма, а вторая формуле Успенского

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(-1)^n\Gamma(n+\alpha+1)}{(2n)!\,\Gamma(\alpha+1/2)\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^{\alpha-1/2}\times$$

$$\times H_{2n}(\sqrt{x}t)\,dt,\ \alpha>-1/2. \qquad (1)$$

Кроме ортогональных полиномов, устанавливаются аналогичные соотношения и для целых трансцендентных функций. Так, например, для функций Бесселя устанавливается формула суммирования

$$\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t-1}J_{m+n}\left\{2z\cos\left(\varphi+\frac{k\pi}{t}\right)\right\}\cos(m-n)\left(\varphi+\frac{k\pi}{t}\right)=$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}J_{m+kt}(z)\,J_{n-kt}(z)\cos 2kt\varphi,$$

служащая конечным аналогом интегральной формулы

$$J_m(z)\,J_n(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}J_{m+n}(2z\cos\varphi)\cos(m-n)\varphi\,d\varphi.$$

Примечание референта. Формула (1), часто приписываемая Успенскому, была ранее доказана референтом. (Messenger math., 1926, 4, № 10) Н. С. Кошляков

6858. **q-аналог формулы Тоскано. Аль-Салам, Карлиц** (A q-analog of a formula of Toscano. Al-Salam W. A., Carlitz L.), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 3, 414—417 (англ.; рез. итал.)

Авторы рассматривают многочлены

$$H_n(x;q)=\sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}x^r,\quad\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots(1-q^{n-r+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^r)},\quad\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}=1, \qquad (1)$$

и показывают, что для них справедлива формула

$$\sum_{r=-m}^{m}(-1)^r\begin{bmatrix}2m\\m-r\end{bmatrix}q^{1/2\,r(r+1)}H_{n+r}(x;q)\,H_{n-r}(x;q)=$$

$$=\frac{(q)_{2m}(q)_{n-m}}{(q)_m}\sum_{k=m}^{n}\begin{bmatrix}k-1\\m-1\end{bmatrix}q^{(n-k)m}x^k\frac{H_{n-k}^2(x;q)}{(q)_{n-k}},$$

$1\leqslant m\leqslant n$, $(q)_m=(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)$, $(q)_0=1$,

аналогичная формуле Тоскано

$$\sum_{r=-m}^{m}(-1)^r\binom{2m}{m-r}H_{n+r}(x)\,H_{n-r}(x)=$$

$$=\frac{(2m)!\,(n-m)!}{m!}\sum_{k=m}^{n}\frac{H_{n-k}^2(x)}{(n-k)!}$$

$$1\leqslant m\leqslant n,$$

для многочленов Эрмита $H_n(x)$.

Примечание референта. Авторы не упоминают о том, что многочлены (1) являются частным случаем многочленов, рассмотренных Бейтманом (Bateman H., Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 1934, 20, 63—66).

Я. Л. Геронимус

6859 Д. **Исследование по теории обобщений гамма-функций. Римский-Корсаков Б. С.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1957

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

6860. **О некоторых классах непрерывных функций, порождающих эрмитово-положительные ядра. Ахиезер Н. И., Глазман И. М.,** Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1957, 80, Зап. Матем. отд. физ.-матем. фак. и Харьковск. матем. о-ва, 25, 205—217

В статье ясно и последовательно излагаются основные теоремы об эрмитово-положительных функциях (э. п. ф.) в интервале $(-a, a)$ (т. е. таких, что матрица $\|f(x_i-x_k)\|$ положительно определенна при любых $x_i\in(-a,a)$). Для класса P_a всех э. п. ф. на $(-a,a)$ устанавливаются теорема М. Г. Крейна о возможности продолжения всякой функции из P_a до функции из P_∞ и теорема Бохнера о представлении функции из P_∞ в виде $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}d\sigma(\lambda)$ ($\sigma(\lambda)$ — монотонна и ограничена). Рассматривается, далее, класс P_a^* всех «безгранично делимых» э. п. ф. (т. е. таких, что $f=(f_n)^n$ при любом n и $f_n\in P_a$). Доказывается теорема М. Г. Крейна:

Для того чтобы $f\in P_a^*$, необходимо и достаточно, чтобы $f=e^g$, где g характеризуется следующим внутренним свойством: матрица $\|g(x_i-x_k)-g(x_i)-g(-x_k)\|$ положительно определенна при всех x_i из $(-a,a)$.

Наконец, для совокупности G_∞ всех функций g при $a=\infty$ доказывается теорема П. Леви об интегральном представлении $g(x)=i\gamma x+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\lambda x}-1-\frac{i\lambda x}{1+\lambda^2}\right)\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2}$ $\left(\sigma(\lambda)\text{ не убывает и }\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{1+\lambda^2}<\infty\right)$. Попутно получаются теоремы о продолжении на всю прямую для функций из P_a^* и G_a.

Э. Э. Шноль

6861. **Некоторые применения обобщенных функций и их преобразований Фурье. Малаховская Р. М.** Докл. 7-й Научн. конференции, посвящ. 40-летию Великой Октябрьск. соц. революции. Вып. 2. Томск, Томский ун-т, 1957, 13—14

6862. **Преобразование Лапласа и его приложения к дифференциальным уравнениям. (1). Такэути**

(Takeuchi J.), Ом Дэнки дзасси, Ohm. Electr. Mag., 1957, 44, № 7, 807—813 (японск.)

6863. **Поправка.** Ом Дэнки дзасси, Ohm. Electr. Mag., 1957, 44, № 9, 973—974 (японск.)

Поправка к статье Такэути, реф. 6862.

6864. **Преобразование Лапласа и его приложения к дифференциальным уравнениям. (2). Такэути** (Takeuchi J.), Ом Дэнки дзасси, Ohm. Electr. Mag., 1957, 44, № 9, 969—973 (японск.)

6865. **Преобразование Лапласа и его приложения к дифференциальным уравнениям. (3). Такэути** (Takeuchi J.), Ом Дэнки дзасси, Ohm. Electr. Mag., 1957, 44, № 10, 1163—1166 (японск.)

6866. **Пребразование Лапласа и его приложения к дифференциальным уравнениям. (4). Такэути** (Takeuchi J.), Ом Дэнки дзасси, Ohm Electr. Mag., 1957, 44, № 11, 1303—1308 (японск.)

Элементарное изложение применения операционного исчисления к дифференциальным уравнениям.

В. В. Немыцкий

6867. **Преобразование Лапласа и его приложения к теории функций комплексной переменной (1). Такэути** (Takeuchi T.), Ом Дэнки дзасси, Ohm. Electr. Mag., 1957, 44, № 14, 1649—1652 (японск.)

6868. **Суммирование интегралов Лапласа-Стилтьеса вне их полуплоскости сходимости посредством введения коэффициентов сходимости. Хенсток** (The summation by convergence factors of Laplace-Stieltjes integrals outside their half plane of convergence. Henstock R.), Math. Z., 1957, 67, № 1, 10—31 (англ.)

Исходя из ранее полученных автором результатов теории обобщенных пределов, интеграл Лапласа—Стилтьеса определяется с помощью следующего соотношения

$$F(z) \equiv \lim_{w\to\infty} F(z, w),$$

$$F(z, w) \equiv (IP)\int_0^w e^{-zu}\, ds(u) =$$

$$= e^{-zw} s(w) - s(0) + (L)\int_0^w z e^{-zu} s(u)\, du, \qquad (1)$$

где $(IP)\int_\alpha^\beta f(w)\, ds(w) \equiv f(\beta) s(\beta) - f(\alpha) s(\alpha) -$ $-(PS)\int_\alpha^\beta s(w)\, df(w)$, L обозначает интеграл Лебега, PS — интеграл Перрона — Стилтьеса по определению Варда, $s(w)$ — функция Бера, ограниченная в любом конечном интервале $w \geqslant 0$. Суммирование интегралов (1) производится с помощью выражения

$$B(F; z, x) \equiv (IP)\int_0^\infty a(x, w)\, d_w F(z, w), \qquad (2)$$

где коэффициент сходимости $a(x, w)$ — функция Бера, удовлетворяющая неравенству

$$\liminf_{u\to w} a(x, u) \leqslant a(x, w) \leqslant \limsup_{u\to w} a(x, u).$$

В ряде последующих теорем автор устанавливает необходимые и достаточные условия сходимости интеграла (2).

А. П. Прудников

6869. **Обобщенные операторы Лапласа и потенциалы. Вальтер** (Verallgemeinerte Laplace-Operatoren und Potentiale. Walter Wolfgang), Math. Z., 1957, 67, № 1, 38—48 (франц.)

Пусть G — область n-мерного пространства E_n $(n \geqslant 2)$ и $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — определенная в G действительная функция. Обобщенные операторы Лапласа вводятся посредством соотношения

$$\Delta_*^p u(x) = \lim_{R\to 0} \frac{M(R, x, u, g) - u(x)}{A a_{np} R^{2p}},$$

где

$$M(R, x, u, g) = \frac{1}{\Omega R^n} \int_{|y-x|<R} u(y)\, g(|y-x|/R)\, dy,$$

R — радиус шара, лежащего в G, $g(t)$ — некоторая весовая функция, $n\Omega = \omega$, $\omega = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$. Предполагается, что общая масса $\mu(E_n)$ конечна и существует ограниченное множество G, для которого $\mu(E_n - G) = 0$. Обобщенный «p-потенциал» $(p \geqslant 1)$ положительного распределения массы μ определяется интегралом

$$F(x) = \int_{E_n} \gamma_p(y - x)\, d\mu(y).$$

Основным результатом статьи является доказательство справедливости равенства

$$\Delta_*^p F(x) = -\omega D\mu(x)$$

для почти всех x, в которых существует плотность $D\mu(x)$.

А. П. Прудников

6870. **Достаточные условия для законности гипотезы Римана. Фёлькер** (Sufficient condition for the validity of the Riemann hypothesis. Voelker Dietrich. Univ. Nac. Tucuman. Rev., 1954 (1955), **A10**, 141—149) (исп.; рез. нем.)

Автор переводит гипотезу Римана в эквивалентное условие, касающееся абсциссы сходимости некоторых особых преобразований Лапласа.

R. Bellman

Перевод из Math. Revs. 1956, **17**, № 6, 588

6871. **Обращение преобразования Гаусса. Руни** (On the inversion of the Gauss transformation. Rooney P. G.), Ganad. J. Math., 1957, 9, № 3, 459—464 (англ.)

Преобразование Гаусса имеет вид

$$f(x) = G(\varphi(x)) = (4\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}(x-t)^2} \varphi(t)\, dt.$$

Формула обращения ищется в виде

$$\exp(-D^2) f(x) = \varphi(x),$$

где $\exp(-D^2) f(x)$ определяется как

$$e^{-D^2} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f^{(2n)}(x)/n! \qquad (1)$$

Относительно сходимости последнего ряда доказываются следующие предложения:

1. Если а) $\varphi \in L(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, и $|t|^\lambda e^{-(x_n - t)^{2/3}} \varphi(t) \in L(-\infty, \infty)$ для некоторого $\lambda > 3$; б) φ — ограниченной вариации в некоторой окрестности x_0, тогда $G(\varphi(x))$ существует для всех x и ряд (1) сходится при $x = x_0$ к $1/2\{\varphi(x_0+) + \varphi(x_0-)\}$.

2. Если $e^{-(x_0-t)^{2/3}} \varphi(t) \in L(-\infty, \infty)$, $\varphi(x_0+)$ и $\varphi(x_0-)$ существуют, то $G(\varphi(x))$ существует для всех x, ряд (1) A-суммируем при $x = x_0$ к $1/2\{\varphi(x_0+) + \varphi(x_0-)\}$.

На основании этих теорем получается ряд соотношений для полиномов Эрмита.

Л. Я. Цлаф

6872. Некоторые рекуррентные соотношения для обобщенных преобразований Ханкеля. I. Кумар (Some recurrence relations of the generalised Hankel-transform. 1. Kumar Ram), Ganita, 1954, 5, № 2, 193—202 (англ.)

Рассматривается функция

$$\Psi_{\lambda,\mu,\nu}=\int_0^\infty (xy)^\nu J_\nu^\mu(xy)\, g(y)\, dy,$$

где

$$J_\lambda^\mu(x)=\sum_{r=0}^\infty \frac{(-x)^r}{r!\,\Gamma(1+\lambda+\mu r)},\quad \mu>0.$$

Устанавливаются следующие рекуррентные соотношения:

$$\Psi_{\lambda,\mu,\nu}=\frac{1}{\lambda}\Psi_{\lambda-1,\mu,\nu}+\frac{\mu}{\lambda}\Psi_{\lambda+\mu,\mu,\nu+1},$$

$$x\frac{d}{dx}\Psi_{\lambda,\mu,\nu}=\nu\Psi_{\lambda,\mu,\nu}-\Psi_{\lambda+\mu,\mu,\nu+1},$$

$$(-1)^n x^{\nu+n}\frac{d^n}{dx^n}(x^{-\nu}\Psi_{\lambda,\mu,\nu})=\Psi_{\lambda+n\mu,\mu,\nu+n}$$

$$(n=0,1,2,\ldots),$$

$$x^n\frac{d^n}{dx^n}\Psi_{\lambda,\mu,\nu}=$$

$$=\sum_{r=0}^n (-1)^r C_n^r\left\{\prod_{m=0}^{n-r-1}(\nu-m)\right\}\Psi_{\lambda+r\mu,\mu,\nu+n}\ (n=0,1,2,\ldots)$$

Указываются приложения этих соотношений к специальным функциям. П. И. Кузнецов

6873. Некоторые рекуррентные соотношения для обобщенных преобразований Ханкеля. II. Кумар (Some recurrence relations of the generalised Hankel transform. II. Kumar Ram), Ganita, 1955, 6, № 1-2, 39—53 (англ.)

Автор к ранее полученным соотношениям (реф. 6872) присоединяет еще следующие:

$$(-1)^p\sum_{n=0}^p C_n^p\prod_{l=0}^{p-n-1}(\nu-l)\sum_{r=0}^n(-1)^r C_r^n\times$$

$$\times\prod_{m=0}^{n-r-1}(\nu-m)\,\Psi_{\lambda+r\mu,\mu,\nu+r}=\Psi_{\lambda+\mu p,\mu,\nu+p}$$

$$(p>0 \text{ и целое}),$$

$$\left(\frac{d}{dx^{1/\mu}}\right)^m[x^{\lambda/\mu-\nu}\Psi_{\lambda,\mu,\nu}]=x^{(\lambda-m)/\mu-\nu}\Psi_{\lambda-m,\mu,\nu}$$

$$(m>0 \text{ и целое}),$$

$$(-1)^n x^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\Psi_{\lambda,\mu,\lambda/\mu}=$$

$$=\sum_{r=0}^n(-1)^r\frac{1}{\mu^{r+1}}{}^nSP_{n-r}\Psi_{\lambda-r-1,\mu,\lambda/\mu},$$

где ${}^nSP_r$ — сумма произведений r чисел, взятых из n первых натуральных чисел, причем ${}^nSP_0=1$.

Выведенные соотношения применяются к вычислению несобственных интегралов от специальных функций. П. И. Кузнецов

6874. О преобразовании Мейера. IV. Джайсвал (On Meijer transform. IV. Jaiswal J. P.), Ganita, 1956, 6, № 1—2, 75—91 (англ.)

Часть III см. РЖМат, 1958, 2166.

Доказываются для преобразования Мейера следующие теоремы:

Теорема 1. Если

$$t^n f(t)\,\frac{n+\alpha/2+1/2}{\alpha/2}\to\varphi_n(s)$$

и

$$\psi_r(s)\doteqdot t^r f(t),$$

тогда

$$\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n(su)^n}{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}\varphi_n(s)=$$

$$=e^u\sum_{n-0}^\infty\frac{(-1)^r(su)^r}{r!\,\Gamma(\alpha+r+1)}\psi_r(s),\qquad(1)$$

при условиях: $\mathrm{Re}(\mu_1)>-1$, $f(t)=O(t^{\mu_1})$ для малых t; 2) $e^{-s_0t}t^{-\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{s_0tu})\,f(t)\to 0$ при $t\to\infty$ для $\mathrm{Re}(s)\geqslant s_0>0$; 3) $f(t)$ непрерывна для $t\geqslant 0$; 4) преобразование Лапласа от $|f(t)|$ существует; 5) ряды в (1) сходятся.

Теорема 2. Если

$$t^{-r}f(t)\,\frac{n-r+\beta/2+1/2}{\beta/2}\to\varphi_r(s)\ (n>0 \text{ и целое}),$$

$$f(t)\,\frac{n+\alpha/2+1/2}{\alpha/2}\to\varphi(s),$$

тогда

$$\varphi(s)=\frac{n!}{\Gamma(\alpha-\beta)}\sum_{r=0}^n\frac{(-1)^r\Gamma(\alpha-\beta+r)}{r!\,(n-r)!\,s^r}\varphi_r(s)$$

при условиях: 1) $\mathrm{Re}(\mu_1-n+1)>0$, $f(t)=O(t^{\mu_1})$ для малых t, 2) $e^{-s_0t}t^{-n}L_{n-r}^\beta(s_0t)\,f(t)$ ограничено для $\mathrm{Re}(s)\geqslant s_0>0$ и $t\geqslant 0$.

Теорема 6. Если

$$t^{-\lambda}f(t)\,\frac{n+\alpha/2+1/2}{\alpha/2}\to\varphi_{n,\alpha,\lambda}(s),$$

тогда

$$\varphi_{n,\alpha,\lambda}(s)=\varphi_{n,\alpha-1,\lambda}(s)-\frac{n}{s}\varphi_{n-1,\alpha,\lambda+1}(s)$$

и

$$\varphi_{n,\alpha,\lambda}(s)=\varphi_{n-1,\alpha,\lambda}(s)-\frac{2n+\alpha-1}{s}\varphi_{n-1,\alpha,\lambda+1}(s)-$$

$$-\frac{(n+\alpha-1)(n-1)}{s^2}\varphi_{n-2,\alpha,\lambda+2}(s).$$

Теорема 7. Если $\psi_{n,\alpha,\lambda}(s)$ есть $L_n'^{\alpha}$-преобразование функции $t^{-\lambda}f(t)$, т. е.

$$\psi_{n,\alpha,\lambda}(s)=(-1)^n n!\,s\int_0^\infty e^{-st}(st)^{-n}L_n'^{\alpha}(st)\,t^{-\lambda}f(t)\,dt,$$

где

$$L_n'^{\alpha}(x)=d/\partial x\,[L_n^\alpha(x)]$$

и

$$t^{-\lambda}f(t)\,\frac{n+\alpha/2+1/2}{\alpha/2}\to\varphi_{n,\alpha,\lambda}(s),$$

тогда

$$\psi'_{n,\alpha,\lambda}(s) = \frac{n}{s}\varphi_{n-1,\alpha+1,\lambda+1}(s)$$

в предположении, что используемые при доказательстве интегралы сходящиеся. Устанавливаются еще несколько теорем аналогичного содержания. Эти теоремы иллюстрированы соответствующими примерами из теории специальных функций. См. также РЖМат, 1956, 6670.

П. И. Кузнецов

6875. **Одна композиционная теорема относительно общих унитарных преобразований. Фокс** (A composition theorem for general unitary transforms. Fox Charles), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 880—883 (англ.)

Общие унитарные преобразования определяются соотношениями

$$\int_0^\infty (k(a, y))^* f(y)\, dy = \int_0^\infty g(x)\, dx,$$

$$\int_0^\infty (l(a, y))^* g(y)\, dy = \int_0^\infty f(x)\, dx.$$

Здесь $(k(a, y))^*$ обозначает выражение комплексно сопряженное $k(a, y)$; $k(a, x)$ и $l(a, x)$ называются парой унитарных ядер. Доказывается теорема: Пусть $k(a, x)$, $l(a, x)$ — пара унитарных ядер, $p(a, x)$ и $q(a, x)$ — другая пара унитарных ядер, тогда функции $m(a, x)$ и $n(a, x)$

$$m(a, x) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty (k(x, y))^* p(a, y)\, dy,$$

$$n(a, x) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty k(a, y)\,(p(x, y))^*\, dy.$$

также являются парой унитарных ядер.

Таким образом, дается способ построения унитарных ядер, когда известны две такие пары ядер. Л. Я. Цлаф

6876. **Об операционном исчислении двух переменных. Чакраварти** (On symbolic calculus of two variables. Chakravarty N. K.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1955, 47, № 4, 239—247 (англ.)

Двойное преобразование Лапласа — Карсона

$$f(p, q) = pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy} h(x, y)\, dx\, dy,$$

$$\mathrm{Re}\,(p) > 0,\ \mathrm{Re}\,(q) > 0,$$

символически записывается в виде $f(p, q) \subset\subset h(x, y)$, подобно тому как обыкновенное преобразование Лапласа — Карсона

$$f(p) = p\int_0^\infty e^{-px} h(x)\, dx,\ \mathrm{Re}\,(p) > 0,$$

записывается символически в виде $f(p) \subset h(x)$.

Доказываются теоремы:

Теорема 1. Если $f(p) \subset h(x)$ и $p^{-m} h(p) \subset g(x)$, тогда $x^m g(y/x) \supset\supset q^{-m} f(p/q)$, $\mathrm{Re}\,(m) > -2$.

Теорема 2. Если $f(p) \subset h(x)$, $p^{1-s} h(1/p) \subset g(x)$, $p^{1-s} g(p) \subset \varphi(x)$ и $x^{s-1}\varphi(1/x) \supset H(p)$, тогда $(x/y)^{s-1} \times H(x/y) \supset\supset f(q/p)$. Здесь $g(x)$ ограничена и абсолютно интегрируема на $(0, \infty)$; $s > \delta > 0$.

Теорема 3. Если $H(p) \subset x^{\mu-1}\psi(x)$, $\psi(p) \subset x^{2\lambda-1} f(x)$, $f(p) \subset \varphi(x)$ и $x^{2\lambda-1}\varphi(1/x) \supset h(p)$, тогда $x^{\mu-1} y^{2\lambda-1} h(xy) \supset\supset \supset\supset q^{\mu-2\lambda} H(pq)$. Здесь $f(t)$ ограничена и абсолютно интегрируема на $(0, \infty)$; $0 < \lambda < -5/4$; $\mu + 1 > 2\lambda$. Эти теоремы иллюстрированы соответствующими примерами из теории специальных функций. П. И. Кузнецов

6877 К. **Операционное исчисление, основанное на двустороннем интеграле Лапласа. Ван-дер-Поль, Бреммер** (Operational calculus based on the two-sided Laplace integral. Van der Pol Balth, Bremmer H., Cambridge, Univ. Press, 1955, xiii, 415 pp., 11.00 doll.) (англ.)

Хотя и были сделаны незначительные изменения и исправления, это издание по существу является таким же, как первое.

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 4, 363

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

6878. **Непрерывные дроби для периодической ренты. Фрейм** (A continued fraction for periodic rent, logarithms, and roots. Frame J. S.), Pi Mu Epsilon J., 1956, 2, № 4, 176—183 (англ.)

6879. **О некоторой электрической цепи, пропускающей все частоты. Переходная характеристика в виде конечной суммы функций Лагерра. Вильсон** (An all-pass network. Transient response in terms of a finite series of Laguerre functions. Wilson W. Proctor), Electronic and Radio Engr, 1957, 34, № 10, 391—394 (англ.)

Рассматривается цепь, пропускающая все частоты, передаточная функция которой имеет вид

$$(-1)^n \left[\frac{p-\gamma}{p+\gamma}\right]^n.$$

Ищется класс входных функций, для которых выходные функции принадлежат к тому же классу функций: это так называемые функции «предпочтительного возбуждения».

В качестве таковых предлагаются функции Лагерра $(-1)^r e^{-\gamma t} L_r(2\gamma t)$, где $L_r(t)$ — полином Лаггера. Изображение по Карсону — Хевисайду этих функций такое:

$$f_r(p) = (-1)^r \frac{p}{p+\gamma}\left[\frac{p-\gamma}{p+\gamma}\right]^r \doteqdot (1)^r e^{-\gamma t} L_r(2\gamma t).$$

Отсюда следует, что изображением выходной функции является $f_{r+n}(p)$, т. е. выходная функция получается из входной функции заменой $(-1)^r L_r(2\gamma t)$ на $(-1)^{r+n} L_{r+n}(2\gamma t)$ и, следовательно, выходная функция тоже является функцией Лагерра. (Попутно указывается, что для классического фильтра низких частот функциями «предпочтительного возбуждения» являются бесселевы функции).

Далее ищутся выходные функции, соответствующие входным функциям $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$. Для этой цели рассматривается разложение в ряд по функциям Лагерра

$$\cos \omega t = 2\left[1 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right]^{-1/2} e^{-\gamma t} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s T_{2s+1}\left\{\left[1 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right]^{-1/2}\right\} L_s(2\gamma t) \qquad (1)$$

и аналогичное для $\sin \omega t$ ($T_r(x)$ обозначает полином Чебышева). Заменяя в выражении (1) $(-1)^s L_s(2\gamma t)$ на $(-1)^{s+n} L_{s+n}(2\gamma t)$, автор получает разложение соответствующей выходной функции в ряд по функциям Лагерра.

Затем оказывается, что в полученном разложении сумма членов ряда, начиная с номера n, выражает установившийся выходной процесс в цепи, существующий при входной функции $\cos \omega t$. Следовательно, сумма конечного числа членов ряда, номера которых не достигают n, выражает переходную составляющую выходного процесса в цепи при входной функции $\cos \omega t$.

Подставляя сюда $\omega = 0$, получается переходная составляющая выходного процесса при входной единичной функции, что автор называет переходной характеристикой системы (transient response). Эта характеристика системы, таким образом, оказывается представленной в виде конечной суммы функций Лагерра.

Н. А. Бразма

6880. **К синтезу трехполюсников, содержащих элементы R и C. Адамс** (On the synthesis of 3-terminal RC networks. Adams K. M. Rept. Coll. Aeronaut. Cranfield, 1956, № 96, 43 pp., ill.) (англ.)

Рассматривается синтез трехполюсников, содержащих элементы R и C, по заданным передаточной функции и входным и выходным сопротивлениям.

Из уравнений ветвей и закона Кирхгофа для токов следует:

$$I = PV, \qquad (1)$$

где I и V — колонные матрицы, элементами которых являются изображения по Карсону — Хевисайду токов, соответственно напряжений узлов, а P — квадратная матрица, элементы которой выражаются так:

$$P_{\alpha\beta} = -(\lambda C_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta})$$

$$P_{\alpha\alpha} = \sum_{\substack{\beta=0 \\ \beta\neq\alpha}}^{n} (\lambda C_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta}), \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, n; \\ \beta = 0, 1, \ldots, n; \ \alpha \neq \beta \end{pmatrix},$$

где λ — независимая переменная, введенная интегральным преобразованием. Рассматривается условие положительной определенности матрицы P при $\lambda > 0$ (Аналогичный вопрос положительной определенности изучался референтом: Бразма Н. А., Мышкис А. Д., Прикл. матем. и механ., 1951, **15**, № 4, 495—500). При указанном условии из уравнения (1) следует матричное уравнение трехполюсника как частного случая четырехполюсника.

$$\begin{bmatrix} V_n \\ V_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ I_{n-1} \end{bmatrix} \quad (Z_{12} = Z_{21}),$$

где $n-1$ и n означают номера выходного, соответственно входного, узлов.

Основная задача заключается в синтезе трехполюсника по заданным функциям Z_{11}, Z_{12} и Z_{22}.

Матрица P при $\lambda > 0$ является частным случаем так называемой R-матрицы, определяемой следующими условиями. Пусть A_{ij} обозначает общий элемент квадратной матрицы A порядка n; для R-матрицы должно быть $A_{ij} = A_{ji} \leqslant 0$ $(i \neq j)$, $A_{ii} \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \geqslant 0$.

Основное значение в статье имеет теорема о том, что R-матрица A в результате преобразования вида $K_1' A K_1 = Q$ приводит к новой R-матрице Q, где K_1 означает некоторую квадратную матрицу частного вида. При этом у матрицы Q все элементы первой строки и первого столбца оказываются равными нулю, кроме элемента, стоящего в левом верхнем углу. Далее рассматриваются кратное преобразование вида $K_{k-1}' K_{k-2}' \ldots K_1' A K_1 \ldots K_{k-1}$, в результате которого все элементы первых $k-1$ строк и первых $k-1$ столбцов оказываются равными нулю, кроме элементов главной диагонали, а также и обратное преобразование.

Задача синтеза трехполюсника решается посредством кратного обратного преобразования вышеуказанного вида, примененного к матрице

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

с данными элементами, в результате чего получается матрица P, непосредственно осуществимая в виде цепи.

Выводятся условия разрешимости задачи, накладываемые на функции Z_{11}, Z_{12} и Z_{22}. Решение же задачи оказывается неоднозначным.

Введению новой независимой переменной λ' вместо λ, посредством подходящей подстановки, соответствует переход от данной цепи к новой более сложной. В простейших случаях в результате подстановок $\lambda' = 1/\lambda$ и $\lambda' = \lambda^2$ получаются цепи, содержащие лишь элементы R и L соответственно C и L.

Приводятся численные примеры. В введении указывается значение синтеза цепей, содержащих R и C, для теории сервомеханизмов. Библ. 8 назв. Н. А. Бразма

6881. **Изучение стационарных последовательностей (séries no tempo) и их применение к определению результата действия линейных систем передач. Абреу-Фару** (Estudo das «séries no tempo» e sua aplicação á determinação da resposta de sistemas lineares de transmissão. Abreu Faro Manuel José de), Técnica, 1957, **32**, № 275, 5—21 (порт.)

6882. **Изучение стационарных последовательностей (séries no tempo) и их применение к определению результата действия линейных систем передач. Абреу-Фару** (Estudo das «séries no tempo» e sua aplicação a determinação da resposta de sistemas lineares de transmissão. Abreu Faro Manuel José de), Técnica, 1957, **32**, № 276, 75—89 (порт.)

Первую часть см. реф. 6881.

6883. **Заметка о некоторых интегралах, встречающихся в аэродинамике. Вильямс** (A note on some integrals in aerodynamics. Williams D. E. Aeronaut. Res. Council Current Papers, 1957, № 364, 10 pp.) (англ.)

6884. **Аппроксимация давлений в толстостенных цилиндрах непрерывными дробями. Роч** (Approximate stresses in thick-walled cylinders by continued fractions. Roach Arvid E.), Industr. Math., 1955, **6**, 53—56 (англ.)

6885. **Решение задач плоской теории упругости с помощью специальных функций. Народецкий М. З.**, Докл. АН СССР, 1957, **114**, № 4, 729—732

См. РЖМех, 1958, 7849

6886. **О перемещении массы в волне Герстнера. Гуйон** (Sur le transport de masse dans l'onde de Gerstner. Gouyon René), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 25, 2181—2184 (франц.)

6887. **О доказательстве соотношений неопределенностей Гейзенберга. Гомиди, Брага-Регу** (On Heisenberg's proof of the uncertainty relations. Gomide F. M., Braga Rego G.), Anais Acad. brasil. cienc., 1956, **28**, № 2, 179—181 (англ.)

Приведен вывод соотношения неопределенностей в квантовой механике (так называемых соотношений Гейзенберга):

$$\Delta q \Delta p \geqslant h/4\pi, \qquad (1)$$

Δq — разброс в координате частицы,
Δp — разброс в импульсе частицы;

$$(\Delta q)^2 = \int (x - x_0)^2 \, |\psi(x)|^2 \, dx,$$

$$(\Delta p)^2 = \int (p - p_0)^2 / |\widetilde{\psi}(p)| \, dp,$$

где $\psi(x)$ — волновая функция частицы, $\widetilde{\psi}(p)$ — ее преобразование Фурье, x_0 и p_0 — средние значения координаты и импульса. Соотношение (1) выводится в работе стандартным способом, изложенным в разных книгах по квантовой механике. Р. А. Минлос

См. также: 6613, 6748, 6750, 6766 К, 6784, 7066

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

6888. **Линейные подпространства отделимого линейного топологического пространства. Депри** (Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel topologique séparé. Deprit André), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, 43, № 3, 106—113 (франц.)

Рассматривается разложение линейных топологических пространств в прямую топологическую сумму подпространств. Основной результат: Пусть в локально выпуклом линейном топологическом пространстве E дано семейство линейных подпространств M_j $(0 \leqslant j \leqslant m+1)$, удовлетворяющих условиям: а) $M_0 = \{0\}$, $M_{m+1} = E$, б) $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \ldots \subsetneq M_m \subsetneq M_{m+1}$, в) для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant m$, M_j конечномерно.

Пусть далее L_k $(0 \leqslant k \leqslant n+1)$ — другое семейство линейных подпространств, удовлетворяющих условиям: а) $L_0 = E$, $L_{n+1} = \{0\}$, б) $L_0 \supsetneq L_1 \supsetneq \ldots \supsetneq L_n \supsetneq L_{n+1}$, в) для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, L_k допускает топологическое дополнение в E (т. е. E может быть представлено в виде прямой топологической суммы линейных подпространств L_k и N_k).

При этих условиях существует $(m+1)(n+1)$ линейных подпространств L_k^j $(1 \leqslant j \leqslant m+1, 0 \leqslant k \leqslant n)$, удовлетворяющих следующим условиям: а) L_k^j $(1 \leqslant j \leqslant m+1, 0 \leqslant k \leqslant n)$ конечномерны, б) L_k^j $(1 \leqslant j \leqslant m+1, 0 \leqslant k \leqslant n)$ линейно независимы, в) $M_j = L_0^j \dotplus L_1^j \dotplus \ldots \dotplus L_n^j \dotplus M_{j-1}$ $(1 \leqslant j \leqslant m+1)$, г) $L_k = L_k^1 \dotplus L_k^2 \dotplus \ldots \dotplus L_k^{m+1} \dotplus L_{k+1}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Теорема остается справедливой, если вместо семейства возрастающих подпространств конечной размерности и семейства убывающих подпространств, допускающих топологическое дополнение, рассмотреть семейство возрастающих подпространств, допускающих топологическое дополнение, и семейство убывающих подпространств конечной дополнительной размерности (т. е. таких, что E/L_k конечномерно). В. И. Соболев

6889. **О пространствах типа *(S)* и *(DS)*. Словиковский** (On (S) and (DS)-spaces. Słowikowski W.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 6, 599—600 (англ.; рез. русск.)

Локально выпуклое пространство X называется (S)-пространством, если для каждой выпуклой окрестности нуля V найдется другая окрестность нуля V_1, вполне ограниченная относительно окрестности λV при любом $\lambda > 0$. Говорят, что пространство X типа (DS), если каждое ограниченное множество B в X есть непрерывный линейный образ условно предкомпактного множества банахова пространства. Формулируются четыре теоремы. В частности

Теорема 3. а) Если X — борнологическое или бочечное (S)-пространство, то сильная топология в дуальном пространстве X' эквивалентна сильнейшей топологии, и X' в этой топологии есть (DS)-пространство; б) сильное дуальное к (DS)-пространству есть (S)-пространство; в) сильное дуальное пространство к метризуемому монтелевскому пространству имеет сильнейшую топологию.

Примечание референта. Под «сильнейшей» топологией в дуальном пространстве X' автор, по-видимому, понимает сильнейшую среди таких выпуклых топологий, что каждое эквинепрерывное множество в X' ограничено, т. е. борнологическую топологию, порожденную системой всех эквинепрерывных множеств. Г. П. Акилов

6890. **Теорема о замкнутом графике. Робертсон, Робертсон** (On the closed graph theorem. Robertson Alex P., Robertson Wendy), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1956, 3, № 1, 9—12 (англ.)

Рассматривается расширение теоремы о замкнутом графике на некоторые классы топологических векторных пространств. Пусть E — отделимое хаусдорфово локально выпуклое пространство, E' — сопряженное с ним пространство, наделенное слабой топологией. Пространство E называется совершенно полным, если векторное подпространство M' пространства E' замкнуто всякий раз, когда $M' \cap U^\circ$ замкнуто для любой окрестности U начала в E. Всякое совершенно полное пространство полно. Доказываются следующие теоремы.

1. Пусть t — линейное отображение бочечного пространства (barrelled space) в совершенно полное пространство F, причем график отображения t замкнут в $E \times F$. Тогда t непрерывно.

2. Пусть E — индуктивный предел выпуклых бэровских пространств, а F — отделимый индуктивный предел последовательности совершенно полных пространств. Если линейное отображение t пространства E и F имеет замкнутый график в $E \times F$, то t непрерывно.

3. Предположим, что E и F — отделимые пространства и что выполнено одно из следующих двух условий: а) E совершенно полно и F бочечно; б) E — индуктивный предел последовательности совершенно полных пространств и F — индуктивный предел выпуклых бэровских пространств. Тогда всякое непрерывное линейное отображение E в F открыто.

Как следствие последней теоремы отмечается, что совершенно полное пространство E (а также индуктивный предел совершенно полных пространств) обладает, подобно полному метрическому пространству, тем свойством, что если t — непрерывное линейное отображение E в какое-нибудь отделимое локально выпуклое пространство F, то либо $t(E)$ первой категории в F, либо $t(E) = F$. С. Н. Крачковский

6891. **Локально ограниченные топологические линейные пространства. Ли Юн-хуа** (Lee Yung-hwa), Дунбэй женьминь дасюэ цзыжань-кэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., 1957, № 1, 141—151 (кит.; рез. англ.)

Доказывается, что сопряженное пространство к локально ограниченному топологическому линейному пространству можно рассматривать как сопряженное пространство к некоторому нормированному пространству. Отсюда получается ряд условий нормируемости локально ограниченного топологического линейного пространства. Кроме того, решается задача о регулярно выпуклых множествах, поставленная Бурженом (Bourgin D. G., Amer. J. Math., 1943, 65, 637—659). М. А. Наймарк

6892. **Всякое L-пространство изоморфно строго выпуклому пространству. Дей** (Every L-space is isomorphic to a strictly convex space. Day Mahlon M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 415—417 (англ.)

Доказывается утверждение, служащее заглавием работы: пространство функций, заданных на множестве X с мерой μ и суммируемых по этой мере, изоморфно строго выпуклому пространству (т. е. пространству, единичная сфера которого строго выпукла).

Используя свои прежние исследования (РЖМат, 1957, 8003), автор сводит вопрос к тому случаю, когда $\mu(X)$ конечна. В этом случае для доказательства используется одна теорема Махарам (Maharam D., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1942, 28, 108—111).

Отмечается, что неизвестен пример пространства, изоморфного пространству с гладкой единичной сферой, такого, что оно или его сопряженное неизоморфно строго выпуклому пространству. М. А. Рутман

6893. **Замечания об открытых гомоморфизмах. Петтис** (Comments on open homomorphisms. Pettis B. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 583—586 (англ.)

Дано некоторое усовершенствование известных признаков открытости гомоморфизмов линейных топологических пространств и метрических групп. Д. П. Мильман

6894. **Теорема Радона-Никодима в K-пространствах. Кристеску** (Teorema lui Radon-Nikodym in K-spații. Cristescu Romulus), An. Univ. «C. I. Parhon». Ser. științ. natur., 1957, № 14, 25—27 (рум.; рез. русск., франц.)

Теорема. Пусть X — K-пространство с единицей, X^u — его база, $\varphi(e)$ — вещественная, аддитивная, ограниченная (т. е. представимая в виде разности двух положительных аддитивных функций) (o)-непрерывная функция на X^u ((o)-непрерывность означает, что $e_n \overset{(0)}{\to} 0$ влечет $\varphi(e_n) \to 0$). Пусть f — (o)-линейный положительный функционал на X, удовлетворяющий следующему условию: если множество $H \subset X_+$ (X_+ — конус положительных элементов из X) направлено по возрастанию и нормально содержится в X_+, и если на H $\sup f(x) = L < +\infty$, то существует ограниченная последовательность элементов $x_n \in H$, для которой $\lim f(x_n) = L$. Тогда, если на базе из $f(e) = 0$ вытекает, что $\varphi(e) = 0$, то существует такой элемент $x_0 \in X$, что

$$\varphi(e) = f(\mathrm{Pr}_e\, x_0)$$

(Pr_e — оператор проектирования на компоненту, порожденную элементом e).

В работе используется следующее предложение, приводимое без доказательства: Если $\varphi_1(e)$ и $\varphi(e)$ — аддитивные, положительные и (o)-непрерывные функции на базе X^u и $\varphi_1(e) = 0$ влечет $\varphi_2(e) = 0$, но $\varphi_2(e)$ не есть тождественный нуль, то существуют число $\varepsilon > 0$ и $e' \in X^u$ такие, что $\varphi_1(e') > 0$ и $\varphi_2(e) \geqslant \varepsilon\varphi_1(e)$ для любого $e \leqslant e'$.

Это предложение очевидно в случае, когда функции и $\varphi_2(e)$ вполне непрерывны (т. е. непрерывны относительно трансфинитной сходимости), но без требования полной непрерывности оно вызывает у референта сомнение. Б. З. Вулих

6895. **Теория интегрирования. Заманский** (Théorie de l'intégration. Zamansky Marc), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 24, 2882—2885 (франц.)

В топологическом пространстве $\mathcal{E}$ выделяется непустое семейство $\mathcal{A}$ открытых множеств, удовлетворяющее условиям: 1) если O, $O' \in \mathcal{A}$, то $O \cap O' \in \mathcal{A}$ и $O \cup O' \in \mathcal{A}$, 2) если O, $O' \in \mathcal{A}$, то $O \cap C\overline{O'} \in \mathcal{A}$; 3) на $\mathcal{A}$ задана конечная вещественная мера $\mu(O) \geqslant 0$, причем $\mu(O) > 0$, если O не пусто, $\mu(O) \geqslant \mu(O')$ при $O \supset O'$ и $\mu(O \cup O') = \mu(O \cap C\overline{O'}) + \mu(O \cap O') + \mu(O' \cap C\overline{O})$, 4) граница любого $O \in \mathcal{A}$ μ-тонка (μ-mince). (Множество точек из $\mathcal{E}$ называется μ-тонким, если оно может быть покрыто конечной или счетной совокупностью множеств из $\mathcal{A}$ со сколь угодно малой суммой мер).

Совокупность Φ конечных линейных комбинаций характеристических функций множеств из $\mathcal{A}$, для которых естественным образом определяется интеграл, представляет нормированное пространство с нормой $\|\varphi\| = \int |\varphi|\, d\mu$. Пусть $\hat{\Phi}$ — пополнение пространства Φ. Всякая фундаментальная последовательность функций из Φ содержит частичную, сходящуюся почти всюду (т. е. за исключением некоторого μ-тонкого множества точек). Поэтому элементам пространства $\hat{\Phi}$ могут быть сопоставлены функции на $\mathcal{E}$. При дополнительном условии: 5) каждое $O \in \mathcal{A}$ содержится в некотором компактном множестве из $\mathcal{E}$ — доказывается теорема: если $\{\varphi_n\}$ — фундаментальная последовательность из Φ и $\varphi_n(x) \to 0$ почти всюду, то $\|\varphi_n\| \to 0$. Отсюда вытекает, что соответствие между элементами из $\hat{\Phi}$ и сопоставленными им функциями оказывается взаимно однозначным, если отождествлять функции, совпадающие почти всюду, а пространство $\hat{\Phi}$ может быть интерпретировано как обычное пространство интегрируемых функций типа L. Б. З. Вулих

6896. **Функции ограниченной вариации в топологических векторных пространствах. Уэстон** (Functions of bounded variation in topological vector spaces. Weston J. D.), Quart. J. Math., 1957, 8, № 30, 108—111 (англ.)

Пусть $[a, b]$ — вещественный интервал, а S — конечная система неперекрывающихся подынтервалов $[a_i, b_i]$ $(i = 1, \ldots, m)$. Если $g(t)$ — функция, определенная на $[a, b]$, со значениями в векторном пространстве X, то через $V(g)$ обозначим множество точек $v_S(g) = \sum_{i=1}^{m} \{g(b_i) - g(a_i)\}$ для всех возможных выборов S. Если X — топологическое векторное пространство, то $g(t)$ назовем функцией ограниченной вариации на $[a, b]$ в том случае, когда $V(g)$ — ограниченное множество (т. е. если любой окрестности G нуля пространства X отвечает положительный скаляр ρ такой, что $\rho V(g) \subseteq G$). В случае, когда топология в X задается с помощью нормы, это определение совпадает с прежним определением Хилле.

A-пространством автор называет частично упорядоченное топологическое векторное пространство, обладающее следующим свойством: каждой окрестности нуля H отвечает окрестность нуля G такая, что для $x \in G$ найдутся u, $v \in H$, для которых $u \leqslant x \leqslant v$ (в случае нормированного пространства это требование экви-

валентно условию нормальности: $\|u+v\| \geqslant \eta \|u\|$ для всех u, v, где $\eta = \text{const} > 0$).

Всякая монотонная функция $g(t)$ ($t \in [a, b]$) со значениями в A-пространстве есть функция ограниченной вариации.

Если функция ограниченной вариации $g(t) \in X$, где X — локально выпуклое секвенциально полное пространство, то для всякой непрерывной скалярной функции $f(t)$ ($a \leqslant t \leqslant b$) удается естественно определить интеграл «Римана—Стилтьеса» $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ как некоторую предельную точку в X. Интеграл линеен по отношению к f и g, причем последнее надо понимать в том смысле, что для любого линейного функционала φ на X $\varphi\left\{\int_a^b f(t)\,dg(t)\right\} = \int_a^b f(t)\,d\varphi(g(t))$.

Если, кроме того, X есть A-пространство, то из равномерной сходимости $f_n(t) \to f(t)$ ($a \leqslant t \leqslant b$) вытекает $\int_a^b f(t)\,dg(t) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dg(t)$.

Вводятся также несобственные интегралы $\int_0^\infty f(t)\,dg(t)$ и, в частности, интеграл Лапласа — Стилтьеса $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dg(t)$, на который распространяются результаты, полученные Олубуммо (РЖМат, 1958, 4823) для случая, когда X — банахово пространство. И. С. Иохвидов

6897. Пространства Орлича векторных полей. I Д и н к у л я н у (Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs.I D i n c u l e a n u N i c o l a e), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, 22, № 2, 135—139 (франц.)

Рассматриваются пространства векторных полей (абстрактных функций), являющиеся обобщением пространств Орлича.

Пусть Z — локально компактное топологическое пространство с положительной мерой Радона μ. Через $\mathcal{E}$ обозначается семейство банаховых пространств $E(z)$ ($z \in E$), через $\mathscr{E}(\mathcal{E})$ — совокупность векторных полей $\mathbf{x}(z)$, определенных на Z со значениями в $E(z)$: $\mathbf{x}(z) \in E(z)$ для каждого $z \in Z$. Предполагается, что в $\mathscr{E}(\mathcal{E})$ существует фундаментальное семейство $\mathscr{A}$ непрерывных векторных полей (совокупность $\mathscr{A}$ векторных полей, определенных на Z, называется фундаментальным семейством непрерывных векторных полей, если она удовлетворяет следующим условиям: а) $\mathscr{A}$ является подпространством пространства всех векторных полей, определенных на Z; б) для каждого $\mathbf{x} \in \mathscr{A}$ функция $\|\mathbf{x}(z)\|$ непрерывна на Z; в) для каждого $z \in Z$ множество $\mathbf{x}(z)$ ($\mathbf{x} \in \mathscr{A}$) плотно в $E(z)$).

Векторное поле $\mathbf{x}$ называется непрерывным в точке $z_0 \in Z$, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такую окрестность V точки z_0 и такое векторное поле $\mathbf{y} \in \mathscr{A}$, что $\|\mathbf{x}(z) - \mathbf{y}(z)\| < \varepsilon$ для всех $z \in V$. Векторное поле $\mathbf{x}$ называется измеримым, если для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого компакта $K \subset Z$ существует такой компакт $K_1 \subset K$, на котором векторное поле $\mathbf{x}$ непрерывно, а $\mu(K \setminus K_1) < \varepsilon$.

Через $\mathcal{E}'$ обозначается семейство пространств $E'(z)$ сопряженных к $E(z)$ ($z \in Z$), через $\mathscr{E}(\mathcal{E}')$ — совокупность функционалов $\mathbf{x}'(z) \in E'(z)$. Как и выше, предполагается, что существует фундаментальное семейство $\mathscr{A}' \subset \mathscr{E}(\mathcal{E}')$. При этом для каждого $\mathbf{x} \in \mathscr{A}$ и каждого $\mathbf{x}' \in \mathscr{A}'$ скалярное произведение $\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z)\rangle$ — непрерывная функция.

Через $\mathfrak{M}_{\mathscr{A}}$ обозначается совокупность измеримых векторных полей $\mathbf{x} \in \mathscr{E}(\mathcal{E})$, через $\mathfrak{M}^0_{\mathscr{A}}$ — совокупность таких векторных полей $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathscr{A}}$, для которых множество $\{z \mid \mathbf{x}(z) \neq 0\}$ содержится в сумме последовательности компактных множеств и множества нулевой меры. Аналогично определяются множества функционалов $\mathfrak{M}_{\mathscr{A}'}$ и $\mathfrak{M}^0_{\mathscr{A}'}$.

Пусть $\varphi(t)$ ($0 \leqslant t < \infty$) — положительная, непрерывная слева, возрастающая функция, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 0$. Пусть $\psi(S)$ — обратная к $\varphi(t)$ функция. Функции

$$\Phi(u) = \int_0^u \varphi(t)\,dt \quad \text{и} \quad \Psi(v) = \int_0^v \psi(s)\,ds,$$

определенные на $[0, \infty]$, называются взаимно дополнительными в смысле Юнга.

Через $\mathscr{O}^{\Phi}_{\mathscr{A}}$ обозначается совокупность векторных полей $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathscr{A}}$, для которых $|\mathbf{x}|_\Phi = \int \Phi(\|\mathbf{x}(z)\|)\,d\mu(z) < \infty$ через $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathscr{A}}$ — совокупность векторных полей $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^0_{\mathscr{A}}$, для которых

$$\|\mathbf{x}\|_\Phi = \sup_{\mathbf{x}'} \int |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z)\rangle|\,d\mu(z) < \infty,$$

где $\mathbf{x}' \in \mathscr{O}^{\Psi}_{\mathscr{A}'}$ и $|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1$.

Приводится ряд утверждений, показывающих, что множества $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathscr{A}}$ являются линейными нормированными пространствами, обладающими рядом свойств обычных пространств Орлича (см., например, Orlicz W., Bull. internat. Acad. polon. Cl. A., 1932, 207—220; РЖМат, 1957, 8009). Доказательства не приводятся.

Я. Б. Рутицкий

6898. Пространства Орлича векторных полей. II Линейные непрерывные функционалы. Д и н к у л я н у (Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. II Fonctionnelles linéaires continues. D i n c u l e a n u N i c o l a e), Atti Accad. naz. Lincei. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, 22, № 3, 269—275 (франц.)

Обозначения и определения те же, что и в реф. 6897. Пусть $\mathcal{E}$ — семейство банаховых пространств $E(z)$, $\mathscr{E}(\mathcal{E})$ — совокупность векторных полей, определенных на Z, со значениями в $E(z)$, $\mathscr{A}$ — фундаментальное семейство непрерывных векторных полей. Через $\mathcal{F}$, $\mathscr{E}(\mathcal{F})$ и $\mathscr{B}$ обозначаются соответствующие множества для семейства банаховых пространств $F(z)$. Пусть $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathscr{A}}$ и $\mathfrak{L}^{\Phi_2}_{\mathscr{B}}$ — соответствующие пространства Орлича.

Линейный непрерывный оператор T, действующий из $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathscr{A}}$ в $\mathfrak{L}^{\Phi_2}_{\mathscr{B}}$, называется разложимым (décomposable), если для каждого $z \in Z$ существует такой линейный непрерывный оператор $T(z)$, действующий из $E(z)$ в $F(z)$, что $T\mathbf{x}(z) = T(z)\,\mathbf{x}(z)$ для каждого $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathscr{A}}$ почти везде на Z. Пусть $f(z)$ — комплекснозначная функция, ограниченная в существенном. Через U_f обозначается оператор, действующий из $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathscr{A}}$ ($\mathfrak{L}^{\Phi_2}_{\mathscr{B}}$) в $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathscr{A}}$ ($\mathfrak{L}^{\Phi_2}_{\mathscr{B}}$) и определенный равенством $U_f\mathbf{x} = f(z)\,\mathbf{x}(z)$.

Т е о р е м а 1. Для того чтобы линейный непрерывный оператор T, действующий из $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathscr{A}}$ в $\mathfrak{L}^{\Phi_2}_{\mathscr{B}}$, был разложимым, необходимо и достаточно, чтобы операторы T и U_f коммутировали: $TU_f = U_fT$.

Т е о р е м а 2. Пусть существует такое число $M > 1$, что $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ ($u \geqslant 0$). Для каждого линейного непрерывного функционала f, определенного на $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathscr{A}}$, существует такое поле функционалов $\mathbf{x}'_f \in \mathscr{E}(\mathcal{E}')$, что

$$f(\mathbf{x}) = \int \langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'_f(z)\rangle\,d\mu(z)$$

для всех $x \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathscr{A}}$. При этом $\frac{1}{2}\|x'_f\|_{\Psi} \leqslant \|f\| \leqslant \|x_f\|_{\Psi}$, где $\Psi(v)$ — дополнительная к $\Phi(u)$ функция.

Эта теорема обобщает теорему из теории обычных пространств Орлича (скалярных функций).

Я. Б. Рутицкий

6899. **Абстрактные углы и тригонометрические функции в банаховых пространствах. Зингер** (Unghiuri abstracte şi funcţii trigonometrice în spaţii Banach. Singer Ivan), Bul. ştiinţ. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1957, 9, № 1, 29—42 (рум.; рез. русск., франц.)

Углом в банаховом пространстве E называется пара $\widehat{x, y}$ ненулевых элементов $x, y \in E$. При этом считается, что $\widehat{ax, by} = \widehat{x, y}$ при любых $a, b > 0$ и $\widehat{Ux, Uy} = \widehat{x, y}$, если U — вращение пространства E вокруг нулевого элемента. Если считать $\|x\| = \|y\| = 1$, то по определению

$$\sin\frac{\widehat{x,y}}{2} = \frac{1}{2}\|x - y\|, \quad \cos\frac{\widehat{x,y}}{2} = \frac{\varepsilon}{2}\|x + y\|,$$

где $\varepsilon = \pm 1$ определяется в зависимости от того, будет ли половина «евклидова» угла между векторами x и y острым или тупым углом. Изучается функция $\sin^2\frac{\widehat{x,y}}{2} + \cos^2\frac{\widehat{x,y}}{2}$ и доказывается, что существует постоянная C_0 такая, что

$$1 \leqslant C_0 \leqslant 2, \quad \frac{1}{C_0} \leqslant \sin^2\frac{\widehat{x,y}}{2} + \cos^2\frac{\widehat{x,y}}{2} \leqslant C_0$$
$$(x,\ y,\ \in E)$$

Ортогональными векторами называются векторы $x, y \in E$, для которых $\sin\frac{\widehat{x,y}}{2} = \left|\cos\frac{\widehat{x,y}}{2}\right|$.

Г. П. Акилов

6900. **Об L-проблеме теории моментов в банаховых пространствах. Зингер** (Asupra L-problemei teoriei momentelor în spaţii Banach. Singer Ivan), Bul. ştiinţ. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1957, 9, № 1, 19—28 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть E — банахово пространство, E^* — сопряженное к нему пространство и S^* — единичная сфера пространства E^*; пусть элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ линейно независимы и вещественные числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ не все равны нулю.

Теорема 1. Среди функционалов $f \in E^*$, удовлетворяющих соотношениям $f(x_i) = c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и имеющих минимальную норму, существует функционал f^0 вида $f^0 = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i$, где f_i — попарно не противоположные экстремальные точки сферы S^*; $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i = \|f^0\|$; $m \leqslant n$. Рассматриваются различные приложения теоремы.

Г. П. Акилов

6901. **Модулированные пространства последовательностей. Ямамуро** (Modulared sequence spaces. Yamamuro Sadayuki), J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1954, Ser. 1, **13**, 1—12 (англ.)

Пусть для каждого индекса ν задана функция $f_\nu(u)$ со следующими свойствами: $0 \leqslant f_\nu(u) \leqslant \infty$ для $0 \leqslant u \leqslant \infty$, $f_\nu(0) = 0$, $f_\nu(u) \to \infty$ при $u \to \infty$, $f_\nu(u) \not\equiv \infty$ для $u > 0$, f_ν не убывает и выпукла. Для каждой последовательности $x = (\xi_\nu)$ положим: $m(x) = \sum_\nu f_\nu(|\xi_\nu|)$. Пусть $l(f_\nu)$ означает множество тех x, для которых $m(\alpha x) < \infty$ при некоторых $\alpha > 0$. Тогда $l(f_\nu)$ — модулированное пространство последовательностей с модулем m; оно будет (полным) банаховым пространством с нормой $\|x\| = \inf\eta\,(\eta > 0,\ m(x/\eta) \leqslant 1)$. Приводятся необходимые и достаточные условия для следующих свойств: 1) $l(f_\nu)$ содержит l_1 (пространство последовательностей $\{\xi_\nu\}$, для которых $\sum_\nu|\xi_\nu| < \infty$), 2) $l(f_\nu)$ содержит только ограниченные последовательности.

Пусть $\bar{f}_\nu$ означает дополнительную функцию к f_ν в смысле Юнга, т. е. f'_ν и $\bar{f}'_\nu$ — взаимно обратные функции. Автор показывает, что $l(\bar{f}_\nu)$ есть сопряженное модулированное пространство к $l(f_\nu)$ с сопряженным модулем $\bar{m} = \sum_\nu \bar{f}_\nu$. Показывается, что $l(f_\nu) \subset l(g_\nu)$ в том и только в том случае, если для некоторого $\alpha > 0$ будет $\sum_\nu f_\nu g_\nu^{-1}(\alpha) < \infty$ (здесь g_ν^{-1} — обратная функция к g_ν), причем делается очень ограничительное предположение, что $f_\nu g_\nu^{-1}$ выпукла.

При некоторых ограничениях на f_ν показывается, что свойство Шура об эквивалентности слабой и сильной сходимостей в $l(f_\nu)$ имеет место в случае, когда $\chi^{f_\nu} \to 1$, и только в случае, когда $\chi_{f_\nu} \to 1$. Здесь χ^{f_ν} (χ_{f_ν}) — точная нижняя (верхняя) граница тех чисел $p \geqslant 1$, для которых $f_\nu(u)\,u^{-p}$ не возрастает (не убывает).

I. Halperin

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 387.

6902. **О конечных модулях. Ямамуро** (On finite modulars. Yamamuro Sadayuki), J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1954, Ser. 1, **13**, 13—21 (англ.)

Пусть m — модуль в смысле Накано полуупорядоченного линейного пространства R. Модуль m называется 1) конечным, если $m(x) < \infty$ для всех x; 2) ограниченным сверху, если $m(\alpha x) \leqslant \gamma m(x)$ для всех x и некоторых фиксированных $\alpha > 1$ и $\gamma < \infty$. Конечность следует из ограниченности сверху, но обратное не имеет места. Однако автор показывает, что конечность влечет некоторую слабую форму ограниченности сверху. В частности, если R — модулированное пространство последовательностей (реф. 6901), то дается усиление этого результата, приводящее к обобщению теоремы, установленной Орличем и Бирнбаумом в случае, когда все f_ν совпадают.

I. Helperin

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 387.

6903. **Характеристика модулей типа L_p. Амемия** (A characterization of the modulars of L_p type. Amemiya Ichiro), J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1954, Ser. 1, **13**, 22—33 (англ.)

Пусть $m(x)$ — модуль (в смысле Накано) условно полной векторной структуры R. Тогда по m можно определить две нормы

$$\|x\| = \inf_{\xi > 0}[(1 + m(\xi x))/\xi], \quad |||x||| = \inf_{\substack{\eta > 0 \\ m(x/\eta) \leqslant 1}}\eta.$$

В частности, если $R = L_p\,(p \geqslant 1)$ и $m(x) = \int|x(t)|^p dt$, то $\|x\| = \alpha|||x|||$ для постоянной α. Автор хочет доказать, что, обратно, из пропорциональности двух норм, с $\alpha > 1$ следует, что R есть пространство L_p (с точностью до несуществующих изменений). Он предполагает, что R бесконечномерное, но его доказательство того, что из $|||x||| = 1$ следует $m(x) = 1$, по-видимому, предполагает, что R не имеет дискретных элементов. В § 2 из $m(x_\nu) = 1/2$ для ортогональных x_ν автор вы-

водит, что $m(2x_\nu)=1$; но референту неясно утверждение, что $m(2n^{-1}(x_1+\ldots+x_n))=1$. I. Halperin

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 4, 387.

6904. Обобщения теоремы Ентцша. Биркгоф (Extensions of Jentzsch's theorem. Birkhoff Garrett), Trans. Amer. Soc., 1957, 85, № 1, 219—227 (англ.)

Пусть C обозначает замкнутый выпуклый конус в вещественном банаховом пространстве B и пусть имеется гиперплоскость H в B, пересекающая каждый луч в C точно в одной точке. Для любых двух лучей f, g в C определим расстояние $\theta(f, g)$ как абсолютную величину логарифма от абсолютной величины двойного отношения четверки точек a, f_1, g_1, b, где f_1, g_1 — точки на лучах f, g (отличные от начала) и a, b — концы отрезка, полученного пересечением прямой $l(f_1, g_1)$, проходящей через f_1, g_1, с конусом C (f_1 лежит между a, g_1; g_1 лежит между f_1, b).

Пусть P есть ограниченный линейный оператор, отображающий B в B и C в C. Число $N(P)=\sup\frac{\theta(Pf,\ Pg)}{\theta(f,\ g)}$, где f и g пробегают пары элементов C с конечным расстоянием по метрике $\theta(f, g)$, называется «C-нормой» оператора P. Доказывается теорема (теорема 1): Пусть для некоторого натурального r выполняется $N(P^r)<1$ и пусть C полно по метрике $\theta(f, g)$. Тогда для каждого элемента f из C последовательность $\{P^nf\}$ сходится к единственному (с точностью до числового множества) в C фикспункту оператора P.

Пусть далее P обозначает ограниченное линейное преобразование в банаховой структуре L. P называется «равномерно положительным» в L, если для некоторого $e>0$ из L и положительного числа K, не зависящего от f, выполняется $\lambda e\leqslant Pf\leqslant K\lambda e$ для каждого $f>0$ ($f\in L$) при некотором $\lambda=\lambda(f)$, зависящем от f, $\lambda(f)>0$.

Автор доказывает (теорема 3): Равномерно положительное ограниченное линейное преобразование P банаховой структуры L в себя допускает единственный положительный нормированный вектор c_0, для которого $Pc_0=\gamma c_0$, $\gamma>0$. При этом для каждого $f>0$, $f\in L$ выполняется неравенство $\left\|\frac{P^nf}{\|P^nf\|}-c_0\right\|<M\rho^n$ для некоторого конечного M и положительного $\rho<1$.

Показывается, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P^nf}{\gamma^n}=M_0(f)\,c_0$, и при этом $M_0(f)$ оказывается положительным линейным функционалом, удовлетворяющим условию $M_0(Pf)=\gamma M_0(f)$ при всех $f\in L$.

Показывается, что эти теоремы обобщают теоремы Перрона, Фробениуса и Ентцша для положительных конечных матриц и ядер. Для вполне непрерывных операторов и операторов в сопряженном пространстве такие обобщения были сделаны М. А. Рутманом и М. Г. Крейном (Успехи матем. наук, 1948, 3, 3—95).

Для однопараметрической полугруппы $\{P_t\}_{t>0}$ линейных неотрицательных операторов, отображающих банахову структуру L в себя (так что $f>0$ влечет $P_tf>0$ и $P_{t+\tau}f=P_\tau P_tf$), автор доказывает (теорема 5): Если при некотором $T>0$, P_T является равномерно положительным в L, то имеются положительный собственный вектор c_0 и единственный «коэффициент асимптотического роста» δ такие, что

$$\|P_tf-e^{\delta t}m(f)\,c_0\|\leqslant K^*e^{\sigma t},\quad \sigma<\delta$$

для каждого f, соответствующей «эффективной начальной величины» $m(f)$ и $t\geqslant T$.

Автор замечает, что «равномерной положительности» отвечает равномерное перемешивание в конечной стадии мультипликативного процесса. Д. П. Мильман

6905. Структура из инвариантных подпространств вполне непрерывного квазинильпотентного оператора. Донохью (The lattice of invariant subspaces of a completely continuous quasi-nilpotent transformation. Donoghue W. F., Jr), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 2, 1031—1035 (англ.)

Обозначим через Ω_0 класс вполне непрерывных операторов, спектр которых состоит из одной лишь точки 0. Каждый оператор этого класса обладает нетривиальным инвариантным подпространством (РЖМат, 1955, 4539). Оператор A класса Ω_0 будем называть одноклеточным, если все его инвариантные подпространства упорядочены по вложению. Приводятся следующие примеры одноклеточных операторов.

1) Пусть оператор A, действующий в l_2, относит вектору $\{a_0, a_1, a_2,\ldots\}$ вектор $\{0, a_0, a_1/2, a_2/2^2,\ldots, a_n/2^n,\ldots\}$. Очевидно, что каждое подпространство M_n ($n=1, 2, 3,\ldots$), состоящее из векторов, у которых первые n координат равны нулю, является инвариантным для оператора A, причем $M_1\supset M_2\supset M_3\supset\ldots$. Автор доказывает, что иных инвариантных подпространств оператор A не имеет.

2) Пусть в пространстве $L_p[0,1]$ ($1\leqslant p<\infty$) задан оператор B, относящий функции $f(x)$ функцию $Bf(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt$. Каждое подпространство M_α ($0<\alpha<1$), состоящее из функций, равных нулю почти всюду на промежутке $(0, \alpha)$ является, очевидно, инвариантным для B, причем $M_\alpha\subset M_\beta$, если $\beta<\alpha$. В реферируемой статье показано, что каждое инвариантное подпространство оператора B совпадает с одним из подпространств M_α.

Отметим, что такой же результат был получен референтом (РЖМат, 1958, 488).

В классе Ω_0 имеются также операторы, не являющиеся одноклеточными. Для доказательства этого утверждения рассматривается пространство функций $f(x, y)$, для которых $\int\limits_0^1\int\limits_0^1|f(x, y)|^2\,dxdy<\infty$, и в нем оператор

$$Tf(x, y)=\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(t, s)\,dsdt$$

М. С. Бродский

6906. Замечание по поводу двух теорем из теории колец функций. Эдуардс (Note on two theorems about function algebras. Edwards R. E.), Mathematika, 1957, 4, № 8, 138—139 (англ.)

Теоремы Стоуна об идеалах в кольце непрерывных функций на бикомпакте обобщаются на случай кольца $C(S)$ всех непрерывных функций на локально бикомпактном пространстве S с топологией равномерной сходимости на каждом бикомпактном подмножестве. Доказательства основаны на представлении линейных непрерывных функционалов в пространстве $C(S)$ с помощью интегралов Стилтьеса. В применении к кольцу p-дифференцируемых функций на p-дифференцируемом многообразии этот метод дает описание наименьших идеалов с данным множеством нулей. Г. Е. Шилов

6907. Об интеграле-произведении. Симбоан (Asupra integralei produs. Săm boan G.), Bul. ştiinţ. Acad. RPR. Sec. mat. şi fiz., 1957, 9, № 2, 241—246 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются непрерывные функции $x(\alpha):[a, b]\to X$, где X — банахова алгебра с единицей. Функция $x(\alpha)$ называется интегрируемой, если существуют последовательность $\{x_n(\alpha)\}$ непрерывных функций на $[a, b]$ со свойствами:

а) $\{x(\alpha)\}$ сходится по мере к $x(\alpha)$,

б) $\lim\limits_{m,n}\int\limits_a^b \| x_m(\alpha)-x_n(\alpha)\|\,d\alpha=0$.

Для интегрируемых в этом смысле функций интеграл-произведение (мультипликативный интеграл) определяется как

$$\lim_n \prod_a^b (1+x_n(\alpha)\,d\alpha)=\prod_a^b (1+x(\alpha)\,d\alpha).$$

Для интегрируемых и ограниченных функций $x(\alpha)$ остается в силе формула Пеано:

$$\prod_a^b (1+x(\alpha)\,d\alpha)=1+\int_a^b x(t)\,dt+\int_a^b\int_a^{t_2} x(t_1)\,x(t_2)\,dt_1dt_2+\ldots$$

Я. И. Житомирский

6908. Структурная теорема для полных квазиунитарных алгебр. Огасавара (A structure theorem for complete quasi-unitary algebras. Ogasawara Tôzirô), J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, **A19**, № 1, 79—85 (англ.)

Согласно Диксмье (Dixmier J., Comment. math. helv., 1952, 26, 275—322), $*$-алгебра $\mathbf{A}$ называется квазиунитарной, если в $\mathbf{A}$ определены скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ и автоморфизм J: $x\to x^J$ так, что выполнены следующие условия: 1) $\mathbf{A}$ есть предгильбертово пространство в $\langle x, y\rangle$; 2) $\langle x, x\rangle=\langle x^*, x^*\rangle$ для $x\in\mathbf{A}$; 3) для всякого $x\in\mathbf{A}$ оператор $U_x: y\to xy$ непрерывен; 4) $\langle x, x^J\rangle\geqslant 0$ для $x\in\mathbf{A}$; 5) $\langle xy, z\rangle=\langle y, x^*Jz\rangle$ для $x, y, z\in\mathbf{A}$; 6) множество всех элементов вида $xy+(xy)^J$ плотно в $\mathbf{A}$.

Доказываются следующие теоремы:

I. Пусть $\mathbf{A}$ — полная квазиунитарная алгебра и пусть $\ll x, y\gg$ — скалярное произведение, в котором $\mathbf{A}$ с той же инволюцией есть H^*-алгебра в смысле Амброза. Тогда существует единственный положительно определенный оператор $M\in\mathbf{R}^d$ ($\mathbf{R}^d$ — слабо замкнутое кольцо, порожденное операторами $V_x: y\to yx$) такой, что $\langle x, y\rangle=\ll x, MM'y\gg$, $J=MM'^{-1}$, где $M'=SMS$ и $Sx=x^*$. Обратно, для любой H^*-алгебры $\mathbf{A}$ и любого положительно определенного оператора $M\in\mathbf{R}^d$ формулы (1) задают скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ и автоморфизм J, по отношению к которым $\mathbf{A}$ есть полная квазиунитарная алгебра.

II. Пусть $\mathbf{M}$ — слабо замкнутое самосопряженное кольцо ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, содержащее единицу, и пусть в $\mathbf{M}$ задан нормальный, существенный псевдослед $\psi(A)$, $A\in\mathbf{M}$, удовлетворяющий условиям: 1) $\psi(A^*A)>0$ при $A\neq 0$; 2) $\psi(P)\geqslant 1$ при $P=P^*=P^2$, $P\in\mathbf{M}$. Тогда множество H нормированных операторов $T\in\mathbf{M}$ образует H^*-алгебру со скалярным произведением $(T, T_1)=\psi(TT_1^*)$, и для произвольного положительно определенного оператора $C\in\mathbf{M}$ H есть полная квазиунитарная алгебра по отношению к автоморфизму $J: T\to C^{-1}TC$ и скалярному произведению $\langle T, T_1\rangle=\langle T, CT_1C\rangle$. Обратно, всякую полную квазиунитарную алгебру можно таким образом получить из некоторого кольца $\mathbf{M}$.

Опечатки: 1) стр. 79, строка 2 снизу, вместо $U_x: x\to xy$ должно быть $U_x: y\to xy$; 2) стр. 82, строка 14 снизу, вместо $J_1\in\mathbf{R}^s$ должно быть $J_1\in\mathbf{R}^d$.

М. А. Наймарк

6909. Об алгебрах операторов в гильбертовых пространствах. Паллю-де-ла-Барьер (Sur les algebres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens. Pallu de la Barrière Robert), Bull. Soc. math. France, 1954, **82**, № 1, 1—52 (франц.)

См. реф. 6924 Д

6910. Об инвариантах W^*-алгебр. Судзуки (On the invariants of W^*-algebras. Suzuki Noboru), Tôhoku Math. J., 1955, **7**, № 3, 177—185 (англ.)

Пусть M — слабо замкнутое самосопряженное кольцо ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H произвольной размерности (W^*-алгебра, в терминологии автора). Доказываются следующие предложения, усиливающие результаты Гриффина (РЖМат, 1955, 2299) и Паллю-де-ла-Барьера (реф. 6924 Д).

1. Если M конечно, то следующие утверждения эквивалентны: α) для каждого нормального (в смысле Диксмье) положительного функционала ρ в M существуют векторы $\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in H$ такие, что $\rho(A)=\Sigma_{i=1}^n(A\varphi_i,\varphi_i)$ для всех $A\in M$; β) для каждого нормального следа τ в M существуют векторы $\xi_1,\ldots,\xi_n\in H$ такие, что $\tau(A)=\Sigma_{i=1}^n(A\xi_j,\xi_j)$ для всех $A\in M$; γ) инвариант $C(\chi)$ (по Паллю-де-ла-Барьеру) кольца M удовлетворяет неравенству $C(\chi)\geqslant 1/n$ для всех χ.

2. Если M конечно, то следующие условия эквивалентны: а) для M выполняется $\inf_\chi C(\chi)>0$; б) σ-слабая и слабая топологии совпадают на M; в) сильнейшая и сильная топологии совпадают на M; г) отображение $\natural$ (по Диксмье) непрерывно в слабой (или сильной) топологиях.

3. Если M чисто бесконечно, то: а') для всякого нормального положительного функционала ρ в M существует вектор $\varphi\in H$ такой, что $\rho(A)=(A\varphi,\varphi)$ для всех $A\in M$; б') слабая и σ-слабая топологии совпадают на M; в') сильная и сильнейшая топологии совпадают на M.

Кроме того, дается обобщение инварианта $C(\chi)$ на чисто бесконечные кольца M и доказывается, что $*$-изоморфные чисто бесконечные кольца с одинаковыми инвариантами $C(\chi)$ пространственно изоморфны.

Примечание референта. Близкое определение инварианта $C(\chi)$ и близкие результаты для чисто бесконечных колец были независимо получены Гриффином (РЖМат, 1955, 2299).

М. А. Наймарк

6911. Об автоморфизмах W^*-алгебр, оставляющих инвариантными элементы центра. Судзуки (On automorphisms of W^*-algebras leaving the center elementwise invariant. Suzuki Noboru), Tôhoku Math. J., 1955, **7**, № 3, 186—191 (англ.)

Рассматриваются автоморфизмы $a\to a^\alpha$ W^*-алгебры $\mathbf{M}$ (реф. 6910) такие, что: 1) $a^{*\alpha}=a^{\alpha*}$; 2) $a^\alpha=a$ для каждого элемента a центра $M^\natural$ алгебры M.

Основные результаты:

1. Если M конечна и e — оператор проектирования из M, то e^α эквивалентно e.

2. Если M собственно бесконечна и e — бесконечный оператор проектирования из M, то e^α эквивалентно e. (Для конечного e и собственно бесконечной M это ут-

ерждение, как показал Мисоноу (Misonou J.), неверно; риводится пример, указанный Мисоноу.

. 3. Если M конечна (собственно бесконечна) и если уществует (бесконечный) оператор проектирования $\in M$ с центральным носителем 1, удовлетворяющий ля всех $a \in M$ условию $(eae)^\alpha = weaew^*$ (где $w \in M$ и $w^*w = e$, $ww^* = e^\alpha$), то автоморфизм $a \to a^\alpha$ внутрен-ий.

Отсюда следует результат Капланского (Kaplansky I, Ann. Math., 1952, 56, 460—474) о том, что в случае W^*-алгебры M класса I автоморфизм $a \to a^\alpha$ внутрен-ий.

Кроме того, даются достаточные условия того, что-ы автоморфизм $a \to a^\alpha$ конечной W^*-алгебры класса I был внутренним. М. А. Наймарк

5912. Об одной теореме Магнуса. Хьюитт, Вигнер (On a theorem of Magnus. Hewitt Edwin, Wigner Eugene P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 4, 740—744 (англ.)

Устанавливаются аналоги преобразования Фурье и теоремы Планшереля для матричных функций на ло-кально компактной абелевой группе.

Пусть G — локально компактная абелева группа и X—ее группа характеров. Обозначим через A симметри-ческую окрестность единицы в X, обладающую конеч-ной, отличной от 0 мерой. Через $E(\chi_1,\ldots,\chi_n)$ $(\chi_1,\ldots,\chi_n \in X)$ обозначим функцию от n переменных $\chi_1,\ldots,\chi_n$ та-кую, что $E = 1$, если $\chi_i\chi_j^{-1} \in A$ при $i, j = 1,\ldots, n$, и $E = 0$, если $\chi_i\chi_j^{-1} \notin A$ для какой-нибудь пары i, j.

Пусть $t \to U(t)$ — линейное представление группы G с помощью унитарных матриц в n-мерном пространстве и $F(t)$ — матричная функция на G, причем матрица F есть матрица n-го порядка и ее элементы $F_{ij}(t)$ — суммируемые функции на G. Тогда имеют место фор-мулы

$$\hat{F}(U) = \int F(t)\, U(t)\, dt, \qquad (1)$$

$$F \quad (s) = \int \hat{F}(U)\, U(-s)\, E(\chi_1,\ldots,\chi^n)\, d\chi_1 \ldots d\chi_n. \qquad (2)$$

Если $F_{ij}(t) \in L_1(G) \cap L_2(G)$, то справедлива также формула

$$k \operatorname{sp} \int F(t) F^*(t)\, dt =$$

$$= \operatorname{sp} \int \hat{F}(U)\, \hat{F}^*(U)\, E(\chi_1 \ldots \chi_n)\, d\chi_1 \ldots d\chi_n. \qquad (3)$$

Формулы (1) и (2) представляют собой аналоги преоб-разований Фурье (формула (1) — прямое, формула (2)— обратное преобразования), формула 3 — аналог теоремы Планшереля.

В этих формулах dt означает дифференциал инва-риантной меры на G, $d\chi$ — дифференциал инвариант-ной меры на X, $\chi_1, \ldots, \chi_n$ — характеристические числа матрицы $U(t)$ (очевидно, что они являются элементами группы X). Наконец, буква k, встречающаяся в фор-мулах (2) и (3), означает действительное число, $0 < k < \infty$, зависящее от меры области A.

В случае, когда G — вещественная прямая, формулы (1) — (3) превращаются в результат, полученный Маг-нусом (РЖМат, 1957, 4152). Ф. А. Березин

5913. Вклад в гармонический анализ. III. Рейтер (Contributions to harmonic analysis (III). Reiter H.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 4, 477—483 (англ.)

Части I, II см. РЖМат, 1958, 3076, 3077. При терми-нологии предыдущих частей в работе доказывается следующая теорема: Пусть Ω' — множество неединст-венности в локально компактной абелевой группе $\hat{G}'$. Пусть $\hat{G}'$ есть гомоморфный образ другой локально компактной абелевой группы $\hat{G}$ и Ω — прообраз мно-жества Ω' в $\hat{G}$. Тогда Ω есть множество неединст-венности в $\hat{G}$. Б. М. Левитан

6914. Некоторые свойства преобразования Фурье на полупростых группах Ли. II. Эренпрейс, Маутнер (Some properties of the Fourier trans-form on semi-simple Lie groups. Part II. Ehren-preis L., Mautner F. I.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 84, № 1, 1—55 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1957, 4182. Пусть $f(g)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция, заданная на группе G матриц вида $\left\| \begin{matrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{matrix} \right\|$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Обозна-чим через $u_{mn}(g, s)$ матричные элементы неприводимых представлений основной серии этой группы и через $F_{mn}(s)$ — интеграл $\int f(g)\, u_{mn}(g, s)\, dg$. Через $\mathfrak{T}_0(f)$ обо-значим совокупность функций $\{F_{mn}(s)\}$. Для того что-бы матричная функция $\{F_{mn}(s)\}$ была функцией вида $\mathfrak{T}_0(f)$, необходимо и достаточно, чтобы все $F_{mn}(s)$ были функциями экспоненциального типа, не зависящего от m и n, удовлетворяющими некоторым ограничениям на рост относительно m и n и удовлетворяющими некото-рым функциональным уравнениям, связанным с эквива-лентностью представлений основной серии, задаваемыми параметрами s и $1 - s$. Аналогичные теоремы доказаны для различных классов обобщенных функций на группе G. Н. Я. Виленкин

6915. Гипераналитичность аналитических функционалов. Дель-Паскуа (Iperanaliticità dei funzionali analitici. Del Pasqua Dario), Rend. mat. e applic., 1955, **14**, № 4, 594—601 (итал.)

Автор называет гипераналитическим функционал, подчиненный условиям, несколько более сильным, чем аналитический функционал Фантапье (Lévy P., Leçons d'analyse fonctionnelle, Paris, 1951, приложение F. Pellegrino). Основной результат статьи заключается в доказательстве совпадения класса ана-литических функционалов Фантапье с классом гипер-аналитических функционалов автора. В. П. Хавин

6916. Алгебраическое продолжение решений нели-нейных уравнений в пространствах Банаха. Ахмедов К. Т., Элми әсәрләр. Азәрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1957, № 1, 3—17 (рез. азерб.)

Исследуется возможность продолжения решения не-линейного уравнения вида $u = \lambda f(u)$, где $u \in X$, X — комплексное пространство Банаха, f — аналитический оператор. Если $u_0 = \lambda_0 f(u_0)$, то продолжение ищется в форме

$$u_\lambda = u_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{i/q}\, u_i,$$

где $q > 1$ — натуральное число. М. К. Гавурин

6917. Итерационный процесс для решения операторных уравнений. Чэнь Вэнь-юань, Шусюэ цзиньчжань, 1957, **3**, № 3, 434—444 (кит.)

Доказывается сходимость общего итерационного про-цесса для решения нелинейных уравнений. Пусть $P(x)$ — нелинейный оператор, определенный в банахо-вом пространстве X, с областью значений, расположен-ной в пространстве Y того же типа, непрерывно диф-ференцируемый в смысле Фреше. Пусть x_0 — первое приближение решения уравнения $P(x) = 0$. Рассматри-

вается итерационный процесс для нахождения решения

$$P(x)=0:\ x_{n+1}=x_n-T_n^{-1}P(x_n),\ n=0,1,2\ldots,$$

где $T_n^{-1}\in(Y\to X)$. Имеет место теорема: Если выполняются условия: 1) $\|T_n^{-1}\|\leqslant k$; 2) $\|T_n-P'(x_0)\|\leqslant k_1$; 3) $\|P(x_0)\|\leqslant\eta$; 4) $\|P'(x)-P'(x_0)\|\leqslant k_2$, когда $\|x-x_0\|\leqslant\delta$; 5) $K=k\,|\,k_1+k_2)<1$; 6) $k\eta/(1-K)<\delta$, то последовательность $x_{n+1}=x_n-T_n^{-1}P(x_n)$, $n=0,1,2\ldots$ сходится к единственному в $\|x-x_0\|\leqslant\delta$ решению x^* уравнения $P(x)=0$, при этом $\|x_n-x^*\|\leqslant\delta K^n$. В частности:

1. Если $T_n=P'(x_n)$ или $T_n=T=P'(x_0)$, то получаются процесс Ньютона и его соответствующее усовершенствование. Приводятся теоремы, принадлежащие Феньё (РЖМат, 1955, 348, 1479) и Бартлу (РЖМат, 1956, 8134).

2. Если $T_n^{-1}=Q_n\Gamma_n$, где $\Gamma_n=[P'(x_n)]^{-1}$, $Q_n=\left[1-\frac{1}{2}\Gamma_nP''(x_n)\Gamma_nP(x_n)\right]^{-1}$ или $T_n^{-1}=Q_0\Gamma_0$, где $\Gamma_0=[P(x_0)]^{-1}$, $Q_0=\left[1-\frac{1}{2}\Gamma_0P''(x_0)\Gamma_0P(x_0)\right]^{-1}$, то получаются процесс касательных гипербол и его соответствующее усовершенствование. При доказательстве сходимости процесса не требуется существование производной $P(x)$ третьего порядка. Указываются некоторые обобщенные процессы.

3. Если $T_n^{-1}=\left[1+\frac{1}{2}\Gamma_nP''(x_n)\Gamma_nP(x_n)\right]\Gamma_n$ или $T_n^{-1}=\left[1+\frac{1}{2}\Gamma_0P''(x_0)\Gamma_0P(x_0)\right]\Gamma_0$, то получаются процесс Чебышева и его соответствующее усовершенствование. Применяя введенный способ, можно обобщить процесс Чебышева. Ши Чжун-цы

6918. Теория распределений Шварца. Чжун (Schwartz's theory of distributions. Chong F.), Austral J. Sci., 1957, **20**, № 1, 1—4 (англ.)

Лекция об основных понятиях теории распределений (имени С. Л. Соболева автор не упоминает), прочитанная новозеландским профессором математики в Австралийском математическом обществе в 1956 г.

Г. Е. Шилов

6919. Пространство Банаха распределений. I. Лав (A Banach space of distributions (I). Love E. R.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 4, 483—498 (англ.)

Рассматривается пространство $L(0,\ c)$ действительных интегрируемых на фиксированном интервале $(0,\ c)$ функций с нормой

$$\|f\|=\int_0^c dx\,|\int_0^x f(t)\,(x-t)^k\,dt\,|\,,\qquad(1)$$

где $k>0$ — фиксированное целое число.

Строится пополнение пространства $L(0,\ c)$ по норме (1), элементы которого и называются обобщенными функциями. Изучаются некоторые свойства обобщенных функций. Работа имеет много общего с работами Коревара (РЖМат, 1956, 6707, 6708).

Я. И. Житомирский

6920. Обобщение теории распределений Коревара. I. Яманака (Une extension de la théorie des distributions de M. J. Korevaar I. Yamanaka Takesi), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1956, **5**, № 2, 129—136 (франц.)

Определение распределения, данное Кореваром (РЖМат, 1956, 6707), обобщается на случай n переменных. Последовательность непрерывных на R^n функций $\{f_j(x)\}$ называется фундаментальной, если для любого замкнутого интервала $I=\{a\leqslant x\leqslant b\}$ (здесь $a=(a_1,\ldots,a_n)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $b=(b_1,\ldots b_n)$ существует такой набор целых неотрицательных чисел $p=(p_1,\ldots p_n)$, что соответствующая последовательность первообразных порядка p от $f_j(x)$ равномерно сходится на I.

Распределениями называются классы эквивалентных фундаментальных последовательностей. Определяются частная производная и первообразная распределений. Выясняется связь указанных распределений с распределениями Л. Шварца. Автор вводит «внутреннее произведение» (produit multiplicatif) и прямое произведение распределений в полном соответствии с такими же понятиями в теории распределений Л. Шварца. Я. И. Житомирский

6921. Распределения со значениями в пространстве, сопряженном к банахову. Маринеску (Distributions à valeurs dans le dual d'un espace de Banach. Marinescu G.), Math. Ann., 1958, **134**, № 3, 195—204 (франц.)

Основные понятия теории распределений Шварца (основные пространства K, S, дифференцирование, интегрирование, преобразование Фурье) обобщаются на случай функционалов со значениями в пространстве, сопряженном к банахову. Новых результатов нет.

Г. Е. Шилов

6922. Некоторые свойства распределений на группах Ли. Эренпрейс (Some properties of distributions on Lie groups. Ehrenpreis Leon), Pacif. J. Math., 1956, **6**, № 4, 591—605 (англ.)

Пусть G — сепарабельная группа Ли, V — комплексное метризуемое топологическое векторное пространство, $\mathcal{E}(V)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых отображений G в V; $\mathcal{D}(V)$ — совокупность тех отображений из $\mathcal{E}(V)$, которые имеют компактный носитель, $\mathcal{D}'(V)$ — пространство распределений на G, $\mathcal{E}'(V)$ — пространство распределений с компактным носителем. Для любых $S\in\mathcal{D}'(V)$ и $f\in\mathcal{D}(V)$ определяется свертка $S*f\in\mathcal{E}(C)$, где C — комплексная плоскость. Основной результат работы: если $S\in\mathcal{D}'(V)$ таково, что $S*f\in\mathcal{D}(C)$ для любого $f\in\mathcal{D}(V)$, то $S\in\mathcal{E}'(V)$. Полученный результат является обобщением результатов автора для случая, когда G — векторная группа и $V=C$ (РЖМат, 1957, 8037).

Я. И. Житомирский

6923. Дальнейшая модификация δ-функций Дирака. Инфельд, Плебанский (On a further modification of Dirac's δ-functions. Infeld L., Plebański J.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 1, 51—54 (англ.; рез. русск.)

Рассматривается предложенное авторами ранее (Bull. Acad. polon. sci., 1956, Cl. 3, **4**, 689) обобщение трехмерной δ-функции Дирака $\hat{\delta}$, удовлетворяющее особому дополнительному условию

$$\int d\mathbf{x}\hat{\delta}(\mathbf{x})\,|\,\mathbf{x}\,|^{-p}=0\ (p=1,\ 2,\ldots,\ k).\ (\hat{\mathrm{A}}_4)$$

Условие $\hat{\mathrm{A}}_4$ заменяется следующим:

$$\int d\mathbf{x}\hat{\delta}(\mathbf{x})\,|\,\mathbf{x}\,|^{-p}=\omega_p\ (p=1,2,\ldots,\ k),\ (\hat{\hat{\mathrm{A}}}_4)$$

где ω_p — заданные числа.

Совместность условия $(\hat{\hat{\mathrm{A}}}_4)$ с обычными требованиями к трехмерной δ-функции проверяется путем реализации $\hat{\delta}$ в виде:

$$\hat{\hat{\delta}}(\mathbf{x})=\lim_{\varepsilon\to0}\hat{\hat{\delta}}_\varepsilon(\mathbf{x}),\quad\hat{\hat{\delta}}_\varepsilon(\mathbf{x})=\hat{\hat{T}}_\varepsilon\delta_\varepsilon(\mathbf{x}),$$

$$\hat{T}_\varepsilon = \frac{1}{k!}\sum_{s=0}^{k} \frac{(-1)^s}{2^{-p|2}}\,\omega_s \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-p+1}{2}\right)}\binom{k}{s}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)^{k-s}\varepsilon^{k-s}\left(\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)^{s}.$$

Для обычной δ-функции все ω_p бесконечны. Однако в общем случае функции ω_p в любом конечном числе могут быть выбраны конечными. Случай, когда эти ω_p положены равными нулю, эквивалентен результату проведения ренормировки (в задачах квантовой теории поля). Д. В. Ширков

6924 Д. Об алгебрах операторов в гильбертовых пространствах. Паллю-де-ла-Барьер (Sur les algèbres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens. Pallu de la Barrière Robert. Thèse doct. sci. math. Fac. sci. Univ. Paris, 1953, Paris, Gauthier-Villars, 1954, 52 p.) (франц.)

Изучаются слабо замкнутые самосопряженные кольца операторов в гильбертовом пространстве, содержащие единичный оператор (алгебры операторов, в терминологии автора), не обязательно являющихся факторами. Понятие унитарного инварианта пары M, M′ (где M — заданная алгебра в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а M′ — совокупность всех ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}$, перестановочных со всеми операторами из M), построенное ранее Мерреем и Нёйманом (Murray F. J., Neumann J. von, Ann. Math., 1936, 37, 116—226) для факторов и затем Капланским (Kaplansky I., Cr. Acad. sci., 1950, 231, 485—486) для алгебр конечного класса, обобщается на произвольные алгебры, не содержащие чисто бесконечной части. Это обобщение состоит в том, что инварианту $C = C(\chi)$, определяемому как функция на пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов χ центра алгебры M, в некоторых точках приписывается в качестве значения символическое частное (точнее, пара двух трансфинитных чисел).

Один из основных результатов (теорема IV главы III) состоит в следующем: Если изоморфизм φ алгебры M_1 без чисто бесконечной части на алгебру M без чисто бесконечной части переводит инвариант $C_1(\chi)$ алгебры M_1 в инвариант $C(\chi)$ алгебры M для всех χ, образующих открытое плотное множество в $\mathfrak{M}$, то φ есть пространственный изоморфизм.

В терминах этого же инварианта $C(\chi)$ даются также условия непрерывности в различных топологиях изоморфизма двух алгебр операторов. Кроме того, изучаются различные свойства следа и элементов рассматриваемого гильбертова пространства, удовлетворяющих условию $(ABx, x) = (BAx, x)$ для всех $A, B \in M$. В заключение дается доказательство теоремы Капланского об инварианте $C(\chi)$ в случае алгебры операторов конечного класса. М. А. Наймарк

6925 Д. Об условиях разрешимости задачи Чаплыгина. Цалюк З. Б. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. ун-т, Казань, 1958

См. также: 6584, 6586, 6644, 6655, 6680, 6695, 6728, 6739, 6747, 6822, 6825, 6855, 6860

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

6926. Аксиоматическое построение теории вероятностей. Реньи (Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Rényi Alfred), Ber. Tagung. Wahrscheinlichkeitsrechnung und math. Statistik, Berlin, 1954, Berlin, 1956, 7—15 (нем.)

Пусть дано множество H, называемое «пространством элементарных событий», и борелевское тело T_1 подмножеств из H, причем $H \in T_1$; пусть, далее, T_2 — некоторая система подмножеств из H, $T_2 \subseteq T_1$ и $P(A \mid B)$ — функция множеств двух переменных, определенная для всех $A \in T_1$ и $B \in T_2$, называемая условной вероятностью события A при условии B. Если при этом выполняются аксиомы:

I. Для любых $A \in T_1$ и $B \in T_2$ имеет место $P(A \mid B) \geqslant 0$, $P(B \mid B) = 1$;

II. При фиксированном $B \in T_2$ $P(A \mid B)$ — счетно-аддитивная функция множеств от A на теле T_1;

III. Для любых $A \in T_1$, $B \in T_1$, $C \in T_2$, $BC \in T_2$ имеет место $P(AB \mid C) = P(A \mid BC) \cdot P(B \mid C)$, то пространство событий H вместе с борелевским телом множеств T_1, системой множеств T_2 и функций множеств $P(A \mid B)$ называется условным полем вероятностей и обозначается $[H, T_1, T_2, P(A \mid B)]$. В качестве непосредственных следствий из аксиом приводятся теоремы: 1. $P(A \mid B) \leqslant 1$. 2. $P(0 \mid B) = 0$. 3. $P(H \mid B) = 1$. 4. Если $C \subseteq \sum_{k=1}^{\infty} B_k$, $ACB_jB_k = 0$ для $j \neq k$ $(j = 1, 2, \ldots)$, то $P(A \mid C) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A \mid B_kC)\,P(B_k \mid C)$.

Определенная на H и измеримая (T_1) функция $\xi = \xi(a)$ называется случайной величиной, для которой дается определение условного математического ожидания $M(\xi \mid B) = \int_H \xi(a)\,dP(A \mid B)$ (B фиксировано); аналогичным образом определяется условная дисперсия $D(\xi \mid B)$.

Естественным образом определяется независимость двух и большего числа случайных величин (по отношению к T_2).

Формулируется следующая теорема об обобщенном усиленном законе больших чисел: Пусть $[H, T_1, T_2, P(A \mid B)]$ — условное поле вероятностей, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность случайных величин, независимых по отношению к T_2, $\mathfrak{B}$ — борелевское множество на числовой оси, причем прообразы его B_k при преобразованиях $\xi_k = \xi_k a)$ принадлежат к T_2, $M(\xi_k \mid B_k) = M_k$, $D(\xi_k \mid B_k) = D_k$($C \in T_2$, $B_k \subseteq C$, $P(B_k \mid C) = p_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = +\infty$; пусть $\zeta_n(\mathfrak{B})$ — среднее арифметическое случайных величин ξ^k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, значения которых попадают на множество $\mathfrak{B}$. Тогда если выполняются условия

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} M_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k} = M;\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k^2 p_k}{(\sum_{j=1}^{n} p_j)^2} < +\infty,$$ то

имеет место

$$P(\lim_{n\to\infty} \zeta_n(\mathfrak{B}) = M \mid C) = 1.$$

Специальными случаями формулированной теоремы являются известная теорема А. Н. Колмогорова об усиленном законе больших чисел и аналог теоремы Бо-

реля (об асимптотически одинаковой частоте цифр, встречающихся в правильной десятичной дроби), формулированный для канторовского разложения действительного числа.

В заключение отмечается, что центральная предельная теорема теории вероятностей может быть обобщена на случай условных полей вероятностей. Одно следствие этого обобщения допускает формулировку в рамках обычной теории и показывает, что известное «условие Линдеберга» является достаточным для применимости центрального предельного закона к последовательности слабозависимых случайных величин. Доказательства теорем не приводятся. А. А. Бобров

6927. **О композиции вероятностных законов Гаусса и Пуассона. Линник Ю. В.**, Докл. АН СССР, 1957, 114, № 1, 21—24

См. РЖМат, 1958, 3929

6928. **О борелевских полях на конечных множествах. Секереш, Байнет** (On Borel Fields over finite sets. Szekeres G., Binet F. E.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 2, 494—498 (англ.)

Устанавливается асимптотическая (при больших n) формула для числа всех борелевских полей, которые можно определить на множестве, состоящем из n элементов. М. И. Ядренко

6929. **Достаточное преобразование или σ-алгебра и минимум вероятности ошибки. Перес** (Transformation ou σ-algèbre suffisante et minimum de la probabilité d'erreur. Pérez Albert), Чехосл. мат. ж., 1957, 7, № 1, 115—123 (франц.; рез. русск.)

Рассматривается измеримое пространство (X, S) и система $\mathscr{M} = (\mu_1, \ldots \mu_n)$ вероятностных мер на S с априорными вероятностями, равными соответственно, $p_1, \ldots p_n$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, причем система этих вероятностей обозначается через P. Пусть $B = (B_1, \ldots, B_n)$ — разбиение пространства (X, S) т. е. система n непересекающихся множеств из S, соединение которых равно X. Вероятность ошибки, $e_B(\mathscr{M}, P)$, которую мы сделаем, принимая за настоящую меру μ_i при $x \in B_i$, $i = 1, \ldots, n$, дана формулой

$$e_B(\mathscr{M}, P) = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i(B_i).$$

Цель отдела I — дать характеристику класса разбиений B, минимализирующих $e_B(\mathscr{M}, P)$. Пусть λ — мера на S такая, что все $\mu_i \in \mathscr{M}$ абсолютно непрерывны по отношению к λ, пусть $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ означают соответственно производные мер $\mu_1, \ldots, \mu_n$ по отношению к λ.

Далее определим множество M_{ij} соотношением

$$M_{ij} = M_{ji} = \{x : p_i f_i(x) = p_j f_j(x)\}$$

и обозначим через K_B класс разбиений пространства (X, S), содержащий B и всякое разбиение $C = (C_1, \ldots, C_n)$ такое, что при $i \neq j$ $C_i \cap B_j \subset M_{ij}$ по модулю λ. Каждому разбиению из K_B соответствует вероятность ошибки, равная $e_B(\mathscr{M}, P)$ (теорема 1), и класс K_A, где A определено соотношениями $N_{ij} = \{x : p_i f_i(x) > p_j f_j(x)\}$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$: $L_{ij} = \mathscr{M}_{ij}$ для $i < j$, $L_{ij} = \phi$ для $i > j$

$$A_i = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (N_{ij} \cup L_{ij}), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

совпадает с классом разбиений, дающих для данных $\mathscr{M}$ и P минимум вероятности ошибки, обозначенный через $l_\infty(\mathscr{M}, P)$, (теоремы 2,3).

В отделе II рассматривается возрастающая последовательность $\{S_k\}$ под σ алгебр из S и соответствующая последовательность $\{l_k(\mathscr{M}, P)\}$ минимумов вероятности ошибки. Справедливы соотношения

$$l_1(\mathscr{M}, P) \geqslant l_2(\mathscr{M}, P) \geqslant \ldots \geqslant l_s(\mathscr{M}, P)$$

$$l_k(\mathscr{M}, P) = 1 - \int \max_i (p_i f_i^{(k)}(x))\, d\lambda$$

$$\lim_{k \to \infty} f_i^{(k)}(x) = f_i^{(\infty)}(x)\ [\lambda],$$

где $f_i^{(k)}$ означают производные мер μ_i по отношению к λ, измеримые по отношению к $S_k k = 1, 2, \ldots \infty$, причем S_∞ означает минимальную σ-алгебру над $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$. Процесс $\{g_k(x) = \max_i p_i f_i^{(k)}(x),\ 1 \leq k \leq \infty\}$ является семимартингалом (РЖМат, 1957, 5754) и, вследствие

$$\lim_{k \to \infty} \max_i (p_i f_i^{(k)}(x)) = g_\infty^{(x)} = \max_i (p_i f_i^{\infty}(x))\ [\lambda]$$

справедливо также $\lim_{k \to \infty} \int g_k(x)\, d\lambda = \int g_\infty(x)\, d\lambda$, откуда $\lim l_k(\mathscr{M}, p) = l_{s\infty}(\mathscr{M}, p)$ (теорема 4).

Пусть S_0 — под-σ-алгебра из S (например, S_∞). В общем случае $l_{S_0}(\mathscr{M}, p) \geqslant l_S(\mathscr{M}, p)$; знак равенства имеет место для произвольного p тогда и только тогда, если S_0 является σ-алгеброй, достаточной для $\mathscr{M}$ (теорема 7, отдел III). Этот результат не является следствием результатов, полученных Бахадуром Bahadur R., Ann. Math. Statistics, 1954, 25, 423—462). Резюме автора

6930. **Тройные точки брауновских путей в трехмерном пространстве. Дворецкий, Эрдёш, Какутани, Тейлор** (Triple points of Brownian paths in 3-space. Dvoretzky A., Erdős P., Kakutani S., Taylor S. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, 53, № 4, 856—862 (англ.)

Рассматриваются выборочные функции процесса брауновского движения (брауновские пути) $r(t) = [x(t), y(t), z(t)]$; $r(0) = (0, 0, 0)$ с параметрами $[(0, 0, 0), (t-s)E]$, где E — единичная матрица третьего порядка и $0 < t < s < \infty$ в трехмерном евклидовом пространстве R_3. Точка $r_0 \in R_3$ называется тройной, если существуют такие числа t_1, t_2, $t_3 = 0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < \infty$, что $r(t_1) = r(t_2) = r(t_3)$.

В работе доказывается, что с вероятностью единица в R_3 брауновские пути не имеют тройных точек.

Доказательство основано на том, что множество двойных точек (определение аналогично) имеет сигма-конечную одномерную хаусдорфову внешнюю меру (см. стр. 58, упр. 8 книги Халмоша; РЖМат, 1954, 3653 К), и на некоторых более ранних результатах тех же авторов. В. П. Швальб

6931. **Об уравнениях Колмогорова. Черкасов И. Д.**, Успехи матем. наук, 1957, 12, № 5, 237—244

Рассматривается система параболических уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(s, x, \xi)}{\partial s} = a(x)\, \dfrac{\partial^2 f(s, x, \xi)}{\partial x^2} + b(x)\, \dfrac{\partial f(s, x, \xi)}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial f(s, x, \xi)}{\partial s} = \dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2} [a(\xi) f(s, x, \xi)] - \\ - \dfrac{\partial}{\partial \xi} [b(\xi) f(s, x, \xi)]. \end{cases}$$

Исследуется существование и единственность такого ее решения $f(s,x,\xi)$ в области $s>0$, $-\infty<x<\infty$, $-\infty<\xi<\infty$, которое удовлетворяет соотношениям:

$$f(s,x,\xi)\geqslant 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s,x\ \xi)\,d\xi=1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s-t,x,y)\,f(t,y,\xi)\,dy=f(s,x,\xi),$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_{|\xi-x|>\delta} f(s,x,\xi)\,d\xi=0,$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{\delta}\int_{|\xi-x|<\delta} f(s,x,\xi)\,d\xi=1,$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}\int_{|\xi-x|<\delta}(\xi-x)\,f(s,x,\xi)\,d\xi=b(x),$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\int_{|\xi-x|<\delta}(\xi-x)^2\,f(s,x,\xi)\,d\xi=2a(x)$$

(в этих соотношениях $\delta>0$ и x фиксированы, $s>t>0$, а интегралы предположены равномерно сходящимися относительно x).

Автор усиливает результаты статьи Феллера (Feller W., Math. Ann., 1936, **113**, 113—160, Успехи матем. наук, 1938, 5, 57—96) следующим образом:

Если на интервале $-\infty<x<\infty$ функции $a''(x)$ и $b'(x)$ непрерывны, а

$$a(x)>0,\quad \frac{1}{a(x)}\quad ,\qquad b(x)-\frac{1}{2}a'(x),$$

$$b'(x)-\frac{1}{2}a''(x)$$

ограничены, то решение, удовлетворяющее поставленным условиям, существует и единственно (и может быть выписано в виде формулы). (По мнению референта, при переходе от оценки с константой M_2 к оценке с M_3 автор использует также ограниченность $b'(x)$ на всей вещественной оси). Г. Н. Сакович

6932. Замечание о теореме Симмонса. Реньи (A remark on the theorem of Simmons. Rényi A.), Acta scient. math., 1957, **18**, № 1-2, 21—22 (англ.)

Под теоремой Симмонса известно следующее предложение: Если n и h — целые положительные числа и $0\leqslant p\leqslant 1$, $q=1-p$ и $f_{n,h}(p)=\sum_{r=0}^{h-1}\binom{n}{r}p^r a^{n-r}-\sum_{r=h+1}^{n}\binom{n}{r}p^r q^{n-r}$, то имеет место неравенство $f_{n,h}\left(\frac{h}{n}\right)>0$, если $p=\frac{h}{n}<\frac{1}{2}$. Хааз (РЖМат, 1958, 2223) обобщил неравенство Симмонса, показав, что для фиксированных n и h $f_{n,h}(p)>0$, если $1\leqslant h\leqslant\frac{n+1}{2}$ и $\frac{h-1}{n}\leqslant p<\min\left(\frac{1}{2},\frac{h}{n}\right)$. Автор показывает, что обобщение Хааза — кажущееся, его неравенство есть следствие неравенства Симмонса, если $\frac{h}{n}<\frac{1}{2}$, а в остальных двух возможных случаях выполняется тривиальным образом. Н. В. Смирнов

6933. Некоторые новые теоремы метода наименьших квадратов с приложениями к теории локации и определения места. Линник Ю. В., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 6, 208

6934. Заметка о решении по способу наименьших квадратов для метода последовательных категорий. Бок (Note on the least squares solution for the method of successive categories. Bock R. Darrell), Psychometrika, 1957, **22**, № 3, 231—240 (англ.)

Пересмотрена проблема оценки в методе последовательных категорий и получено новое решение по способу наименьших квадратов. Дано эмпирическое сравнение этого решения с решением Гулликсена.

Резюме автора

6935. Метод наименьших квадратов. Косамби (Kosambi D. D.), Шусюэ цзиньчжань, 1957, **3**, № 3, 485—491 (кит.)

6936. Обобщения неравенств Чебышева. Маллоуз (Generalizations of Tchebycheff's inequalities. Mallows C. L.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, **B18**, № 2, 139—168. Discuss., 168—176 (англ.)

Известные неравенства Чебышева для функции распределения, имеющей заданные степенные моменты, обобщаются в новом направлении. Подчиняя функцию распределения дополнительным условиям («условия гладкости»), автор получает более тесные границы для значений функции распределения и указывает способ нахождения этих границ в простейших случаях.

Функция распределения $F(x)$ удовлетворяет условию гладкости (k,λ), где $0<\lambda\leqslant\infty$, если существует непрерывная $F^{(k+1)}(x)$ и числа $-\infty\leqslant\beta_0<\beta_1<\ldots<\beta_k<\beta_{k+1}\leqslant+\infty$ такие, что $0<(-1)^i F^{(k+1)}(x)<\lambda$, $\beta_i<x<\beta_{i+1}$, $i=0,1,\ldots,k$. Если функция $F(x)$ удовлетворяет условию гладкости (k,λ) и имеет заданные моменты $\int_{-\infty}^{\infty}x^s dF(x)=\mu_s$, $s=0,1,\ldots,n$, то она называется решением проблемы моментов (n,k,λ).

Для проблемы (n,k,λ) автор ищет наилучшие из возможных функции $L(x)$ и $U(x)$ такие, что $L(x)<F(x)<U(x)$ для любого решения проблемы (n,k,λ). Достаточно брать $n=2m$, так как наличие μ_{2m+1} не улучшает неравенств. Отыскание $L(x)$ и $U(x)$ производится с помощью «главных экстремальных распределений» $E(x)$. Для случая $(2m,k,\infty)$ это функция с моментами $\{\mu_s\}_0^{2m}$, являющаяся пределом последовательности функций гладкости (k,∞); она равна 0 при $x\leqslant\alpha_0$ и равна 1 при $x\geqslant\alpha_m$ $(\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_m)$; в интервале (α_j,α_{j+1}), $E(x)$ — полином степени не выше k; в точке α_j $E^{(k-n_j)}(x)$ терпит разрыв ($E^{(k-n_j-1)}(x)$ непрерывна), $n_j\geqslant 0$, $\Sigma_0^m n_j=k$. Аналогично определяется $E(x)$ в случае $\lambda<\infty$ с дополнительным требованием, чтобы $E^{(k+1)}(x)$ существовала всюду, кроме $2m+k+2$ точек, и принимала значения только $\pm\lambda$ и 0. Набор распределений $E_\theta(x)$ $(0\leqslant\theta<1)$ называется полным циклическим набором, если каждому θ, кроме $\theta=0$ и k других значений θ, соответствуют главные экстремальные распределения, $E_\theta(x)$ непрерывно по θ (при исключенных значениях θ E_θ должно иметь специальный вид). Высказана теорема: Для существования решения проблемы моментов $(2m,k,\lambda)$, необходимо и достаточно существование полного циклического набора экстремальных распределений. Доказана только достаточность. Необходимость доказана лишь для проблем $(2m,k,\infty)$ при $k=0,1,2$ и для $(2,k,\infty)$,$(2m,k,\lambda)$ при $k=0,1$. Автор предполагает, что теорема справедлива в общем случае, и показывает, что тогда $L(x)=\min_{0\leqslant\theta<1}E_\theta(x)$, $U(x)=\max_{0\leqslant\theta<1}E_\theta(x)$, $-\infty<x<\infty$.

Главные экстремальные распределения изучаются с помощью производных функции

$$I_E(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE(x)}{z-x}:\left(\frac{d}{dz}\right)^k J_E(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE^{(k)}(x)}{z-x}.$$

В случае $(2m, k, \infty)$ $(-1)^k\left(\frac{d}{dz}\right)^k I_E(z)=P(z)/Q(z)$, где $Q(z)$ — полином, квазиортогональный порядка m относительно последовательности $\nu_r=0$ при $r=0, 1,\ldots, k-1$ и $\nu_r=r(r-1)\ldots(r-k+1)\mu_{r-k}$ при $r=k, k+1,\ldots, k+2m$, и имеет вид $Q(z)=\text{const}\,(z-\alpha_0)^{n_0+1}\times\times(z-\alpha_1)^{n_1+1}\ldots(z-\alpha_m)^{n_m+1}$, $P(z)$ — целая часть произведения $Q(z)\sum_{j=0}^{k+2m}\nu_j z^{-j-1}$. В случае $(2m, k, \lambda)$ при $\lambda<\infty$ $\exp\lambda^{-1}\left(\frac{d}{dz}\right)^k I_E(z)=S(z)/Q(z)$, где $S(z)$ и $Q(z)$ — полиномы степени $m+k+1$. Корнями $Q(z)$ ($S(z)$) являются правые (левые) концы интервалов, в которых $E^{(k+1)}(x)=+\lambda$ и левые (правые) концы интервалов, в которых $E^{(k+1)}(x)=-\lambda$.

Статья содержит большое количество примеров.

Примечание референта. Автор отмечает, что не имел возможности ознакомиться с работами советских математиков Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна по проблеме $(n, 0, \lambda)$ (О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, 1938). По-видимому, автор не знаком также с работами Маркова по обобщенной проблеме $(n, 0, \lambda)$, развитыми М. Г. Крейном (Успехи матем. наук, 1951, 6, № 4, 3—120). А. А. Нудельман

6937. Преобразования к нормальному виду, использующие дробные степени переменного. Мур (Transformations to normality using fractional powers of the variable. Moore P. G.), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, **52**, № 278, 237—246 (англ.)

Рассматривается нормально распределенная величина $X=m(1+k^{1/2}z)$, где $E(z)=0$, $D(z)=1$ $m>0$; представляет центр распределения X, $m^2k=D(X)$. Подбирая m достаточно большим, а k малым, можно добиться того, что $P(X\leqslant 0)<\varepsilon$, где ε — наперед заданное малое число; при этом величину X и с еще большим правом величину $X^{1/r}$ (при надлежаще подобранном $r<1$) можно приближенно рассматривать как «почти положительную» и ее распределением аппроксимировать распределение данной существенно положительной величины Y (например, размаха выборки, среднего отклонения и т. д.). Для рационального подбора r строится диаграмма, позволяющая осуществить его по данным величинам пирсоновских отношений β_1 и β_2.

Рассматривается ряд примеров; так при $2\leqslant n\leqslant 10$ $w^{1/n}$ распределено приближенно нормально. Указываются и некоторые другие преобразования. Н. В. Смирнов

6938. Об асимптотическом поведении Σp_m^2 в случае некоторых распределений вероятностей. II. Сугияма (On the asymptotic behavior of Σp_m^2 in case of certain probability distributions. II. Sugiyama Hiroshi), Math. Japon., 1955, **3**, № 3, 121—126 (англ.)

Рассматривается дискретное распределение вероятностей $\{p_m(\lambda)\}$ с конечной дисперсией $D^2(\lambda)$, характеристическая функция которого безгранично делима относительно параметра λ и имеет период 2π. Доказано, что при $\lambda\to\infty$

$$\sum\nolimits_m p_m^2(\lambda)\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi D^2(\lambda)}}.$$

Автор сообщает, что в I ч. статьи (Math. J apon., 1952, 2, № 4, 187—192) (с которой референт не имел возможности ознакомиться) этот результат был установлен другим методом для частных случаев — биномиального и пуассонова распределений, — и отмечает, что для указанных двух распределений это доказал до него Редхеффер (Redheffer R. M., Ann. Math. Statistics, 1951, 22, № 1, 115—117).

Примечание референта. Методом автора непосредственно получается аналогичный результат и для случая, когда дисперсия бесконечна, но распределение притягивается к устойчивому.

Г. Н. Сакович

6939. Замечание о проблеме моментов для одновершинных распределений, когда одно или оба крайних значения аргумента известны. Маллоуз (Note on the moment-problem for unimodal distributions when one or both terminals are known. Mallows C. L.), Biometrika, 1956, **43**, № 1, 224—227 (англ.)

Автор ищет условия, которым должны удовлетворять первые моменты, чтобы распределение вероятностей с этими моментами было одновершинным. Эти условия имеют различную форму в трех следующих случаях: вероятности распределены в отрезке а) $(-\infty, \infty)$; б) $(0, \infty)$; с) в конечном отрезке (t_1, t_2).

Например, если $t_1=-1$, $t_2=1$ и известны два момента μ_1, μ_2, то для одновершинности должны быть выполнены неравенства

$$0<3(\mu_2-\mu_1^2)<\begin{cases}(1-\mu_1)(1+3\mu_1) & \text{при } \mu_1>0,\\ (1+\mu_1)(1-3\mu_1) & \text{при } \mu_1<0.\end{cases}$$

Б. В. Гнеденко

6940. О смесях статистических распределений одного и того же семейства. Тионе (Sur les agrégats de distributions statistiques d'une même famille. Thionet P.), Publs Inst. statist. Univ. Paris, 1957, **6**, № 1, 27—52 (франц.)

Излагается доказательство найденного Фреше условия того, чтобы смесь двух распределений, имеющих одинаковые кривые концентрации, имела ту же кривую концентрации по Джини. Результаты обобщаются на случай, когда распределения имеют кривые концентрации, принадлежащие семейству, зависящему от двух параметров. С. С. Кислицын

6941. О преобразовании характеристических функций. Лукач (On a transformation of characteristic functions. Lukacs Eugene), Portug. math., 1957, **16**, № 1-2, 31—35 (англ.)

Дается доказательство следующей теоремы: Если $f(t)$ есть произвольная характеристическая функция, то $\Psi(t)=-\int_0^t[\int_0^u f(y)dy]du$ представляет логарифм характеристической функции некоторого безгранично делимого закона с конечной дисперсией. Н. В. Смирнов

6942. Центральная предельная теорема для мультилинейных случайных процессов. Парзен (A central limit theorem for multilinear stochastic processes. Parzen Emanuel), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 1, 252—256 (англ.)

Мультилинейным процессом автор называет процесс $X(t)$ с дискретным временем $t=0, \pm 1, \pm 2,\ldots$, представимый в виде

$$X(t)=\sum_{v_1,\ldots v_k=-\infty}^{\infty}a(v_1, v_2,\ldots v_k)W_1(t-v_1)\times\ldots\times W_k(t-v_k),$$

где $a(v_1\ldots, v_k)$ — константы и $\Sigma_{v_1,\ldots,v_k=-\infty}^{\infty}|a(v_1, v_2, \ldots, v_k)|<\infty$, $W_i(t)$ — случайные величины, такие, что

k-мерные векторы $W(t) = \{W_1(t), \ldots, W_k(t)\}$ при различных t независимы в совокупности. Предполагается, что для некоторого $\alpha > 2$ $M\,|W_1(t_1), \ldots, W_k(t_k)|^\alpha$ ограничено.

Пусть $S(n) = X(1) + \ldots + X(n)$. Доказывается, что если

$$\liminf_n \sigma^2(S(n)) > 0,$$

то величина $\dfrac{S(n) - MS(n)}{\sigma(S(n))}$ асимптотически нормальна.

И. И. Гихман

6943. **Абстрактные случайные элементы. Фреше** (Abstrakte Zufallselemente. Fréchet Maurice), Ber. Tagung. Wahrscheinlichkeitsrechnung und math. Statistik, Berlin, 1954. Berlin, 1956, 23—28 (нем.)

Пусть M — абстрактное множество с аддитивной системой подмножеств F. Для каждого $E \in F$ задана вероятность $\theta(E)$ того, что элемент $X \in M$ содержится в E. Пусть M — метрическое пространство, (X_1, X_2) — расстояние между элементами X_1 и X_2.

Для любого $a\varphi_r(a) = (\mathfrak{M}(X, a)^r)^{1/2}$ — среднее расстояние степени r случайного элемента X; от a. Если существует элемент Y_r, для которого $\varphi_r(Y_r) = \inf_{a \in M} \varphi_r(a) < \infty$, то Y_r называется типичным состоянием степени r случайного элемента $X \cdot Y_2$ называется средним состоянием элемента X. Если $\inf_{a \in M} \varphi_r(a) = \infty$, то для любого $b \in M$ определим

$$X_n = \begin{cases} X, & (X, b) < n, \\ b, & (X, b) \geqslant n. \end{cases}$$

Пусть $m_n = \inf_a \mathfrak{M}(X_n, a)^r$, $h_n(a) = \mathfrak{M}(X_n, a)^r - m_n$ и $h(a) = \lim_{n \to \infty} h_n(a)$. Если существует такой элемент γ_r, что для всех $h(\gamma_r) = 0$, то γ_r называется обобщенным типичным состоянием степени r случайного элемента X. Если для любого $a \in M$, $(M_n, a) \leqslant \dfrac{1}{n} \times$ $\times \sum_{k=1}^n (X_k, a)$, то M_n называется обобщенным арифметическим средним $X_1, \ldots, X_n$. Автор утверждает, что:

1. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — результаты испытания случайного элемента X, то каждое среднее состояние M_n есть среднее состояние X.

2. Пусть каждая сфера в M компактна. Если M_n существует для любого испытания и X имеет только одно среднее состояние δ, то с вероятностью единица $M_n \to \delta$.

Примечание референта. $\mathfrak{M}(X, a)^r$ — по-видимому, математическое ожидание случайной величины $(X, a)^r$. Определения автора референт не понял.

В. Г. Винокуров

6944. **Дополнительные результаты о случайных элементах, принимающих значения в банаховом пространстве. Форте, Мурье** (Résultats complémentaires sur les éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace de Banach. Fortet R., Mourier E.), Bull. sci. math., 1954, 2 ser., **78**, 14—30 (франц.)

6945. **Принцип инвариантности для зависимых случайных величин. Биллингсли** (The invariance principle for dependent random variables. Billingsley Patrick), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **83**, № 1, 250—268 (англ.)

В первых трех параграфах работы уточняются и обобщаются результаты Донскера (Donsker M., Mem. Amer. Math. Soc., 1951, № 6). Пусть C — пространство непрерывных функций, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, где $\{X_k\}$ — последовательность случайных величин, и p_n — ломаная линия с вершинами в точках $(j/n, S_n)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Если для некоторой последовательности положительных чисел $\{a_n\}$ меры P_n, заданных на поле борелевских множеств C, где $P_n(A) = P\{a_n^{-1} p_n \in A\}$, A — борелевское множество в C, слабо сходится к мере Винера W, то говорят, что для последовательности $\{X_n\}$ имеет место принцип инвариантности. Для целых чисел c, ν и n положим $n_j = [jnc^{-1}]$, $j = 0, 1, \ldots, c$; $n_{j,u} = [n(\nu(j-1) + u)c^{-1}\nu^{-1}]$, $u = 0, 1, \ldots, \nu$. Введем для любых α_j, β_j, $j = 1, \ldots, n$, событие E_{nr}, состоящее в том, что неравенства $\alpha_j \leqslant a_n^{-1} S_i \leqslant b_j$ при $n_{j-1} < i \leqslant n_j$ выполняются для всех $i < r$, но не для $i = r$. Общим принципом инвариантности автор называет следующую теорему: Если выполнены следующие два условия, то принцип инвариантности имеет место для последовательности $\{X_n\}$: а) для каждого c распределение случайного вектора $a_n^{-1}(S_{n_1}, S_{n_2} - S_{n_1}, \ldots, S_{n_c} - S_{n_{c-1}})$ асимптотически нормально с математическим ожиданием нуль и единичной дисперсионной матрицей; б) для каждого c, любой последовательности $(\alpha_1, \ldots, \alpha_c, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_c)$ и каждого $\delta > 0$

$$\lim_{\nu \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \sum_{r=1}^n P(E_{nr} \cap$$
$$\cap \{|S_{r'} - S_r| \geqslant \varepsilon a_n\}) = 0,$$

где r' есть целое число вида $n_{j,u+1}$, соответствующее каждому r и такое, что $n_{j,u} < r \leqslant n_{j,u+1}$.

Доказательство в основном следует методу Донскера. Замечание автора, что метод Ю. В. Прохорова (РЖМат, 1957, 8789) трудно применить к доказательству аналогичных теорем для зависимых случайных величин, не оправдано. Более общие предельные теоремы, чем в данной работе, содержатся также в несколько более поздней работе А. В. Скорохода (РЖМат, 1957, 8050).

В § 4—7 реферируемой статьи сформулированная теорема применяется к конкретным случаям. В § 4 принцип инвариантности доказывается для последовательности $\{f(x_n)\}$, где $\{x_n\}$ — марковский процесс. Условия, при которых доказан этот результат, совпадают с теми, при которых в аналогичном случае доказана центральная предельная теорема Дубом (РЖМат, 1957, 5755). Далее принцип инвариантности доказывается для m-зависимой последовательности случайных величин, для линейных процессов с m-зависимыми остатками и для числа появлений рекуррентных событий.

И. И. Гихман

6946. **Одна теорема восстановления. Кавата** (A renewal theorem. Kawata Tatsuo), J. Math. Soc. Japan, 1956, **8**, № 2, 118—126 (англ.)

Доказывается следующая теорема. Пусть X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — независимые случайные величины с функциями распределения $F_i(x)$ и математическими ожиданиями $m_i > 0$, такие, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} dF_n(x) < \infty \quad \text{при } 0 \leqslant s \leqslant s_0,\ s_0 > 0$$

и равномерно по n и $0 \leqslant s \leqslant s_0$

$$\lim_{A\to\infty} \int_A^\infty x\,dF_n(x) = 0,$$

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-\infty}^{-A} e^{-sx}\,dF_n(x) = 0.$$

Если существует положительный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i = m,$$

то

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^x \sum_{n=1}^\infty P\{x < S_n \leqslant x+h\}\,dx = h/m,$$

где $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. А. А. Юшкевич

6947. К вопросу о поведении остаточного члена в условиях теоремы Ляпунова. Студнев Ю. П., Научн. зап. Ужгородск. ун-та, 1957, 18, 183—189

Пусть независимые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ имеют одну и ту же функцию распределения $F(x)$. Пусть $M\xi_i = 0$, $M\xi_i^2 = 1$ (в статье эти условия пропущены) и

$$F_n(x) = P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i < x\right\},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\frac{-z^2}{2}\,dz.$$

Если величины ξ_i имеют абсолютный момент порядка $2+\alpha$ $(0<\alpha<1)$, то, как известно,

$$|F_n(x) - \Phi(x)| < \text{const}\cdot n^{-\alpha/2}.$$

Автор приводит пример, в котором для любого $\gamma > 0$

$$n^{-(\alpha+\gamma)/2} \sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - \Phi(x)| \to \infty.$$

Если же величины ξ_i не имеют абсолютных моментов порядка выше 2, то показывается, что для любого β, $0<\beta<1/2$,

$$|F_n(x) - \Phi(x)| < \text{const}\cdot\sigma(n^\beta),$$

где

$$\sigma(x) = \int_{|z|\geqslant x} z^2\,dF(z).$$

В частности, отсюда следует для

$$dF(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leqslant e \\ \text{const}\,|x|^{-3}(\ln|x|)^{-2}\,dx & \text{при } |x| > e \end{cases}$$

оценка

$$|F_n(x) - \Phi(x)| < \text{const}\cdot(\ln n)^{-1};$$

без доказательства сообщается, что в этом примере оценка не может иметь степенного порядка малости.

Чтение статьи затрудняют многочисленные опечатки.

Примечание референта. В доказательстве оценки через σ автор пользуется утверждением: «Если

$$\int_{-\infty}^\infty x^2\,dF(x) < +\infty,$$

а при любом $\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^\infty |x|^{2+\alpha}\,dF(x) = \infty,$$

то для любого постоянного k

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F(x) + F(-x)}{1 - F(kx) + F(-kx)} = k^2,$$

которое опровергается примером:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{2+\sin\ln(x^2)}{4x^2(1+\ln|x|)^2} & \text{при } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{при } -1 < x \leqslant 1, \\ 1 - \dfrac{2+\sin\ln(x^2)}{4x^2(1+\ln|x|)^2} & \text{при } 1 < x \end{cases}$$

(для этой функции распределения указанный предел не существует). Однако доказательство, по-видимому, поддается исправлению. Г. Н. Сакович

6948. Стационарность, ограниченность и почти-периодичность функций со случайными значениями. Бохнер (Stationarity, boundedness, almost periodicity of random-valued functions. Bochner S.), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 2. Berkeley—Los Angeles, 1956, 7—27 (англ.)

Рассматриваются функции $x(t)$ и $y(t)$ со значениями из банахового пространства B; в большей части статьи пространство B предполагается даже гильбертовым, причем все время имеется в виду конкретное гильбертово пространство случайных величин ограниченной дисперсии со скалярным произведением $(x, y) = \mathrm{M}x\bar{y}$ (M — символ математического ожидания). Через Λ обозначается дифференциально-разностный оператор:

$$\Lambda x(t) = \sum_{\rho=0}^r \sum_{\sigma=0}^s c_{\rho\sigma} \frac{d^\rho x(t-\tau_\sigma)}{dt^\rho}, \qquad (1)$$

или же более общий интегро-дифференциальный оператор:

$$\Lambda x(t) = \sum_{\rho=0}^r \int_{-\infty}^\infty \frac{d^\rho x(t-\tau)}{dt^\rho}\,dC_\rho(\tau) \qquad (1')$$

(при применении этих операторов к функциям со значениями из B дифференцирование всегда понимается в смысле сильной топологии). Основная часть статьи посвящена изучению решений уравнения

$$\Lambda x = y, \qquad (2)$$

где $y = y(t)$ — заданная функция, обладающая определенными специальными свойствами.

После вводного § 1 в § 2 рассматривается случай, когда функции $x(t)$ и $y(t)$ — стационарные в широком смысле (в смысле Хинчина). Указываются известные спектральные разложения стационарных функций и отвечающих им корреляционных функций; отмечается связь спектральных разложений функций $x(t)$ и $y(t)$ между собой, и даются условия (в терминах спектральной функции), при которых уравнение (2) с данными Λ и $y(t)$ имеет стационарное решение $x(t)$. Наряду с обычными решениями уравнения (2) рассматриваются также более общие, так называемые слабые решения, изучавшиеся ранее Дубом (Doob J. L., Ann. Math. Statistics, 1944, 15, 229—282) в частном случае чисто дифференциального оператора Λ); для них также указываются условия существования такого решения, а так-

же условия, при которых каждое слабое решение будет также и обычным (сильным) решением. Аналогичные результаты указываются для еще более общих, обобщенных решений (называемых автором «символическими»), понимаемых или в обычном смысле Ито—Гельфанда (РЖМат, 1957, 8795; Itô K., Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1954, A28, № 3, 209—223) или же в смысле, предложенном автором (РЖМат, 1954, 1274); отмечается возможное обобщение их на случай функций x и y от точек многомерного пространства («полей x и y»).

В § 3 рассматривается случай ограниченной (в смысле сильной топологии в B) функции $x(t)$. Показывается возможность перехода в этом случае от функций x и y, удовлетворяющим (2) в слабом смысле, к «сглаженным» (при помощи заданной весовой функции $\varphi(t)$) функциям, удовлетворяющим тому же уравнению в обычном смысле; строится обобщение спектрального разложения на случай произвольных ограниченных (не обязательно стационарных) функций $x(t)$, и указывается, как переносятся на эти разложения результаты § 2. Специально рассматривается случай функции $x(t)$ с «чисто точечным спектром»; для случая операции Λ, для которой «спектральная функция» $T(\alpha)$ (равная $\Sigma_\rho \Sigma_\sigma c_{\rho\sigma} (2\pi i\alpha)^\rho \times e^{2\pi i \alpha \tau_\sigma}$ в случае (1) и $\Sigma_\rho (2\pi i\alpha)^\rho \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\alpha\tau}\, dC_\rho(\tau)$ в случае (1')) имеет конечное или же счетное число нулей, указываются некоторые простые условия, при которых решения (2) отсутствуют, а решения однородного уравнения $\Lambda x = 0$ оказываются в определенном смысле «почти-периодическими». Кратко указываются возможности обобщения найденных результатов на «преобразования Фурье высшего порядка» (например, типа $x(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \alpha t} \frac{d^2 E(\alpha)}{d\alpha}$) и на функции нескольких переменных.

В § 4 рассматривается случай V-ограниченных функций, рассмотренных впервые (в применении к числовым функциям) в работах автора (Bull. Amer. Math. Soc., 1934, 40, 271—276) и Шёнберга (Schoenberg I. J., там же, 1934, 40, 272—276). Напоминаются результаты о возможности спектрального представления V-ограниченных функций; указывается ряд условий V-ограниченности (которым удовлетворяют, в частности, все стационарные функции и «функции с гармонизируемой корреляционной функцией», по поводу которых см. РЖМат, 1954, 5676 К) и переносятся на V-ограниченные функции некоторые результаты § 2 и § 3.

В § 5 вводится понятие CT-ограниченности, получаемое путем некоторого ослабления условия почти-периодичности в смысле Бора. Указываются некоторые условия, при которых CT-ограниченное решение уравнения (2) обязательно оказывается почти-периодичным, или же из существования CT-ограниченного решения следует существование также и почти-периодического решения. В заключительном § 6 рассматриваются функции интервала $X(\Delta)$; для таких функций определяются понятия $L_{2,2}$-ограниченности и стационарности (см. также РЖМат, 1957, 2526) и указываются некоторые простые следствия этих определений.

А. М. Яглом

6949. Случайное блуждание в многомерных пространствах, особенно на периодических решетках. Монтролл (Random walks in multidimensional spaces, especially on periodic lattices. Montroll Elliot W.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1956, 4, № 4, 241—260 (англ.)

Пусть $m = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$ — точка на k-мерной целочисленной решетке. Рассматривается случайный процесс, в котором переход за 1 шаг из точки $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ возможен лишь в одну из точек $(m_1, m_2, \ldots, m_i \pm 1, \ldots, m_k)$ $(i = 1, 2 \ldots k)$, причем вероятности перехода за один шаг в точки $(m_1, \ldots, m_i + 1, \ldots, m_k)$ и $(m_1, \ldots, m_i - 1, \ldots, m_k)$ равны между собой, но могут зависеть от i. Такой случайный процесс рассматривается сначала при периодических граничных условиях с периодом N, что соответствует блужданию по N^k точкам k-мерного тора. В этом случае находится точное выражение для $P(m, \nu)$—вероятности перехода из нуля в m за ν шагов.

Далее изучается случай неограниченной решетки с помощью предельного перехода $N \to \infty$. Производящая функция вероятностей перехода $G(m, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \times P(m, \nu) y^{-\nu}$ выражается через функции Бесселя. Далее автор использует это представление для получения вероятности возвращения когда-нибудь в исходную точку для одномерного, двумерного и трехмерного блужданий. Эти результаты обобщают известные результаты Пойа для симметрического блуждания. Для этого случая получена следующая формула для вероятности $f(k)$ возвращения когда-нибудь в исходное состояние при блуждании по k-мерной решетке:

$$f(k) = 1 - \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha} \left\{I_0\left(\frac{\alpha}{k}\right)\right\}^k d\alpha\right]^{-1}$$

($I_0(x)$ — нулевая функция Бесселя).

Далее эти результаты обобщаются на случай более сложно устроенных решеток, встречающихся в кристаллах. В работе рассматриваются и некоторые другие типы блуждания.

Р. З. Хасьминский

6950. Замечание об интерполяции однородного случайного поля на точках решетки в R_k. Ван Шоужэнь (Wang Shou-jen), Шусюэ цзиньчжань, 1957, 3, № 2, 257—262 (кит.; рез. англ.)

Пусть $\xi(n_1, \ldots, n_k)$ — однородное случайное поле на точках решетки в R_k с абсолютно непрерывной спектральной функцией. Пусть $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ — ее спектральная плотность. Исследуется задача интерполяции $\xi(m_1, \ldots, m_k)$ всеми другими значениями $\xi(n_1, \ldots, n_k)$; получен следующий результат:

$$\lim_{N\to\infty} \min_b E\{|\xi(m_1, \ldots, m_k) - \sum_{a_k=m_k-N}^{m_k+N} \cdots \sum_{a_1=m_1-N}^{m_1+N} b_{a_1 \ldots a_k} \xi(a_1, \ldots, a_k)|^2\} =$$

$$(a_1, \ldots, a_k) \neq (m_1, \ldots, m_k)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\int_{-1/2}^{1/2} \cdots \int_{-1/2}^{1/2} \dfrac{d\lambda_1 \ldots d\lambda_k}{f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)}}, & \text{если } \dfrac{1}{f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)} \in L, \\ 0, & \text{если } \dfrac{1}{f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)} \notin L. \end{cases}$$

Резюме автора

6951. Предельные теоремы для ветвящихся случайных процессов специального вида. Севастьянов Б. А., Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 3, 339—348 (рез. англ.)

Рассматривается следующая схема размножения частиц: каждая частица независимо от происхождения, возраста и судьбы других частиц с вероятностью $\delta_{k1} + p_k \Delta t + o(\Delta t)$ превращается за промежуток времени $\Delta t \to 0$ в k частиц. Кроме того, независимо от

наличия какого-либо числа частиц с вероятностью $\delta_{k0} + q_k \Delta t + o(\Delta t)$ за $\Delta t \to 0$ возникает k частиц, которые в дальнейшем испытывают превращения по описанной выше схеме ветвящегося процесса. Символ $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Введем производящие функции $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ и $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$. Обозначим $f'(1) = a_1$, $f''(1) = b_1$, $f'''(1) = c_1$, $g'(1) = a_2$, $g''(1) = b_2$ и $S_t(y) = P\left\{\frac{\mu_t}{a_2 t} < y\right\}$, где μ_t — число частиц в момент времени t ($P\{\mu_0 = 0\} = 1$).

Изучение описанной схемы превращений частиц сводится автором к изучению ветвящегося процесса с двумя типами частиц. Получены теоремы:

1. Если $a_1 < 0$, $a_2 < \infty$, то

$$\lim_{t\to\infty} P\{\mu_t = k\} = P_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} P_k x^k = \exp \int_x^1 \frac{g(y)}{f(y)}\, dy.$$

2. Если $a_1 = 0$ и $b_1 > 0$, c_1, a_2, b_2 ограничены, то

$$S_t(y) \underset{t\to\infty}{\to} S(y) =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \dfrac{\left(\frac{2a_2}{b_1}\right)^{\frac{2a_2}{b_1}}}{\Gamma\left(\frac{2a_2}{b_1}\right)} \displaystyle\int_0^y y^{\frac{2a_2}{b_1}-1} e^{-\frac{2a_2}{b_1} y}\, dy, & y \geqslant 0. \end{cases}$$

3. Если $a_1 > 0$, b_1, a_2, b_2 ограничены, то

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\mu_t}{e^{a_1 t}} < y\right\} = S(y).$$

Для $S(y)$ найдена характеристическая функция.

В. П. Чистяков

6952. Уточнение ряда теорем теории ветвящихся случайных процессов. Золотарев В. М., Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 2, 256—266 (рез. англ.)

Рассматривается однородный по времени (время непрерывно) ветвящийся случайный процесс. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ — его производящая функция. $a = f'(1)$, $b = f''(1)$, $c = f'''(1)$ и т. д. — факториальные моменты, μ_t — число частиц в момент t; $Q(t) = 1 - P\{\mu_t = 0\}$. Для такого процесса известные предельные теоремы А. Н. Колмогорова, А. М. Яглома, Б. А. Севастьянова были получены ими в предположении $b < \infty$, если $a \neq 0$ и $c < \infty$, если $a = 0$. Автор отказывается от требования конечности моментов b и c.

Назовем функцию $g(x)$ правильно меняющейся в нуле, если для любого $k > 0$ существует конечный $\lim_{x\to 0} \frac{g(kx)}{g(x)} = c(k) \neq 0$. В доказательствах автор отправляется от равенства $\int_x^F \frac{du}{f(u)} = t$, задающего $F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\mu_t = n\} x^n$ в неявной форме, а также пользуется полученной им леммой: дифференцируемая функция $g(x)$ будет правильно меняющейся в нуле с показателем γ тогда и только тогда, когда $\lim_{x\to+0} \frac{xg'(x)}{g(x)} = \gamma$.

Основные результаты:

1. Для процессов с $a < 0$ установлены необходимые и достаточные условия представления $Q(t)_{t\to\infty} \sim Ke^{at}$ (для K дается явное выражение) и доказана сходимость распределения $S_t(y) = P\{\mu_t < y \mid \mu_t > 0\}$ к собственному дискретному распределению для всех процессов с $a < 0$.

2. Если $a = 0$ и $f(1-x)$ — правильно меняющаяся в нуле функция, с показателем $1 < \gamma = 1 + \alpha \leqslant 2$, то при $t \to \infty$

$$S_t(y \mid Q) \to S_\alpha(y) =$$

$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{\alpha}{\Gamma(1/\alpha)} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(x/u)^\alpha} p(u, \alpha, 1)\, du, & 0 < \alpha < 1, \\ 1 - e^{-y}, & \alpha = 1, \end{cases}$$

$p(u, \alpha, 1)$ — плотность устойчивого распределения с параметрами $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1$.

3. Для процессов с $0 < a < \infty$ найдена нормирующая функция σ_t и доказано, что $S_t(y/\sigma_t)$ сходится к собственному распределению, характеристическая функция которого задается функциональным уравнением.

4. Для процессов всех трех типов $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$ получены асимптотические формулы для вероятностей $P\{\mu_t = n\}$ (n — фиксировано) при $t \to \infty$.

Примечание референта. В доказательстве теоремы 8 (стр. 262) вместо

$$\int_R^{\frac{1-\lambda}{2}} \frac{du}{f(1-u)} = 1 - \int_{\frac{1-\lambda}{2}}^{\theta_2 S\sigma_t} \frac{du}{f(1-u)} \int_{\theta_s s\sigma_t}^{\sigma_t} \frac{du}{f(1-u)}$$

должно быть

$$\int_R^{\frac{1-\lambda}{2}} \frac{du}{f(1-u)} = t - \int_{\frac{1-\lambda}{2}}^{1-e^{-s\sigma_t}} \frac{du}{f(1-u)} =$$

$$= \int_{1-e^{-s\sigma_t}}^{\sigma_t} \frac{du}{f(1-u)}.$$

В. П. Чистяков

6953. О некоторых проблемах теории стохастической связи. Леви (Sur quelques problèmes de la théorie des liaisons stochastiques. Lévy Paul), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 10, 1313—1316 (франц.)

Приводятся некоторые замечания по поводу возможности представления заданной последовательности случайных величин X_ν (конечной или счетной) в виде $f_\nu(U)$ или $f_\nu(U, U_\nu)$, где U и U_ν — независимые случайные величины. Дано краткое доказательство одной теоремы Дармуа (РЖМат, 1956, 5376): Если случайные величины X, Y, U и V связаны соотношениями

$$Y = aX + U, \quad X = bY + V,$$

где $ab \neq 0$, U и V не зависят соответственно от X и Y, то они имеют нормальное распределение.

Приводятся также некоторые уточнения формулировок предыдущих работ автора (C. r. Acad. sci., 1948, 227, 499; РЖМат, 1956, 8520; 1958, 5799). И. И. Гихман

6954. Эргодические свойства некоторых простых стохастических процессов. Рамакришнан (Ergodio properties of some simple stochastic processes. Ramakrishnan Alladi), Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, № 9—10, 336—344 (англ.; рез. нем., франц., русск.)

Рассматриваются марковские процессы с конечным множеством состояний, для которых вероятности перехода $\Pi(i \mid j; t)$ удовлетворяют при $t \to 0$ соотношениям

$$\Pi(i \mid j; t) = \begin{cases} R(j \mid i)\, t + 0(t^2), & \text{если } j \neq i, \\ 1 - t \sum\limits_{k,\, k \neq i} R(k \mid i)\, t + 0(t^2), & \text{если } j = i. \end{cases}$$

Предполагается, что любые два состояния l и k могут быть связаны цепочкой состояний $i_1, i_2, \ldots, i_s$, такой, что все числа $R(i_1 \mid l)$, $R(i_n \mid i_{n+1})$, $R(k \mid i_s)$ больше нуля ($1 \leqslant n \leqslant s-1$). Автор также неявно предполагает сепарабельность изучаемого процесса. Для процессов с указанными свойствами изучается асимптотическое поведение при $s \to \infty$ моментов случайной величины $\tau(j; s)$, равной времени, проведенному частицей в состоянии j до момента $t = s$. Показывается, что $\tau(j, s)$ при $s \to \infty$ сходится по вероятности к $\Pi(j)$, где $\Pi(j)$ — стационарное распределение вероятностей для изучаемого процесса. М. Г. Шур

6955. Стохастические процессы, связанные с интегралами от некоторого класса случайных функций. Матьюс, Сринивасан (Stochastic processes associated with integrals of a class of random functions. Mathews P. M., Srinivasan S. K.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1956, **A22**, № 6, 369—376 (англ.)

Пусть $x(t)$ — пуассоновский процесс и

$$y_0(t) = \int_0^t \varphi_0(\tau)\, dx(\tau),$$

$$y_1(t) = \int_0^t \varphi_1(\tau)\, y_0(\tau)\, d\tau,$$

. . . . . .

$$y_m(t) = \int_0^t \varphi_m(\tau)\, y_{m-1}(\tau)\, d\tau,$$

где $\varphi_i(\tau)$ — заданные действительные функции. Набор случайных величин $(y_1, \ldots, y_m)$ образует марковский процесс. Авторы выписывают дифференциальное уравнение для совместной плотности величин $y_1, \ldots, y_m$ и решают его методом преобразований Лапласа. Они находят характеристическую функцию и первые три момента величины $y_m(t)$. Более подробно исследуются следующие частные случаи: 1) $m = 0$, 2) $m = 1$, $\varphi_1(\tau) \equiv 1$ или $\varphi_1(\tau) = e^{-\tau}$, 3) $\varphi_i(\tau) \equiv 1$, $i = 0, \ldots, m$. Указываются физические приложения. Р. Л. Добрушин

6956. О распределении верхней грани для процессов со стационарными независимыми приращениями. Бакстер, Донскер (On the distribution of the supremum functional for processes with stationary independent increments. Baxter Glen, Donsker M. D.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 85, № 1, 73—87 (англ.)

В работе рассматривается сепарабельный стохастический процесс $X(t)$ со стационарными независимыми приращениями ($X(0) = 0$). Характеристическая функция такого процесса имеет представление $e^{T \cdot \psi(\xi)}$, где $\psi(\xi)$ выражается известной формулой Леви — Хинчина. Изучается функция распределения $\sigma(\alpha, T) = P\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} X(t) < \alpha\}$. В некоторых частных случаях функция $\sigma(\alpha, T)$ точно вычисляется. В работе получена формула, выражающая двойное преобразование Лапласа от $\sigma(\alpha, T)$ в терминах $\psi(\xi)$. А именно, доказывается следующая Теорема 1. Для всех положительных u и λ:

1) если $\psi(\xi)$ действительно, то

$$u \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-uT - \lambda\alpha} \cdot d_\alpha \sigma(\alpha, T)\, dT =$$

$$= \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_u^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \xi^2} \frac{\psi(\ )'}{s[s - \psi(\xi)]}\, ds \right\}, \quad (1)$$

2) если $\psi(\xi)$ комплексно и для некоторого $\delta > 0$ $\int_{-\delta}^{+\delta} \left| \frac{\psi(\xi)}{\xi} \right| d\xi < a$, то

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-uT - \lambda\alpha}\, d_\alpha \sigma(\alpha, T)\, dT =$$

$$= \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_u^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda \cdot \psi(\xi)\, d\xi}{\xi(\xi - i\lambda)\, s[s - \psi(\xi)]}\, ds \right\}. \quad (2)$$

Если интегрирование по s и ξ в правой части (1) и (2) можно поменять местами, то результат получается более простой.

Теорема 1 применяется, далее, к некоторым конкретным процессам, причем в ряде случаев полученные выражения для двойного преобразования Лапласа можно обратить и получить выражения для $\sigma(\alpha, T)$.

В качестве примеров разбираются гауссовский, пуассоновский и симметричный устойчивый процессы. Рассматривается также следующий процесс, важный в теории коллективного риска и рассматривавшийся Таклундом.

Пусть $X(t) = \sum_1^{N(t)} \xi_i$, где ξ_i независимы между собой и от $N(t)$ и $P\{\xi_i = -1\} = P\{\xi_i = 1\} = 1/\alpha$, а $N(t)$ распределено по закону Пуассона. Тогда $P\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} X(t) < n\} = 1 - n \int_0^T e^{-\alpha t} \frac{I_n(at)}{t}\, dt$, где $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$, а $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода.

В случае, когда аналитическая функция комплексного переменного $\psi(z) - u$ имеет лишь простые нули в нижней полуплоскости, интегралы в правой части (1) и (2) выражаются явно. Р. З. Хасьминский

6957. Статистические свойства на выходе частотно-избирательного устройства. Артур (The statistical properties of the output of a frequence sensetive device. Arthur George R.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 9, 1185—1195 (англ.)

Рассматриваемое устройство автор предлагает описывать как оператор, переводящий вероятностный процесс $\zeta(t)$ (процесс на входе) в вероятностный процесс

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t - \theta) \{[\zeta_1(\theta)]^2 - [\zeta_2(\theta)]^2\}\, d\theta,$$

где

$$\zeta_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{Q}_1(t - \tau)\, \zeta(\tau)\, d\tau, \quad \zeta_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{Q}_2(t - \tau)\, \zeta(\tau)\, d\tau.$$

Автор предполагает, что $\zeta(\tau)$ — стационарный гауссовский процесс, и ставит своей целью изучить распределение величины $\eta(t)$ (процесс на выходе). Он замечает, что так как гауссовский стационарный процесс (с абсолютно непрерывной спектральной плотностью. *Реф.*) представим

в виде

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(t-\tau)\,\beta(\tau)\,d\tau,$$

где $\beta(t)$ — белый шум с неограниченным спектром (строгое толкование этого понятия см. в работах по обобщенным случайным процессам Гельфанда (см. РЖМат, 1957, 8795) и Ито (Itô K., Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1954, A28, № 3, 209—223), то для некоторых функций $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$

$$\zeta_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{Q}_1(t-\tau)\,\beta(\tau)\,d\tau,\ \zeta_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{Q}_2(t-\tau)\,\beta(\tau)\,d\tau.$$

Автор использует затем следующий полезный факт, указанный впервые Кацом и Зигертом (Kac M., Siegert J. F., J. Appl. Phys., 1947, 18, 383—397) и не вошедший еще, по-видимому, в математическую литературу; если $\{x_n(t)\}$ — полная система ортонормированных функций, то

$$\beta(t) = \sum \gamma_n x_n(t),$$

где γ_n — независимые гауссовские величины с параметрами (0,1). Пусть

$$R(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\,[\overline{Q}_1(s-\tau)\,\overline{Q}_1(t-\tau) - \overline{Q}_2(s-\tau)\,\overline{Q}_2(t-\tau)]\,d\tau.$$

Выбрав в качестве $x_n(t)$ систему собственных функций интегрального уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,R(s,t)\,dt = \lambda x(s), \qquad (1)$$

автор приходит в результате простых вычислений к выводу, что

$$\eta(0) = \sum \lambda_i \gamma_i^2, \qquad (2)$$

где λ_i — собственные значения уравнения (1). Из формулы (2) выводятся формулы для характеристической функции и для семи инвариантов величины $\eta(0)$. Более полно изучается тот частный случай, когда фильтры K, $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$ являются гауссовскими (т. е. когда соответствующие функции совпадают с точностью до множителя с плотностью нормального распределения). Показывается, что если фильтр «узкий» (т. е. если преобразование Фурье функции $K(t)$ существенно отличается от нуля лишь в узкой полосе), то распределение $\eta(0)$ близко к гауссовскому. Проводится также качественное обсуждение результатов.

Особо изучается простейший случай, когда

$$\eta(t) = [\zeta_1(t)]^2 - [\zeta_2(t)]^2$$

(т. е. когда $K(0)$ есть δ-функция). Здесь уравнение (1) имеет лишь два собственных значения, отличных от нуля, и

$$\eta(0) = \lambda_1 \gamma_1^2 - \lambda_2 \gamma_2^2. \qquad (3)$$

Строятся графики плотности величины (3). Указываются асимптотические формулы для плотности при значениях аргумента, близких к 0 и ∞. Р. Л. Добрушин

6958. Измерительная техника и теория информации. Тарьян Резо, Измерит. техника, 1957, № 2, 22—25

Отождествляется модель процесса измерения и модель системы связи Шеннона, что создает возможности изучения первой методами второй.

Известное соотношение теории информации записывается в форме

$$WT = H/2\ln(1 + S/N) = \text{const},$$

аналогичной соотношению неопределенности Гейзенберга $\Delta E\,\Delta t = h = \text{const}$, где ширина полосы канала W соответствует энергии ΔE, время измерения T — времени наблюдения Δt, постоянная Планка h — емкости канала H при фиксированном отношении сигнал/шум S/N. Последняя аналогия оправдывает естественный вывод об увеличении точности измерения увеличением длительности измерения при заданном уровне шумов.

Кроме приведенных аналогий и общих соображений, автор не видит какой-либо непосредственной помощи, которая могла бы быть оказана теорией информации измерительной технике. Обращаясь к статистической теории сигналов на фоне шумов, автор отмечает очевидное отсутствие задачи обнаружения теорий связи в случае измерения; остается лишь общая для них задача выделения (измерения) сигнала. Необходимые для решения этой задачи статистики сигналов и шумов не изучены. Не указывая на принципиальную разницу при решении задачи выделения сигнала методом оптимальной фильтрации и методом накопления, автор отдает предпочтение последнему лишь из аппаратурных соображений. В заключение приводится новая схема накопительного устройства. Б. С. Флейшман

6959. Предельные условия, наложенные на свойства корреляции случайного сигнала. Краус, Пёцль (Limiting conditions on the correlation properties of random signals. Kraus G., Pötzl H.), IRE Trans. Circuit Theory, 1956, 3, № 4, 282—285 (англ.)

Основной результат, доказываемый авторами, состоит (если перейти от используемой авторами эмпирической терминологии к четкому языку современной теории вероятностных процессов) в том, что для того, чтобы матричная функция $B(f)$ задавала спектральные плотности многомерного процесса, необходимо и достаточно, чтобы значения этой функции были эрмитовыми неотрицательно-определенными матрицами. Этот широко известный результат (см. РЖМат, 1957, 5755) был впервые получен Крамером (Cramer H., Ann. Math., 1940, 41, 215—230). Р. Л. Добрушин

6960. Об одном интегральном уравнении из теории фильтрации с нестационарными данными на входе. Шинброт (On the integral equation occurring in optimization theory with nonstationary inputs. Shinbrot Marvin), J. Math. and Phys., 1957, 36, № 2, 121—129 (англ.)

Теория Винера об анализе (фильтрации) временных рядов (Wiener Norbert. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1949) предполагает стационарность данных явлений. Это существенно ограничивает область применения этой теории. Бутону (Booton Richard C. Jr, Meteor. Rep. 72, MIT Dynamic Analysis and Control Laboratory, July 1951) принадлежит некоторое обобщение теории Винера на системы, зависящие от времени, с нестационарными данными на входе. (В конце реферируемой работы дается краткое изложение результатов Бутона). Бутон установил не-

которое интегральное уравнение, решение которого представляет собой требуемый результат проблемы оптимальной (в смысле наименьших квадратов) аппроксимации. В реферируемой статье дается решение этого интегрального уравнения:

$$\chi(\tau, t) = \int_{-\infty}^{t} g(t, \sigma)\, \varphi(\tau, \sigma)\, d\sigma \quad (\tau \leqslant t),$$

где χ и φ — данные корреляционные функции, $\varphi(\tau, \sigma) = \varphi(\sigma, \tau)$, g неизвестно, в предположении, что: 1) φ и ψ можно представить в виде

$$\varphi(\tau, t) = \sum_{\rho=1}^{t} a_\rho(t)\, b_\rho(\tau), \quad \psi(\tau, t) = \sum_{\rho=1}^{t} c_\rho(t)\, b_\rho(\tau)$$

для $\tau \leqslant t$ и 2) $\Sigma_\rho [a_\rho(t)\, b_\rho(\tau) - a_\rho(\tau)\, b_\rho(t)]$ зависит только от разности $t - \tau$. (В сноске автор сообщает, что второе предположение можно отбросить, используя другой метод доказательства.) Дается пример, который не укладывается в рамки теории Винера, а полностью решается новым методом. В. Рихтер

6961. Элементарное доказательство теоремы о кодировании для некоторых простых случаев. Барнард (Simple proofs of simple cases of the coding theorem Barnard G. A.), Inform. Theory 3rd London Sympos., 1955. London, 1956, 96—100; discuss, 100—102 (англ.)

Рассматривается канал с шумами. По каналу передаются сообщения, закодированные последовательностями, состоящими из символов A и B. Вероятность $P(B|A)$ приема B при условии, что передано A, равна p ($p<1/2$); также и $P(A|B) = p$. Приводятся элементарные доказательства двух теорем:

1. Пусть сообщения кодируются последовательностями длины n, выбираемыми путем случайной выборки объема n из 2^n возможных последовательностей. P — вероятность правильного декодирования. Тогда $\lim_{n\to\infty} P = 1$.

2. Пусть даны числа ε, k, причем $\varepsilon > 0$ и $k < 1 + p\log_2 p + q\log_2 q$ ($q = 1 - p$). Тогда существует метод кодирования такой, что скорость передачи информации больше k, а вероятность неправильного декодирования меньше ε. В. П. Швальб

6962. Асимптотические свойства цепей с полными связями. Чуку (Propriétés asymptotiques des chaines à liaisons complètes. Ciucu George), Attî Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, **23**, № 1—2, 11—15 (франц.)

Изучаются в различных предположениях цепи с полными связями.

Пусть цепь с полными связями имеет счетное множество S состояний и вероятности перехода есть $P_x^1(c)$ (здесь $x \in S$, а c — произвольная последовательность точек S). Пусть для любых точек x_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) и последовательностей точек из S $c_k = \{x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, y_0^k, y_{-1}^k, \ldots, y_{-n}^k, \ldots\}$ $P_x^1(c_1) = P_x^1\{c_2\}(1 + \theta\varepsilon_n)$, где $|\theta| = |\theta(c_1, c_2, x, n)| \leqslant 1$, $\varepsilon_n \geqslant 0$ и $\Sigma_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n < \infty$, и пусть для любых последовательностей c и d и некоторого $\lambda > 0$ $P_x^1(c) \geqslant \lambda P_x^1(d)$. Тогда существует равномерный по x и c предел $\lim_{n\to\infty} P_x^n(c)$, не зависящий от c. Для цепей с полными связями с непрерывным множеством состояний, вероятности перехода которых обладают плотностями, формулируется аналогичное утверждение.

Доказательства отсутствуют. М. Г. Шур

6963. О локальной безграничной делимости марковских процессов. Мартынов А. В., Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 4, 752—755

Автор называет совокупность функций распределения $\{P(t, x)\}$, $t \in T$, где T — произвольное точечное множество вещественной прямой, дифференцируемой справа в точке t_0, если

$$\lim_{\substack{t\to t_0+0 \\ t\in T}} \frac{1}{t - t_0} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{irx} - 1)\, d_x P(t, x) = \varphi_{t_0}^{+}(r),$$

где $\varphi_{t_0}^{+}(r)$ — конечная на $(-\infty, \infty)$ функция, а предел имеет место равномерно по z в каждом конечном промежутке.

Теорема 1. Если совокупность функций распределения $\{P(t, x)\}$ с параметром $t \in T$ дифференцируема справа в точке t_0, то $\varphi_{t_0}^{+}$ представляется формулой Леви — Хинчина, т. е.

$$\varphi_{t_0}^{+}(z) = izm_{t_0}^{+} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1 + x^2}\right) \frac{1 + x^2}{x^2}\, d_x G_{t_0}^{+}(x),$$

где $G_{t_0}^{+}$ — ограниченная неубывающая функция. Функция $G_{t_0}^{+}(x)$ в точках непрерывности определяется однозначно. Аналогичное предложение имеет место в случае левой дифференцируемости.

Автор подробно разбирает условия, при которых имеет место дифференцируемость справа совокупности $\{P(t, x)\}$, а также решает обратную задачу:

Пусть задана функция вида

$$\alpha(x, z) = irm(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iz\xi} - 1 - \frac{iz\xi}{1 + \xi^2}\right) \frac{1 + \xi^2}{\xi^2}\, d_\xi G(x, \xi).$$

Указываются условия, при которых существует однородный во времени марковский процесс, заданный переходной функцией распределения $P(t, x, y)$ и удовлетворяющий при всяком x условию

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{izy} - 1)\, d_y P(t, x, x + y) = \alpha(x, r).$$

В классе однородных по времени марковских процессов $P(t, x, y)$, измеримых по x и по t в смысле Лебега, этот процесс единственный.

Указанные автором условия являются более слабыми, чем соответствующие условия Ито (Ito K., Mem. Amer. Math. Soc., 1951, № 4). В. Г. Винокуров

6964. О невозвратных цепях Маркова с приложением к проблеме единственности для марковских процессов. Брейман (On transient Markov chains with application to the uniqueness problem for Markov processes. Breiman Leo), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 2, 499—503 (англ.)

В работе продолжены исследования Блекуэлла (РЖМат, 1957, 4993, 1957), назвавшего атомом множество C состояний счетной однородной цепи Маркова, такое, что для любого счетного подмножества $A \subset C$ совпадают (с точностью до множеств вероятности нуль) два события: система бесконечное число раз попадает в A и система бесконечное число раз попадает в C. В работе дается критерий для того, чтобы заданное множество состояний было атомом, в терминах свойств решений некоторого неравенства. Далее приводится теорема о сходимости рядов, образованных функциями от состояния системы, обобщающая известную теорему о трех рядах для независимых величин. Полученные результаты применяются к исследованию вопроса о един-

ственности однородного марковского процесса с непрерывным временем с заданными плотностями вероятностей выхода a_{ij}. Автор, прилагая известную теорему Феллера (Feller W., Trans. Amer. Math. Soc., 1940, 48, 488—515) и собственные результаты, находит необходимые и достаточные условия единственности для процесса размножения и гибели (здесь $i = \ldots,-1,0,1\ldots$ $\ldots, a_{ij}$ при $|i-j| \neq 1$) и для однородного по пространству процесса (здесь $a_{ij} = q_i\, b_{j-i}$). Как отмечается в статье первый из этих двух случаев рассматривался ранее различными авторами. Г. Л. Добрушин

6965. **Однородные марковские процессы с непрерывными траекториями. Рей** (Stationary Markov processes with continuous paths. Ray Daniel), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 2, 452—493 (англ.)

При изучении однородных по времени марковских процессов на прямой Феллер (Feller W., Ann. Math., 1954, 60, 417—436) выделил класс процессов, удовлетворяющих следующим двум условиям:

A_0. Оператор T_t, определяемый формулой

$$T_t f(x) = \int f(y)\, P(x, t, dy),$$

при любом $t > 0$ переводит ограниченные непрерывные функции $f(y)$ в непрерывные функции.

B_0. Для любого x и любого $\delta > 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{P(x, t, I_\delta(x))}{t} = 0,$$

где $I_\delta(x)$ — дополнение интервала $(x-\delta, x+\delta)$. Феллер высказал предположение, что при условии A_0 требование B_0 эквивалентно следующему:

1) траектории процесса при любом начальном распределении можно считать непрерывными, за исключением скачков из $\pm\infty$. Автор вводит еще одно условие:

2) процесс является строго марковским для момента первого достижения изнутри границы любого конечного интервала. Через B_0 обозначим условие, состоящее в том, что B_0 выполняется равномерно по x на любом конечном интервале.

Доказываются (там, где требуется, строятся соответствующие примеры) следующие соотношения между этими условиями.

Из 1) и 2) следует $\overline{B}_0$, причем в многомерном случае это уже несправедливо. Из 1) не следует ни 2), ни B_0. Из 1) и A_0 следует 2). Из 1) и 2) не следует A_0.

Из A_0 и B_0 следует 1), из $\overline{B}_0$ следует 1), причем в обоих случаях одномерность процесса несущественна. Из B_0 не следует 1).

В частности, если выполнено A_0, то B_0, $\overline{B}_0$ и 1) эквивалентны.

Рассматриваются также некоторые другие вопросы, связанные с марковскими процессами на прямой. Например, выясняется, на каком подпространстве пространства всех непрерывных ограниченных функций следует рассматривать полугруппу T_t, если выполнены только условия 1) и 2), но не A_0, как у Феллера. Указывается на возможность перенесения результатов Феллера об инфинитезимальном операторе процесса на этот более общий случай. Для процессов с траекториями, непрерывными при всех t, это сделано Е. Б. Дынкиным (РЖМат, 1957, 1618, 2521). А. А. Юшкевич

6966 Д. **Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова. Нагаева С. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Среднеаз. ун-т, Ташкент, 1957

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

6967. **О последовательных оценках спектральной плотности стационарных временных последовательностей. Парзен** (On consistent estimates of the spectral density of a stationary time series. Parzen Emanuel), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 3, 154—157 (англ.)

Случайная стационарная последовательность $x(t)$ $(t = 1, 2, \ldots)$ имеет спектральную плотность $f(w)$ и функцию корреляции $R(v)$, суммируемую по абсолютной величине и в квадрате. Определяется для действительных z четная, ограниченная функция $k(z)$, интегрируемая в квадрате, и такая, что $k(0) = 1$ и

$$\int_{-T}^{+T} |k(z)|\, dz \leqslant MT^{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}$$

для некоторой постоянной M и $\varepsilon > 0$. Рассматривается функция

$$f_T^*(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|v|\leqslant T} e^{-ivw} k(B_T v) R_T(v),$$

где $R_T(v) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|v|} x(t)\, x(t+|v|)$, а $\{B_T\}$ — последовательность положительных чисел, стремящаяся к 0 при $T \to \infty$ так, что $B_T T \to 0$.

Без доказательств приводятся следующие утверждения относительно связи функций $f_T^*(w)$ и $f(w)$.

1. Пусть $r > 0$ такое, что $\Sigma |v|^r |R(v)| < \infty$. Пусть $k^{(r)} = \lim_{z\to 0} \frac{1-k(z)}{|z|^r} < \infty$. Тогда

$$\lim_{T\to\infty} B_T^{-2r} |Mf_T^*(w) - f(w)|^2 = |k^{(r)} f^{(r)}(w)|^2$$

равномерно по w. Здесь $f^{(r)}(v) = \frac{1}{2\pi} \sum e^{-ivw} |v|^r R(v)$.

2. При тех же условиях на $R(v)$ и $k(z)$ и при условии для B_T: $\lim_{T\to\infty} T^{1/(1+2r)} B_T = B > 0$ имеет место:

$$\lim_{T\to\infty} T^{2\alpha} M |f_T^*(w) - f(w)|^2 =$$

$$= \frac{1}{B} \int k^2(z)\, dz\, |f(w)|^2 \{1 + \delta(0, w)\} + B^{2r} |k^{(r)} f^{(r)}(w)|^2,$$

где $\alpha = \frac{r}{1+2r}$ а $\delta(0, w) = \begin{cases} 1, & w = 0 \\ 0, & w \neq 0 \end{cases}$.

Работа является продолжением работы Бартлетта (Bartlett M. S., Biometrica, 1950, 37). Б. С. Цыбаков

6968. **Решающие функции и принцип минимакса. Фабиан** (Rozhodovací funkce a princip minimaxu. Fabian Václav), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 3, 272—286 (чешск.)

Краткий обзор некоторых вопросов теории статистических решающих функций. A. Špaček

6969. **Линейное преобразование, приводящее к стохастически зависимым переменным. Мунан** (Linear transformation to a set of stochastically dependent normal variables. Moonan William J.), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, 52, № 278, 247—252 (англ.)

Пусть $X_1, \ldots, X_v$ — независимые нормальные переменные, которые требуется преобразовать в V зависимых

нормальных переменных $Z_1, \ldots, Z_v$ с наперед заданной матрицей вторых моментов $M = \|m_{ij}\|$. Для решения этой задачи предлагается удобный метод вычисления коэффициентов a_{ij} треугольной матрицы A линейного преобразования $Z = AX$, где векторы Z-$(z_1, \ldots, z_v)$ и $X = (x_1, \ldots, x_v)$.

Метод иллюстрируется численным примером.

А. М. Бендерский

6970. Две аппроксимации для процесса Роббинс—Монро. Ходжес, Леман (Two approximations to the Robbins-Monro process. Hodges J. L., Jr, Lehmann E. L.), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 1. Berkeley-Los Angeles, 1956, 95—104 (англ.)

Пусть $y(x)$ при каждом фиксированном x — случайная величина, для которой существует $E[y(x)] = M(x)$, где M измерима по Борелю. Пусть при этом уравнение регрессии $M|x| = \alpha$ имеет единственный корень θ, причем для любого $x \neq \theta$ $(x - \theta)|M(x) - \alpha| > 0$.

Чжун (РЖМат, 1956, 3203) рассмотрел последовательность аппроксимирующих оценок для θ вида

$$x_{n+1} = x_n - a_n [Y(x_n) - \alpha] \qquad (1)$$

и исследовал ее сходимость в среднем к θ при некоторых условиях. Здесь x_1 выбирается произвольно, а a_n — последовательность надлежащим образом выбранных констант. Условия применимости последовательности оценок (1) также рассмотрены в вышеупомянутой работе. При этом, если в дополнение к другим условиям, $\lim_{|x| \to \infty} \frac{M(x)}{x} > 0$, Чжун предлагает принять $a_n = \frac{c}{n}$, а если это условие не выполняется, то полагаем $a_n = \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$ (выбор $\varepsilon > 0$ указан), причем дисперсии оценок в этих случаях имеют порядки соответственно $O\left(\frac{1}{n}\right)$ и $O\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)$.

Авторы данной работы, используя результаты исследований Блюма, Каллианпура (РЖМат, 1955, 5993, 5994) и Вольфовица (Wolfowitz J., Ann., Math. Statist., 1952, 23, 457—461), доказали, что можно и во втором случае принять $a_n = \frac{c}{n}$, причем $\sigma^2_{x_n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ и в этом случае.

При линеаризации уравнения регрессии авторы выводят формулы для вычисления дисперсии оценки (1) при конечных n и для некоторых n приводят таблицы, которые можно использовать при этих расчетах.

Исследуется вопрос о возможности использования оценок (1) для оценки неизвестного параметра распределения $y(x)$; вид этого распределения предполагается известным.

Б. В. Финкельштейн

6971. Выборка по группам. Тасk (Oblastní výběr. Hájek Jaroslav), Apl. mat., 1956, 1, № 2, 149—161 (чешск.; рез. русск., англ.)

В этой работе рассмотрены следующие проблемы из области выборочного исследования.

1. Составление линейной оценки и оценки по отношению и выбор соответствующих доверительных границ. 2. Оптимальное размещение выборки по группам с учетом данной расходной функции (cost function). 3. Случайное размещение выборки по группам.

Группа α $(\alpha = 1, 2, \ldots, L)$ содержит N_α единиц, из которых произведена случайная выборка в μ_α единиц. Для единиц определены две величины, принимающие значения $A_{\alpha i}$ и $B_{\alpha i}$ $(i = 1, 2, \ldots, N_\alpha)$. Для $\varphi = \Sigma\Sigma A_{\alpha i}/\Sigma\Sigma B_{\alpha i}$ выведена оценка f и доверительные границы

$$f \pm t\Delta = \frac{\Sigma_{\alpha=1}^{L} \frac{N_\alpha}{n_\alpha} \Sigma_{i=1}^{n_\alpha} X_{\alpha i}}{\Sigma_{\alpha=1}^{L} \frac{N_\alpha}{n_\alpha} \Sigma_{i=1}^{n_\alpha} Y_{\alpha i}} \pm t \frac{\sqrt{\Sigma_{\alpha=1}^{L} \frac{N_\alpha}{n_\alpha}\left(\frac{N_\alpha}{n_\alpha} - 1\right) n_\alpha S_\alpha^2 \frac{n_\alpha}{n_\alpha - 1}}}{\Sigma_{\alpha=1}^{L} \frac{N_\alpha}{n_\alpha} \Sigma_{i=1}^{n_\alpha} Y_{\alpha i}}, \qquad (1)$$

где $X_{\alpha i}$ (соответственно $Y_{\alpha i}$) — наблюдаемые значения величин $A_{\alpha i}$ (соответственно $B_{\alpha i}$) и

$$n_\alpha S_\alpha^2 = \sum_{j=1}^{n_\alpha} (X_{\alpha i} - f Y_{\alpha i})^2 - \frac{1}{n_\alpha} \left[\sum_{i=1}^{n_\alpha} (X_{\alpha i} - f Y_{\alpha i})\right]^2 \quad \alpha = 1, 2, \ldots, L. \qquad (2)$$

Доверительные границы (1) автор выводит по методу Фишера (R. A. Fisher), рассматривая величины $A_{\alpha i} - \varphi B_{\alpha i}$; этот метод модифицирован так, что в оценке дисперсии величина φ заменена на f.

Если расходы равны $C = \Sigma^{n_\alpha} C_\alpha$ и дисперсия оценки равна

$$D = \sum \frac{\sigma_\alpha}{n_\alpha}\left(1 - \frac{n_\alpha}{N_\alpha}\right)\left(\frac{N_\alpha}{N}\right)^2, \quad N = \sum_{\alpha=1}^{L} N_\alpha,$$

то при помощи неравенства Буняковского получаем

$$C(N^2 D + \Sigma N_\alpha \sigma_\alpha^2) \geqslant (\Sigma \sigma_\alpha N_\alpha \sqrt{C_\alpha})^2.$$

Равенство получается тогда и только тогда, если

$$n_\alpha = \lambda \frac{N_\alpha \sigma_\alpha}{\sqrt{C_\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, L. \qquad (3)$$

Равенство (3) дает оптимальное размещение выборки при данной расходной функции C, минимизирующее D и C.

При помощи аналогичных рассуждений решен и вопрос о случайном размещении выборки по группам.

В работе приведены удачно подобранные численные примеры.

F. Fabian

6972. Заметка о двухступенных выборках. Рангараджан (A note on two stage sampling. Rangarajan R.), Санкия, Indian J. Statist., 1957, 17, № 4, 373—376 (англ.)

Рассматривается вопрос об оптимальных (с точки зрения минимума дисперсии) оценках общей и групповых средних для случая двухступенного отбора. Даны несмещенные оценки этих величин для случая повторного и бесповторного отборов.

М. И. Эйдельнант

6973. Проблемы максимумов и минимумов, имеющие отношение к выводу в конечных генеральных совокупностях. Риос (Problemas de maximos y minimos relacionados con la inferencia en poblaciones finitas. Rios Sixto), Trab. estadist., 1955, 6, № 1, 3—30 (исп.; рез. англ.)

1. При оценке параметров бесконечной и конечной совокупностей получаются качественно различные результаты. Во втором случае, оценка среднего, диспер-

сии и т. д. не характеризует полностью генеральную совокупность. Следовательно, интересно рассмотреть проблемы, в которых при данных характеристиках генеральной совокупности объема N, желательно определить размах и пределы для других характеристик.

2. Пусть генеральная совокупность объема N имеет элементы $x_1, x_2, \ldots, x_N$ со средним μ, т. е.

$$\sum_1^N x_i = N\mu \qquad (1)$$

и предположим, что

$$0 \leqslant x_i \leqslant M, \qquad (2)$$

то доказывается, что дисперсия

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum (x_i - \mu)^2 \qquad (3)$$

принимает максимальные значения:

$\sigma^2 = (N-1)\mu^2$,

если $0 \leqslant N\mu \leqslant M$,

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\{(M-\mu)^2 + (N-2)\mu^2 + [(N-1)\mu - M]^2\},$$

если $M < N\mu \leqslant \lambda M$

. . . . . .

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\{(M-1)(M-\mu)^2 + [(N-1)\mu - (N-1)\mu]^2,$$

если $(N-1)M < N\mu \leqslant NM$.

В этой проблеме нельзя использовать классические методы для вычисления максимумов, так как они находятся на границе области, определенной условиями (1) и (2) в N-мерном пространстве. Они получаются из геометрических соображений.

3. Доказывается, что максимум x_i, определенный условиями (1) и (3), есть $x_i = \mu + \sigma\sqrt{N-1}$ и минимум есть $x_i = \mu - \sigma\sqrt{N-1}$. Максимум размаха при условиях (1) и (3) есть $d = \sigma\sqrt{2N}$ и минимум дисперсии при условии (1) есть $\sigma^2 = d^2/2N$, где d — размах. Максимум $\sigma^2 = \Sigma y_i^2/N$ при условии $\Sigma y_i = 0$ есть $\sigma^2 = d^2(N^2-1)/4N^2$, где d — размах, если N — нечетное, и $\sigma^2 = 1/N$, если N — четное. Если известно, что N наблюдений таковы, что $|y_i| < d'$, и другие $N - N_1$ наблюдений таковы, что $d' < |y_i| < d$, то получается следующее неравенство

$$\sigma^2 \leqslant \left[(N-N_1)\frac{d^2}{4} + N_1\frac{d'^2}{4}\right].$$

4. Доказано, что максимум и минимум третьего момента есть $d_3 = (N-2)(N-1)^{-1/2}\sigma^3$ и $\alpha_3 = (N-2)\times$ $\times(N-1)^{-1/2}\sigma^3$, если условия (3) и (1) удовлетворяются.

Резюме автора

6974. **Некоторые оценки в случае относительно больших интервалов группировки. Йонэда, Утияма** (Some estimations in the case of relatively large class intervals. Yoneda Keizo, Uchiyama Moritune), Yokohama Math., J., 1956, **4**, № 2, 99—118 (англ.)

Авторы рассматривают наблюденные значения в выборке большого объема из нормально распределенной генеральной совокупности. Задача состоит в оценке параметров генеральной совокупности в том случае, когда результаты наблюдений в выборке сгруппированы в a групп ($a \geqslant 3$) с интервалами группировки, превышающими дисперсию выборки.

Если у нас имеется n наблюдений, сгруппированных в 3 группы n_1, n_2, n_3, $n = n_1 + n_2 + n_3$, где n_i — число наблюдений, лежащих в интервале $x_{i-1} \leqslant x < x_i (i = 1, 2, 3)$, то оценки математического ожидания и дисперсии (соответственно, μ' и σ') определяются следующим образом:

$$\mu' = (k_2x_1 - k_1x_2)/(k_2 - k_1),$$
$$\sigma' = (x_2 - x_1)/(k_2 - k_1),$$

где

$$\int_{-\infty}^{k_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{i} n_j \quad (i = 1, 2).$$

Из теоремы Мостеллера авторы выводят, что μ' и σ' являются асимптотически нормальными и несмещенными оценками, μ и σ соответственно.

Определяется оптимальное значение ширины центральной группы, при котором достигается минимум дисперсии оценок.

Принимая оценки μ' и σ' за первое приближение истинных значений параметров, авторы, пользуясь методом максимума правдоподобия, выводят систему уравнений для определения второго приближения.

В статье приведены таблицы неполных моментов первых 4 порядков, необходимых для решения этих уравнений, а также примеры, иллюстрирующие применение метода.

Примечание референта. В. Н. Гостев еще в 1949 г. пользовался оценками, аналогичными μ' и σ' (Статистический контроль методом группировки (метод калибров распределения). Ленинград. Дом техники машиностроителей, 1949). М. А. Куликов

6975. **Таблицы для оценок наибольшего правдоподобия логистической функции. Берксон** (Tables for the maximum likelihood estimate of the logistic function. Berkson Joseph), Biometrics, 1957, **13**, № 1, 28—34 (англ.)

Приводится некоторое число серий независимых испытаний; i-серия состоит из n_i опытов, r_i из которых закончились появлением изучаемого события; вероятность события в i-й серии $P_i = 1/(1 + e^{-(\alpha+\beta x_i)})$, где x_i известны, а параметры α и β должны быть оценены по наблюденным результатам. Автор указывает приближенный итерационный метод решения уравнений для оценок $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ параметров и приводит таблицу, облегчающую вычисления. Н. В. Смирнов

6976. **О перечислении образцов решений относительно n средних. Уайн, Фрёйнд** (On the enumeration of decision patterns involving n means. Wine R. L., Freund John E.), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 1, 256—259 (англ.)

При сравнении двух средних m_1 и m_2 допускаются три альтернативы: 1) $m_1 < m_2$, 2) $m_1 > m_2$, 3) разность $m_1 - m_2$ несущественна. При n средних множество решений может быть получено попарным сравнением. Если два множества решений отличаются лишь перестановками средних (а не соотношениями между ними), то говорят, что они принадлежат к одному и тому же образцу. Автор показывает, что различных образцов решений при n средних может быть $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Н. В. Смирнов

6977. **Характеристика и сходимость рядов Грама—Шарлье. Айкенберри** (Characteristics and convergence of Gram-Charlier series. Ikenberry Ernest), Statistica, 1957, **17**, № 1, 3—10 (англ.)

Рассматривается вопрос о сходимости рядов Грама—Шарлье типа A (в смысле Кендалла (Kendall M. G. The advanced theory of statistics, 2 ed. 1945, 1, 148). Показывается на примере двух частных случаев, что два явления, на которые указывает Кендалл в его книге (см. цит. выше, стр. 153), отражают существенные свойства этих рядов. Для случая аппроксимации плотности вероятностей заданной выборки при помощи таких рядов вычисляется положительная a priori вероятность того, что аппроксимирующая сумма расходится, если неограниченно увеличить число членов суммы.
В. Г. Рихтер

6978. **О статистиках, не зависящих от полной достаточной статистики. Б а с у** (On statistics independent of a complete sufficient statistic. B a s u D.), Санкия, Indian J. Statist., 1955, 15, № 4, 377—380 (англ.)
Пусть $(\mathfrak{S}, \mathscr{A})$ — произвольное измеримое пространство выборок. Обозначим $\{P_\theta\}$, $\theta \in \Omega$ — семейство вероятностных мер на $\mathscr{A}$.
Статистики T_1 и T с измеримыми пространствами (L, B) и (L_1, B_1) соответственно называются стохастически независимыми друг от друга, если для каждого $B \in \mathfrak{B}$ и $B_1 \in \mathfrak{B}_1$

$$P_\theta(T^{-1}B \cap T_1^{-1}B_1) \equiv P_\theta(T^{-1}B)\,P_\theta(T_1^{-1}B_1)$$

для всех $\theta \in \Omega$.
Статистика T называется достаточной статистикой, если для любого $A \in \mathscr{A}$ существует функция $f(A \mid t)$, независимая от θ и удовлетворяющая условию

$$P_\theta(A \cap T^{-1}B) = \int_B f_\theta(A \mid t)\,dP_\theta^T$$

для всех $\theta \in \Omega$.
Статистика T называется полной (ограниченно полной), если соответствующее семейство мер $\{P_\theta^I\}$ также полно (ограниченно полно) (Санкия, 1950, 10, 305—340).
Непосредственно из этих определений автором доказываются три теоремы:
Т е о р е м а 1. Любая статистика T_1, стохастически не зависимая от достаточной статистики T, не зависит от параметра θ.
Т е о р е м а 2. Если T — ограниченно полная достаточная статистика, то любая статистика T_1, не зависящая от θ, стохастически не зависит от T.
Т е о р е м а 3. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые случайные величины, такие, что их совместная функция распределения включает в себя неизвестный параметр места θ, то необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\Sigma b_i x_i$ была ограниченно полной достаточной статистикой для θ, является требование, чтобы x_i являлись нормально распределенными случайными величинами со средним θ и дисперсией b_i^{-1} $(i=1, 2, \ldots n)$ $(b_i > 0)$.
Исходя из теорем 1 и 2, автор просто доказывает некоторые положения теории распределений.
Автор также показывает, что в случае гамма-распределения имеет место теорема, аналогичная теореме 3.
М. А. Куликов

6979. **Распределение размаха в выборках объема 200 из нормальной совокупности. Х а р л и, П и р с о н** (The distribution of range in normal samples with n-200. H a r l e y B. I., P e a r s o n E. S.), Biometrika, 1957, 44, № 1—2, 257—260 (англ.)
Протабулированы значения вероятностного интеграла для размаха w выборок объема 200 из нормальной совокупности (с семью десятичными знаками в интервале $w = 3{,}25$ (0,25) 9,75 и с четырьмя десятичными знаками при шаге 0,05). Получены значения процентных точек для w, которые, как оказалось, близки к соответствующим значениям для кривой типа VI Пирсона с моментами, равными моментам протабулированного распределения.
А. П. Хусу

6980. **Дисперсия компонент дисперсии. Сбалансированные схемы. Т ь ю к и** (Variances of variance components. I. Balanced designs. T u k e y J o h n W.), Ann. Math. Statistics, 1957, 27, № 3, 722—736 (англ.)
Задачи анализа дисперсии на различных случайных схемах (случайные блоки, латинские квадраты и т. п.) обычно решают для случая независимых показателей, извлекаемых из бесконечной, нормально распределенной совокупности. Автор оставляет только первое из этих предположений (независимость) и определяет для различных схем компоненты общей дисперсии и дисперсию этих компонент.
В основу всех выводов положено исследование полиномов специального вида, названных автором «поликсями» и введенных им в его прежних работах.
В реферируемой статье перечислены основные свойства этих полиномов и на примере дано их определение.
М. И. Эйдельнант

6981. **Заметка о комбинированных междублочных и внутриблочных оценках в неполных блоках. С п р о т т** (A note on combined interblock and intrablock estimation in incomplete block designs. S p r o t t D. A.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 633—641 (англ.)
Рассматриваются схемы опытов, в которых каждый вариант встречается в r блоках (повторением), а каждая пара вариантов в λ блоках, и сравниваются два метода оценок разности показателей двух вариантов, учитывающих результаты опыта не только в тех блоках, где есть оба эти варианта, но и по блокам, в которых имеется хотя бы один из этих вариантов.
Устанавливаются условия, при которых оба рассматриваемых метода оценок дают совпадающие результаты.
М. И. Эйдельнант

6982. **Коэффициент эффективности схем с неполными блоками. К е м п т о р н** (The efficiency factor of an incomplete block design. K e m p t h o r n e O s c a r), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 846—849 (англ.)
Пусть rt делянок распределены между B блоками по k делянок в каждом и на них испытывается t вариантов в r повторениях каждый $(rt = Bk)$.
Если $k < t$, то получим схему с неполными блоками, при которой варианты встречаются либо один, либо нуль раз в каждом из блоков.
Автор называет коэффициентом эффективности (EF) величину

$$EF = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{B_1}{B_2},$$

где A_1 — средняя дисперсия разности вариантов при схеме полных блоков, A_2 — средняя дисперсия внутриблочных оценок разности вариантов в схеме неполных блоков, B_1 — внутриблочная дисперсия в схеме неполных блоков, B_2 — внутриблочная дисперсия в схеме полных блоков.
Доказывается, что EF равен умноженной на r гармонической средней всех (кроме нулевого) характеристических чисел матрицы коэффициентов редуцированных нормальных уравнений для внутриблочных оценок:

$$\left(rI - \frac{1}{k}\Lambda\right)(\hat{\tau}) = (Q),$$

где τ_i — оценка эффективности варианта i; Λ_{ii} — равно r; $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ — число блоков, содержащих оба варианта (i и j), и Q_j — итог по варианту j. М. И. Эйдельнант

6983. **Новый статистический метод, использующий обобщенные кривые распределения, с анализом недостатков существующих методов. Хуан Ваньли,** Туму гунчэн сюэбао; Chinese J. Civil Engng, 1956, 3, № 2, 209—224 (кит.; рез. англ.)

Обсуждаются прежде всего философская основа статистического метода, необходимость его применения, его основные категории, характеристики каждой категории и современное направление его развития. Затем критически анализируются характеристики кривых распределения Пирсона III типа, имеющие в настоящее время широкое применение. Далее указывается основная причина недостатков статистического метода, о которой еще нигде не упоминалось.

После наводнения в 1954 г. Лин (P. У. Lin) указал на то, что характеристики распределения статистик, вычисленные по любой группе данных, ненадежны; это указание вызвало усиленное внимание к этой проблеме. По этому поводу в Китае при Министерстве охраны вод многократно созывались специальные конференции, посвященные данной теме. В настоящей статье анализируются причины ненадежности значений характеристик, вычисленных на основании полученных экспериментальных данных, критикуется принятый метод их вычисления и взамен предлагается новый метод. Автор полагает, что единственный рациональный путь применения статистического метода состоит в использовании значений характеристик кривой вероятностей, выравненной по экспериментальным данным. В предлагаемом новом методе нахождения характеристик наиболее подходящей кривой и вероятностной оценки ее соответствия применяются как графические, так и вычислительные приемы. Приводится пример, показывающий значительность ошибок, вытекающих из применения принятого в настоящее время метода.

По резюме автора

6984. **Модифицированное среднее квадратическое последовательных разностей с точным распределением. Камат** (Modified mean square successive difference with an exact distribution. Kamat A. R.), Санкия, Indian J. Statist., 1955, 15, № 5, 295—302 (англ.)

Рассматривается среднее квадратическое последовательных разностей нормально распределенных переменных x_i с одинаковой дисперсией σ^2:

$$\delta^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 / (n-1) = X_{(n)} / (n-1).$$

Поскольку матрица A квадратичной формы $X_{(n)} = x'Ax$ имеет характеристические корни

$\lambda_j = 4 \sin^2 \frac{j\pi}{2n}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, то характеристическая функция $X_{(n)}$ имеет вид

$$\Phi(t) = \Pi_{j=1}^{n-1} (1 - 2i\lambda_j t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Автор предлагает модифицированный критерий, предполагая объем выборки $n = 2m$:

$$\delta^{12} = \frac{1}{2(m-1)} (X_{1(m)} + X_{2(m)}),$$

где $X_{i(m)}$ $(i = 1, 2)$ — выражения, аналогичные $X_{(n)}$, и построенные по наблюдениям, соответственно, x_k $(k = 1, 2, \ldots m)$ и x_{m+k}.

Характеристическая функция для δ^{12}

$$\Phi(t) = \prod_{j=1}^{m-1} (1 - 2i\lambda_j t)^{-1}$$

и позволяет получить точное выражение плотности распределения в виде конечной суммы.

На основании этого устанавливается верхняя и нижняя границы распределения величины δ^2, а также распределения статистик

$$\frac{\delta^{12}_{(m)}}{\delta^{12}_{(n)}} \text{ и } u = \frac{\bar{x} - \mu}{\delta'},$$

где $\bar{x}$ и μ — соответственно, выборочное и генеральное средние результатов измерений x_j $(j = 1, \ldots, 2n)$

А. М. Бендерский

6985. **Моменты распределения Лейпника. Кендалл** (The moments of the Leipnik distribution. Kendall M. G.), Biometrika, 1957, 44, № 1—2, 270—272 (англ.)

Лейпником было получено приближение к распределению первого выборочного серийного коэффициента корреляции для циклической случайной последовательности марковского типа с известным средним. Им найдены выражения для первых двух моментов этого распределения.

Автор дает общее выражение для моментов μ'_k всех порядков в виде рекуррентного соотношения, а также явное выражение μ'_k в виде полинома степени k по ρ (ρ — генеральное значение серийного коэффициента корреляции). А. П. Хусу

6986. **Заметка о среднем отклонении биномиального распределения. Джонсон** (A note on the mean deviation of the binomial distribution. Johnson N. L.), Biometrika, 1957, 44, № 3—4, 532—533 (англ.)

Для биномиального распределения указывается точная формула для математического ожидания абсолютной величины отклонения и ее асимптотический вид для большого числа испытаний. Н. В. Смирнов

6987. **Ограничение и выбор в многомерных нормальных распределениях. Коэн** (Restriction and selection in multinormal distributions. Cohen A. Clifford, Jr), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 731—741 (англ.)

Рассматриваются оценки максимального правдоподобия параметров многомерного нормального распределения, если на наблюдения одной из компонент (x_1) наложены ограничения (например, отбрасываются выборки, где x_1 больше некоторого числа). Библ. 20 назв.

С. С. Кислицын

6988. **Доверительные интервалы для частот. Кроу** (Confidence intervals for a proportion. Crow Edwin L.), Biometrika, 1956, 43, № 3—4, 423—425 (англ).

Определение неймановского доверительного интервала, для неизвестной вероятности π по фактической частоте r, полученной в результате n независимых испытаний, сводится к определению двух целых чисел r_1 и r_2 из условия:

$$\sum_{r=r_1}^{r_2} P_{nr}(\pi) \geqslant 1 - \varepsilon, \text{ где } P_{nr}(\pi) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \pi^r (1-\pi)^{n-r} \quad (1)$$

Как известно, (1) недостаточно для однозначного определения r_1 и r_2 и существуют различные системы

интервалов $\delta_i(r)$, покрывающих π с данным коэффициентом доверия $1-\varepsilon$.

В статье излагаются некоторые методы для определения доверительных интервалов (Клопера — Пирсона, Стерна) и для несколько измененного метода Стерна дан способ расчетов и таблицы для $n=1, 2, \ldots, 30$ и $1-\varepsilon=0{,}90$; 0,95 и 0,99. И. Л. Эйдельман

6989. **Некоторые замечания к методу наименьших квадратов с приложением к задачам прямых и обратных засечек. Линник Ю. В.,** Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 3, 349—359 (рез. англ.)

Рассматривается задача построения доверительных областей для линейных функций неизвестных параметров с помощью оценок по методу наименьших квадратов. Пусть $Y=X^{(0)}+XA$, где $A=(a_1, \ldots, a_n)$ — вектор-столбец неизвестных параметров, X и $X^{(0)}$ суть, соответственно, заданные матрицы $N\times n$ и $N\times 1$, Y — неизвестная матрица $N\times 1$ и $L=Y+\Delta$ — матрица наблюдений, где Δ — нормальный вектор ошибок с $E\Delta=0$ и корреляционной матрицей $B_\Delta=\sigma^2P^{-1}$, где σ^2 неизвестно, а $P=[p_1, \ldots, p_N]$ — диагональная матрица с известными элементами $p_i>0$. Пусть, далее, $\widetilde{A}$ — вектор-столбец оценок для элементов A по методу наименьших квадратов, G — заданная матрица $m\times n$ ранга m, $H=G\widetilde{A}$, $C=X^TPX$, $[\widetilde{pv}\widetilde{v}]=\widetilde{V}\,P\widetilde{V}$, где $\widetilde{V}=X^{(0)}+X\widetilde{A}-L$ есть вектор «кажущихся поправок».

Теорема. Если $\widetilde{H}=G\widetilde{A}$, $K=GC^{-1}G^T$ и $Z=(z_1, \ldots, z_n)$ есть вектор-столбец текущих координат, то матрица K неособенная и доверительный эллипсоид

$$(Z-\widetilde{H})^T K^{-1}(Z-\widetilde{H})=\gamma_0[\widetilde{pvv}]$$

накрывает точку $Z=H$ с вероятностью p_0, причем $F_{m,\,N-n}(\gamma_0)=p_0$, $F_{m,\,N-n}(x)$ — функция распределения Фишера с $(m,\ N-n)$ степенями свободы.

Эта теорема содержит в качестве частных случаев конструкцию доверительных областей для A (при $G=E$, т. е. $H=A$) и для одного параметра, например a_i (при $G=\|0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots 0\|$, 1 на i-м месте). В последнем случае получаются известные доверительные интервалы для a_i, связанные с распределением Стьюдента.

Даны применения полученной теоремы к важным для геодезии и навигации задачам прямых и обратных засечек.

Отметим следующую лемму: Распределение Фишера $F_{m,\,N-n}(x)$ всегда выражается через элементарные функции. В. В. Петров

6990. **Соотношение равенства для дробных повторений 2^n-рядов. Бертон, Коннор** (On the identity relationship for fractional replicates of the 2^nseries. Burton R. C., Connor W S.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 3, 762—767 (англ.)

Пусть имеется n символов A, B,.... Рассматривается абелева группа, порожденная соотношениями $I=A^{a_1}B^{b_1}\ldots=A^{a_r}B^{b_r}\ldots$, где I — единица группы; $a_i b_i$,... принимают значения 0 или 1, причем, $A^0=B^0=\ldots=A^2=B^2=\ldots=I$. Найдены необходимое и достаточное условие существования группы с заданными длинами указанных выше «слов» и их произведений и необходимое условие для случая, когда длины заданы, но неизвестно, к каким «словам» они относятся. Полученные результаты имеют применение в теории многофакторного статистического анализа.

С. С. Кислицын

6991. **Задача, возникающая в факторном анализе. Конейн** (A problem arising in factor analysis. Konijn H. S.), Austral. J. Sci., 1957, 19, № 5, 202—203 (англ.)

6992. **Критерий значимости для неопределимых соотношений. Моран** (A test of significance for an unidentifiable relation. Moran P. A. P.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, B18, № 1, 61—64 (англ.)

Если переменные x_1 и x_2 представлены в форме y_i+v_i $(i=1, 2)$, где y_i — непосредственно не наблюдаемые переменные, а v_i — ошибки наблюдений, и при этом имеет место соотношение $y_2=\beta y_1+\beta_0$, то оно называется определимым, если параметры совместного распределения y_i и v_i при некоторых дополнительных условиях полностью определяются из знания совместного распределения x_i. Известно, что если совместное распределение x_1 и x_2 нормально и v_1 и v_2 нормальны, то линейное соотношение неопределимо и будет определимым во всяком случае, когда распределение (x_1x_2) отлично от нормального (Koopmans T. C., Reiersøl, Ann. Math. Statistics, 1950, 21, № 2).

Автор приводит критерий гипотезы, что прямые, соответствующие неопределимому линейному соотношению между двумя переменными, каждое из которых измерено с ошибкой, проходят через заданную точку на плоскости.

Приводится пример применения указанного критерия к соотношению между выпадением осадков в данном районе и величиной речного стока (см. Reiersøl, Econometrica, 1950, 18, 375—389). М. А. Куликов

6993. **К анализу совокупного действия нескольких факторов. Струмилин С. Г.,** Уч. зап. по статист., 1957, 3, 377—383

6994. **Смешанное расположение испытаний основных факторов по схеме $2^2\times 3$ и $2\times 3\times 4$ и его дифференциальный анализ. Асао. Дополнение [к статье Асао.] Тагути,** Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1957, 8, № 10, 658—661 (японск.)

6995. **О независимости критериев для проверки случайности и других гипотез. Савидж** (On the independence of tests of randomness and other hypotheses. Savage I. Richard), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, 52, № 277, 53—57 (англ.)

Автор указывает на применения следующего факта: симметричная функция N независимых наблюдений случайной величины с непрерывным распределением не зависит от функции переменных $R_1, R_2, \ldots, R_N$, где R_i — число наблюдений, меньших или равных i-му наблюдению, к построению критериев для одновременной проверки двух статистических гипотез.

С. С. Кислицын

6996. **Сравнение критериев для среднего логарифмически-нормального распределения с известной дисперсией. Северо, Олдс** (A comparison of tests on the mean of a logarithmico-normal distribution with known variance. Severo Norman C., Olds Edwin G.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 670—686 (англ.)

Рассматриваются три процедуры испытания гипотез о среднем логарифмически-нормальном распределении с известной дисперсией. Первая — критерий, основанный на теории нормального распределения, примененный к логарифмам начальных данных; вторая — критерий, также основанный на теории нормального распределения, но примененный к непосредственно начальным данным, и третья — основана на Лемме Неймана — Пирсона.

Получены оперативные характеристики этих критериев и выводятся некоторые асимптотические их свойства. Найдено, что эти три критерия дают совершенно

различны результаты, если среднее при нулевой гипотезе не велико по отношению к стандартному отклонению. Резюме автора

6997. **Сравнение оптимального и корреляционного методов сопровождения случайного сигнала на фоне шума. Дейвис** (Optimum vs. correlation methods in tracking random signals in background noise. Davis R. C.), Quart. Appl. Math., 1957, 15, № 2, 123—138 (англ.)

Пусть $s(t)$, $n_1(t)$, $n_2(t)$ — независимые гауссовские стационарные процессы с известными корреляционными функциями. Пусть

$$x_1(t) = s(t) + n_1(t)$$
$$x_2(t) = s(t+\tau_0) + n_2(t).$$

В работе исследуются методы оценки неизвестного параметра τ по заданным значениям процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при $|t| \leqslant T$. Сравнивается применяемый обычно корреляционный метод и оптимальный метод, основанный на отношении правдоподобия. Используется неравенство Крамера — Рао.

Все построения работы основаны на неверном утверждении, содержащемся в работе Рута и Питчера (РЖМат, 1956, 3976). Это утверждение состоит в том, что любой стационарный гауссовский процесс $x(t)$ $|t| \leqslant T$ представляется в виде.

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos \omega_0 kt + b_k \sin \omega_0 kt],$$

где $\omega_0 = \frac{\pi}{T}$ и a_k, b_k — независимые гауссовские величины. На самом деле в таком виде представим весьма узкий класс процессов. В связи с этим остается неясной сфера приложимости выводов, полученных в работе. Р. Л. Добрушин

6998. **Некоторые замечания о расчетах математического ожидания в определенной схеме ранговой корреляции. Кестен, Рунненберг** (Enige opmerkingen over de berekening van de verwachting en de spreiding van het aantal inconsistenties in een bepaald rangcorrelatieschema. Kesten H., Runnenburg J. Th.), Statist. neerl., 1956, 10, № 3-4, 197—204 (гол.; рез. англ.)

См. статью Элтерена, Пейпа (РЖМат, 1957, 7214).

6999 К. **Заседания 3-го симпозиума по математической статистике и теории вероятностей в Беркли. Т. 1. Нейман** (Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Held at the Statist. Lab. Univ. Calif. Dec., 1954, July and Aug., 1955. Vol. 1. Contributions to the theory of statistics. Ed. Neyman Jerzy. Berkeley, Los-Angeles. Univ. Calif. Press. 1956, 208 pp., 6 doll.) (англ.)

7000 К. **Заседания 3-го симпозиума по математической статистике и теории вероятностей в Беркли. Т. 2. Нейман** (Proceedings of the 3rd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Held at the Statist. Lab. Univ. Calif. Dec. 26—31, 1954, July and Aug., 1955, Vol. 2. Contributions to probability theory. Ed. Neyman Jerzy. Berkeley, Los Angeles. Univ. Calif. Press, 1956, 246 pp., 6.50 doll.) (англ.)

7001 К. **Заседания 3-го симпозиума по математической статистике и теории вероятностей в Беркли. Т. 3. Нейман** (Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Held at the Statist. Lab. Univ. Calif. Dec., 1954, July and Aug., 1955. Vol. 3. Contributions to astronomy and physics. Ed. Neyman Jerzy. Berkeley, Los Angeles. Univ. Calif. Press, 1956, 252 pp., ill. 6,25 doll.) (англ.)

7002 К. **Заседания 3-го симпозиума по математической статистике и теории вероятностей в Беркли. Т. 5. Нейман** (Proceedings of the 3rd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Held at the Statist. Lab. Univ. Calif. Dec., 1954, July and Aug., 1955. Vol. 5. Contributions to econometrics, industrial research, and psychometry. Ed. Neyman Jerzy. Berkeley Los-Angeles, Univ. Calif. Press, 1956, 184 pp., ill., 5.75 doll.) (англ.)

7003 К. **Математическая статистика. Ван-дер Варден** (Mathematische Statistik. Van der Waerden B. L. Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer, 1957, IX, 360 S., ill., 49.60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, **A**, № 20, 1414 (нем.)

7004 К. **Основания математической статистики. Шметтерер** (Grundlagen der mathematischen Statistik. Schmetterer L., Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1957, 14 S.) (нем.)

Изложение вступительной лекции автора, прочитанной в Гамбургском университете. В историческом разрезе обсуждается место математической статистики в системе наук и ее взаимоотношение с теорией вероятностей. Значительная часть брошюры посвящена обсуждению различных (математических и философских) способов трактования понятия вероятности. Библ. 22 назв. Р. Л. Добрушин

7005 Д. **Некоторые аналитические вопросы математической статистики. Зингер А. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1958

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

7006. **Очерк результатов и значения теории игр. Нольфи** (Hinweise auf die Ergebnisse und Bedeutung der Spieltheorie. Nolfi P.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, 57, № 2, 129—144 (нем.)

Популярно излагаются основы теории игр (преимущественно, матричных). Отмечается важность этой теории для задач страхования. Н. Н. Воробьев

7007. **Стратегические игры. Мейнарди** (Strategische spielen. Meinardi J. J.), Tijdschr. Nederl. radiogen., 1957, 22, № 4, 239—263 (гол.; рез. англ.)

Краткое введение в теорию игр.

7008. **Некоторые методы вычислительного подхода к задачам программирования, отличные от симплекс-метода. Томпкинс** (Some methods of computational attack on programming problems other than the simplex method. (Abstract). Tompkins C.), Naval Res. Logist. Quart., 1957, 4, № 1, 95—96 (англ.)

На систему линейных неравенств и матричные игры распространяется метод Качмажа для систем линейных уравнений (Kaczmar S., Bull. Internat. Acad. Polon. sci. et lettr. Cl. Sci. math. et natur. Ser. A., 1937, 355—357). Рекомендуется также комбинация этого метода с итеративным методом Брауна. И. Л. Канторович

7009. **О вычислительном методе решения задач линейного программирования с почти блочнодиагональными матрицами. Белман** (On the computational solution of linear programming problems involving almost-block-diagonal matrices. Bellman Richard), Manag. Sci., 1957, 3, № 4, 403—406 (англ.)

Рассмотрена задача о максимизации линейной формы (1) $L_N(x) = \Sigma_{i=1}^{3N} x_i$ при ограничениях:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq C_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq C_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_1x_4 \leq C_3,$$

$$
\begin{aligned}
&a_{44}x_4 + a_{45}x_5 + a_{46}x_6 \leq C_4,\\
&a_{54}x_4 + a_{55}x_5 + a_{56}x_6 \leq C_5,\\
&a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 + b_2x_7 \leq C_6,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{3N-2,\,3N-2}\,x_{3N-2} + a_{3N-2,3N-1}\,x_{3N-1} +\\
&\quad + a_{3N-2,\,3N}\,x_{3N} \leq C_{3N-2},\\
&a_{3N-1,\,3N-2}\,x_{3N-2} + a_{3N-1,\,3N-1}\,x_{3N-1} +\\
&\quad + a_{3N-1,\,3N}\,x_{3N} \leq C_{3N-1}\\
&a_{3N,\,3N-2}\;\;x_{3N-2} + a_{3N,\,3N-1}\,x_{3N-1} + a_{3N,\,3N}\,x_{3N} \leq C_{3N}
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

и $x_i \geqslant 0$, ($b_i > 0$, $a_{ij} \geqslant 0$),

Предполагается, что имеется достаточное число положительных коэффициентов для того, чтобы максимум $L_N(x)$ был конечным. Решение этой задачи сведено к решению уравнения динамического программирования, в результате чего значительно сокращается объем вычислительной работы. И. Н. Соколова

7010. Применение линейного программирования к транспортной задаче большого масштаба. Стрингер, Хейли (The application of linear programming to a large-scale transportation problem. Stringer J., Haley K. B.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 106—121 (англ.)

Изложение работы по применению линейного программирования к задаче о перевозке угля от 130 шахт к 60 электростанциям (объединенным в 32 группы) в Центральной и Южной Англии.

Приводятся также описание, схема и фотография механической модели для решения транспортной задачи. И. В. Романовский

7011. Функциональные уравнения в теории динамического программирования. VI. Прямое доказательство сходимости. Белман (Functional equations in the theory of dynamic programming. VI. A direct convergence proof. Bellman Richard), Ann. Math., 1957, **65**, № 2, 215—223 (англ.)

Продолжение серии статей автора (РЖМат, 1956, 4466, 6472, 6744, 8900). Задача нахождения максимума функционала

$$J(y) = \int_0^T F(x, y)\,dt,$$

где $\frac{dx}{dt} = G(x, y)$, $x(0) = c$, $R_i(x, y) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, k$, заменяется соответствующей дискретной задачей. Доказывается теорема о сходимости максимумов для дискретных задач к max $J(y)$. И. В. Романовский

7012. Математический анализ марксистской теории о воспроизводстве (1). Почему необходимо преимущественное развитие производства средств производства при расширенном воспроизводстве. Хэ Цзо-сю, Ло Цзин-бо, Лисюэ сюэбао Chinse J. Mech., 1957, **1**, № 1, 109—130 (кит.; рез. русск.)

Это первая из статей, в которых авторы применяют математику в изучении марксистской теории воспроизводства. В данной статье производится количественный анализ марксистского положения о необходимости преимущественного развития производства средств производства при расширен о воспроизводстве. Вся статья делится на шесть частей. В введении доказывается необходимость применения математического метода при изучении экономики и указывается, что математический метод диктуется требованиями диалектического материализма для изучения политической экономии и является необходимым дополнением к нему.

В части первой кратко изложено марксистско-ленинское положение о преимущественном развитии производства средств производства и вместе с тем авторы показывают, что в нем отсутствуют строгое математическое доказательство и всесторонний анализ в количественном отношении. В части второй авторы останавливаются на рассмотрении необходимых условиях равновесия при обмене продуктов первого и второго подразделения и показывают, что различные формы таких условий фактически можно свести к одной формуле. Однако в ней имеется шесть переменных ($\Delta C_{\mathrm{I}}^{(1)}$, $\Delta V_{\mathrm{I}}^{(1)}$ $\Delta C_{\mathrm{II}}^{(1)}$, $\Delta V_{\mathrm{II}}^{(1)}$, $M_{\mathrm{I}}^{(2)}$, $M_{\mathrm{II}}^{(2)}$, которые определяют масштаб расширенного воспроизводства на следующий год. Поэтому, исходя лишь из условий баланса, нельзя вывести положение о преимущественном развитии производства средств производства.

В части третьей показано, что при рассматривании расширенного воспроизводства необходимо исходить из точки зрения осуществления и продолжения из года в год расширенного воспроизводства и следует, с этой точки зрения, количественно обосновать, что в условия непрерывного технического прогресса необходимо непрерывное преимущественное развитие производства средств производства для того, чтобы расширенное воспроизводство не обрывалось. Однако это не исключает, что при определенных условиях и в определенное время возможно и преимущественное развитие производства предметов потребления. В части четвертой рассматривается пропорция между темпами развития производства первого и второго подразделения и соотношение между различными коэффициентами воспроизводства (например, органическое строение, норма прибавочной стоимости, норма накопления, норма средней прибыли и т. д.), с другой стороны, указано, что как при капитализме, так и при социализме в реальной экономической жизни изменение этих коэффициентов имеет тенденцию, приводящую к преимущественному развитию производства средств производства. В последней части приведены все выводы, полученные авторами данной статьи. Резюме авторов

7013. Письмо в редакцию. Хелгесон, Го (Letter to the editor. Helgeson W. B., Kwo T. T.), Manag. Sci., 1956, **3**, № 1, 115 (англ.)

Авторы предлагают правило нахождения пересечения последовательности в шаге n — С вычислительного метода, предложенного Джексоном (РЖМат, 1957, 1661).

В качестве критерия для хорошего баланса предлагают: а) полное холостое (не работающее) время должно быть минимальным, либо: б) изменение суммарной работы передачи от размещения к размещению должно быть минимальным.

Применение любого из этих критериев практически устраняет произвольность, имевшую место в шаге n — с метода, предложенного Джексоном. Поскольку первый критерий дает баланс с наименьшей стоимостью, а второй дает баланс наиболее быстро, экономически предпочтительно применять первый критерий.

Н. Н. Говорун

7014. Исследование прибылей, получаемых при использовании счетнорежущих устройств на ткацких станках. Терпстра (Investigating the profits obtained by using cutmeters on looms. Terpstra T. J.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 407—408 (англ.)

Общее описание некоторой производственной задачи. Математическая формулировка и решение отсутствуют.

В. Н. Соколова

7015. Оптимальная мощность транспортной связи между двумя стадиями производственного процесса. Сантман (Optimum transport capacity between two stages of a process. Santman F.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 414—417 (англ.)

7016. Инвентарный контроль и объем партий при серийной продукции. Схафсма (Inventory control and lot size in batch production. Schaafsma A. H.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 412—414 (англ.)

Приводятся результаты исследований зависимости количества продукции на складе, достаточной для обеспечения максимального спроса в течение некоторого времени, от среднего годового спроса, периода между поступлениями партий и величины времени. С. С. Кислицын

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

7017. Решение задачи ранжирования по парным сравнениям. Форд (Solution of a ranking problem from binary comparisons. Ford L. R., Jr), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 8, Part 2, 28—33 (англ.)

Известна матрица $A = (a_{ij})$, где a_{ij} — число случаев предпочтения предмета i предмету j ($a_n = 0$). Предполагается, что сравнения независимы, а вероятность предпочтения предмета i предмету j выражается с помощью весов W_k, ассоциируемых с каждым предметом k, в виде отношения $W_i/(W_i + W_j)$. Обосновывается итерационный метод решения системы уравнения максимального правдоподобия для оценок W_i по A.

С. С. Кислицын

7018. Метод частичного покрытия карт в выборочных исследованиях. Дес-Радж (On the method of overlapping maps in sample surveys. Des Raj), Санкия, Indian J. Statistics, 1956, **17**, № 1, 89—98 (англ.)

Рассматривается вопрос о пропорциях и способах отбора при районированных (групповых) выборках в случае, когда по выборочным данным надо определять два показателя и когда веса отдельных групп, соответствующие каждому из этих показателей, неодинаковы.

М. И. Эйдельнант

7019. Некоторые замечания о проблеме относительной эффективности. Жаркович (Einige Bemerkungen über das Problem der relativen Wirksamkeit. Žarkovic S. S.), Mitteilungsbl. math. Statist., 1956, **8**, № 2, 131—140 (нем.)

7020. Некоторые вопросы теории контрольных карт. I, II, III. (Сводный предварительный доклад). Сугияма (Some theory of control charts. I, II, III. Summarized preliminary report. Sugiyama Hiroshi), Math. Japon., 1953, **3**, № 1, 13—29, 30—31, 33—35 (англ.)

7021. Метод определения вероятности ошибок и метод сравнения точности результатов измерений. Тагути, Хёдзюнка, Standardization, 1957, **10**, № 11, 836—841 (японск.)

7022. Приложения нового графического метода при статистическом измерении. Минцер (Applications of a new graphic method in statistical measurement. Mincer Jacob), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, **52**, № 280, 472—478 (англ.)

Развивая метод, предложенный Асковицем (РЖМат, 1958, 1615), автор описывает графические процедуры для определения средних отклонений, меру концентрации скользящих средних и сезонных индексов и т. д.

Из резюме автора

7023. Непрерывнодействующие планы выборочного контроля. Баукер (Continuous sampling plans. Bowker Albert H.), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 5. Berkeley — Los Angeles, 1956, 75—85 (англ.)

В ряде случаев (например, при конвейерном производстве) выделение отдельных «партий» продукции является искусственным и практически нецелесообразным. Контроль должен быть непрерывнодействующим, но некоторое время он может быть сплошным, затем часть изделий, быть может, будет принята без контроля или по выборочному контролю и т. п.

В работе дается обзор литературы (11 назв.), посвященной изложению подходящих для этой цели планов, начиная от простого, первого из предложенных, плана CSP-1 (Dodge H. F., Ann. Math. Statistics, 1943, **14**, 264—279) и кончая своеобразными планами многоступенного контроля (РЖМат, 1957, 3356). Дается описание плана и формулы для среднего (при $P = \text{const}$), предельного выходного качества и среднего объема инспекции.

М. И. Эйдельнант

7024. Основание европейской организации по контролю качества. Пфанцагль (Gründung einer europäischen Organisation für Qualitätskontrolle. Pfanzagl J.), MTW — Mitt., 1957, **4**, № 6, 381—382 (нем.)

Сообщается об организации в рамках EPA (European Productivity Agency) общества «Европейской организации по контролю качества» (EOQC) в Гааге, имеющего целью способствовать приложению статистических методов к промышленности вообще и к контролю качества в особенности.

Н. В. Смирнов

7025. Применимость приближения, использующего огибающую, для распределения амплитуды случайного шумового сигнала. Вудинг (Validity of the envelope approximation to the amplitude distribution of a Random noise signal. Wooding R. A.), N. Z. J. Sci. and Technol., 1956, **B37**, № 6, 689—699 (англ.)

Пусть $x(t)$ — случайный стационарный гауссовский процесс. Предположим, что

$$x(t) = \sum (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t).$$

Огибающей процесса $x(t)$ называют в технической литературе процесс

$$v(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)},$$

где

$$y(t) = \sum (a_k \sin \omega_k t - b_k \cos \omega_k t).$$

Автор находит совместное распределение величин x и v в точке, где v имеет относительный максимум. Проводится качественное и количественное (4 таблицы) обсуждение результатов, приводящее к выводу, что если v в точке максимума велико, то $x \approx v$. Указываются приложения к изучению волн в океане.

Р. Л. Добрушин

7026. Систематический подход к одному классу проблем в теории шумов и других случайных явлений. Ч. 1. Дарлинг, Зигерт (A systematic approach to a class of problems in the theory of noise and other random phenomena. Part 1. Darling D. A., Siegert A. J. F.), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, **3**, № 1, 32—37, 81, 82 (англ.)

Статья посвящена изучению распределения функционалов вида

$$\xi_t = \int_0^t \Phi(x(\tau), \tau)\, d\tau, \qquad (1)$$

где $x(t)$ — многомерный марковский процесс. Основная часть статьи содержит более популярное изложение результатов авторов (РЖМат, 1957, 5749). Кроме того, в качестве примера авторы применяют найденное ими интегральное уравнение для характеристической функции величины ξ_t к случаю, когда

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Delta^{-1} & \text{при } |x - z| < \Delta/2, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

и процесс одномерный и однородный. В результате они находят предельную характеристическую функцию величины (1) при $\Delta \to 0$. Показывается, что при $t \to \infty$ эта предельная характеристическая функция сходится после соответствующей нормировки к характеристической функции нормального распределения.

Даны краткие автобиографии авторов. Р. Л. Добрушин

7027. **Анализ общей системы для детектирования амплитудно-модулированного шума. Парзен, Шайрен** (Analysis of a general system for the detection of amplitude-modulated noise. Parzen Emanuel, Shiren Norman), J. Math. and Phys., 1956, 35, № 3, 278—288 (англ.)

Рассматривается сигнал

$$u(t) = y(t)[1 + mg(t)] + z(t),$$

где $y(t)$, $g(t)$ и $z(t)$ — независимые друг от друга гауссовские процессы. Систематически используя тот факт, что старшие моменты гауссовских величин выражаются через моменты второго порядка, автор устанавливает различные характеристики процесса $v(t)$, возникающего из $u(t)$ после прохождения $v(t)$ через нелинейные системы. В частности, вычисляется спектр процесса $x(t) = [u(t)]^2$. Общая система детектирования приводит к

$$v(t) = \int_0^T \bar{v}(t)\,dt,$$

где

$$\bar{v}(t) = v_1(t)\,v_2(t),$$

$$v_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_j(\xi)\,u_j^2(t-\xi), \qquad j = 1,2,$$

$$u_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_j(\alpha)\,u(t-\alpha)\,d\alpha.$$

Для этой системы детектирования находится дисперсия величины $V(t)$. Более подробно рассматривается удобный для вычислений случай, когда фильтры k_j, h_j являются гауссовыми, т. е. когда эти функции совпадают с точностью до множителя с плотностью гауссовского распределения. При вычислениях существенно используются естественные с физической точки зрения предположения о малости некоторых параметров системы.

Р. Л. Добрушин

7028. **Систематический подход к одному классу проблем в теории шумов и других случайных явлений. Ч. 2. Примеры. Зигерт** (A systematic approach to a class of problems in the theory of noise and other random phenomena. Part 2. Examples. Siegert Arnold J. F.), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, 3, № 1, 38—43 (англ.)

Используются обозначения, введенные в ч. I (РЖМат, 1957, 5749). Пусть $x(t)$ — одномерный стационарный гауссовский марковский процесс (процесс Уленбека) и

$$\Phi(x(\tau), \tau) = k(\tau)\,x^2(\tau).$$

Применяя результаты ч. 1, автор сводит задачу нахождения характеристической функции величины ξ_t к задаче о решении линейного дифференциального уравнения второго порядка. В частных случаях $k(\tau) \equiv 1$ и $k(\tau) = e^{\lambda\tau}$ это решение удается найти в явном виде.

В предыдущих работах (Kac M., Siegert A. J. F., J. Appl. Phys., 1947, 18, 383—397; РЖМат, 1956, 6025) было найдено решение той же задачи, но в случае произвольного одномерного гауссовского процесса $x(\tau)$. Решение было основано на использовании разложения процесса в ряд с независимыми гауссовскими коэффициентами и было дано через детерминант Фредгольма интегрального уравнения, ядро которого — корреляционная функция процесса. В реферируемой работе подробно сравниваются решения, полученные двумя разными методами.

Р. Л. Добрушин

7029. **Информация, шумы и вероятности ошибок. Элайас** (Information, noise and error probability. Elias Peter), Proc. Nat. Electronics Conf. 1956, (1957), 12, 389—393 (англ.)

Беглый обзор основных фактов теории информации.

Р. Л. Добрушин

7030. **Исследование амплитудного квантования при помощи импульсной теоремы Найквиста. Уидроу** (A study of rough amplitude quantization by means of Nyquist sampling theory. Widrow Bernard), IRE Trans. Circuit. Theory, 1956, 3, № 4, 266—276 (англ.)

В системах автоматического регулирования применяются устройства для квантования сигнала, преобразующие непрерывную функцию, принимающую лишь целочисленные значения. Рассматривается работа такого устройства в случае, когда процесс на входе его случаен.

М. А. Айзерман

7031. **К вопросу о приемочном контроле по величине количественных показателей. Эйделынант М. И.**, ЎзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н., 1957, № 3, 63—70 (рез. узб.)

Пусть продукция принимается первым сортом, если генеральная средняя $\bar{x}_0$ какого-либо количественного показателя меньше L, и вторым — в противоположном случае. Рассматривается вопрос о целесообразности для приемщика (поставщика) производства дополнительной выборки при условиях, что выборочное среднее первой выборки не намного меньше (больше) L и стоимость последующих проб оплачивается приемщиком (поставщиком).

Примечание референта. A_1 означает прием продукции более высоким сортом, а не более низким, как указано на стр. 64.

С. С. Кислицин

7032. **Некоторые замечания о теории очередности. Хисинума,** Нихон токэй гаккай кайхо, Bull. Japan Statist. Soc., 1955 (1956), 70—75 (японск.)

Процесс очереди, или процесс накопления, теоретически был исследован Эрлангом.

В данной работе приводятся основные положения теории Кендалла, которые играли существенную роль в развитии теории очередей. Особенно интересен тот факт, что, исходя из идеи рабочего периода, который был указан Кендаллом и разработан Борелем, можно проанализировать ветвящийся процесс математической теории размножения в популяции. Иначе говоря, следует указать на тесную связь теории очередей с теорией роста популяции. Бейли (РЖМат, 1957, 1671) применил некоторые теоремы очередей к спектральной теории рождения и смерти.

В заключение рассмотрен случай, который является особым случаем теории Кендалла (Kendall D G., J. Roy. Statist. Soc. B., 1951, 13, № 2, № 2; РЖМат, 1956, 3218); но распространяется и на теорию Бейли.

По резюме автора

7033. Очередь с нетерпеливыми покупателями и случайным обслуживанием. Баррер (Queuing with impatient customers and indifferent clerks. Barrer D. Y.), Operat. Res., 1957, 5, № 5, 644—649 (англ.)

На единственную линию обслуживания поступает поток покупателей пуассоновского типа с параметром λ. Допускается ожидание обслуживания, но если покупатель, вошедший в систему, не обслуживается в течение времени τ_0, то он покидает систему и становится потерянным, «выбывшим» покупателем. Время обслуживания имеет показательный закон распределения с параметром μ. После очередного освобождения обслуживающей линии из покупателей, ожидающих в этот момент, немедленно наудачу выбирается один для нового обслуживания. В этих предположениях составляются уравнения для определения распределения длины очереди в конечный момент t. Решение получается лишь в положении равновесия ($t\to\infty$). В этом случае определяется и ожидаемая норма выбывания — величина, характеризующая число потерянных покупателей. Приводятся численные результаты. О. В. Шалаевский

7034. Очередь с нетерпеливыми покупателями и обслуживанием в порядке поступления. Баррер (Queuing with impatient customers and ordered service. Barrer D. Y.), Operat. Res., 1957, 5, № 5, 650—656 (англ.)

В ситуацию, приведенную в реф. 7033, автор вносит изменения, касающиеся вопроса о порядке обслуживания ожидающих покупателей и поведения последних. Принимается принцип: «первый прибыл — первым обслуживается»— и следующие два типа поведения: а) если покупатель обслужен прежде, чем истекло его максимально возможное время ожидания τ_0, он остается в системе до конца своего обслуживания и б) покупатель, общее время пребывания которого в системе превысило τ_0, считается потерянным покупателем. Эти два типа порождают две соответствующие проблемы. В первой s линий обслуживания, во второй одна. Для обеих находятся уравнения для распределения длины очереди в конечное время t. Уравнения решаются в равновесном случае. Кроме того, вычисляется величина Q — отношение ожидаемой нормы «выбивания» к средней норме прибытия покупателей. О. В. Шалаевский

7035. Сети линий ожидания. Джексон (Networks of waiting lines. Jackson James R.), Operat. Res., 1957, 5, № 4, 518—521 (англ.)

Имеется M отделов: $1, 2 \ldots M$. Отдел m располагает n_m обслуживающими единицами и время обслуживания каждой единицей следует экспоненциальному распределению со средним $1/\mu_m$. Покупатели прибывают в отдел m как извне системы, образуя пуассоновский поток с интенсивностью λ_m, так и из других отделов, например из отдела k ($k = 1, 2, \ldots, M$), мгновенно после окончания там своего обслуживания с вероятностью ϑ_{mk}. Все прибывающие покупатели обслуживаются в порядке очереди. Пусть $\Gamma_m = \lambda_m + \Sigma_k \vartheta_{mk}\Gamma_k$ — интенсивность прибытия покупателей в отдел m из любого источника, внутри или вне системы. Пусть k_m — число покупателей, ожидающих и обслуживающихся в отделе m. Вектор $(k_1, k_2, \ldots, k_M)$ определяет состояние системы.

Теорема. Определим P_k^m уравнениями ($\Sigma_k P_k^m = 1$)

$$P_k^m = \begin{cases} P_0^m (\Gamma_m/\mu_m)^k / k!, & k = 0, 1, \ldots, n_m \\ P_0^m (\Gamma_m/\mu_m)^k / n_m! (n_m)^{k-n_m}, & k = n_m, n_m+1, \ldots \end{cases}$$

Тогда если $\Gamma_m < \mu_m n_m$, то

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_M) = P_{k_1}^1, P_{k_2}^2 \ldots P_{k_M}^M.$$

Всюду имеется в виду установившееся положение. О. В. Шалаевский

7036. Проблемы времени простоя. Такач (Bizonyos várakozasi idő problémáról. Takács Lajos), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1957, 7, № 2, 183—197 (венг.)

Венгерский перевод статьи автора (РЖМат, 1958, 6054).

7037. Непараметрические критерии Уилкса и их приложения к статистической гидрологии. Бильe (Les tests non paramétriques de Mr. Wilks et leurs applications en hydrologie statistique. Billiet A.), Houille blanche, 1956, 11, № A, 180—191. Discuss., 192 (франц.; рез. англ.)

Указываются возможности приложения к гидрологии непараметрических критериев принадлежности двух выборок к одной и той же генеральной совокупности, основанных на подсчете числа членов одной выборки, выходящих за пределы интервала между крайними членами другой или превышающих максимальный член в другой выборке. Этот метод был предложен Уилксом; необходимые для применения таблицы Розенбаума (РЖМат, 1955, 5979) приводятся в приложении к статье. Г. М. Мания

7038. О приложении различных предельных законов крайних значений к проблеме расходов воды при паводках. Бернье (Sur l'application des diverses lois limites des valeurs extrêmes au problème des débits de crues. Bernier M. J.), Rev. statist. appl., 1957, 5, № 2, 91—101 (франц.)

Из трех единственно возможных предельных законов для максимального члена выборки: 1) двойного экспонентного $F_{\mathrm{I}}(x) = e^{-e^{-x}}$ $-\infty < x < \infty$, который автор не совсем правильно называет законом Гумбеля, 2) закона Фреше типа $F_{\mathrm{II}}(x) = e^{-x^{-k}}$ $(0 < x < \infty)$, $F_{\mathrm{II}}(x) = 0$ $(x < 0)$ $k > 0$ и 3) закона вида $F_{\mathrm{III}}(x) = e^{-(-x)^k}$ $(-\infty < x < 0)$, $k > 0$, $F_{\mathrm{III}}(x) = 1$, $x \geqslant 0$, наибольшие практические приложения в гидрологии получил двойной экспонентный закон. Известно, что быстрота сходимости распределения крайнего члена к закону $F_{\mathrm{I}}(x)$ зависит от поведения функции распределения величины при $x \to \infty$. Для закона Гаусса и в особенности для логарифмически-нормального это приближение протекает исключительно медленно, в то время как при законах типа III Пирсона наблюдается быстрая сходимость. В некоторых случаях, как это указывалось еще Фишером, допредельный вид распределения максимального члена с большой точностью передается надлежаще подобранным законом типа Фреше или типа $F_{\mathrm{III}}(x)$. Кроме того, закон Фреше обладает рядом свойств, которые делают его особенно подходящим для интерпретации наблюдаемого распределения максимального члена в том случае, когда исходное распределение имеет очень большую дисперсию; он притягивает законы с плотностями убывающими как x^{-k} при $x \to \infty$; при $k \to \infty$ при надлежащей нормировке закон Фреше приближается к закону $F_{\mathrm{I}}(x)$. Рассматривая ряд примеров приближения закона Фреше к распределению годовых максимумов на Рейне, Колорадо и других реках, автор находит в большинстве случаев большее согласование теории и опыта, чем при законе $F_{\mathrm{I}}(x)$, для которого слишком малые вероятности соответствуют большим значениям максимумов. Н. В. Смирнов

7039. Энергетическое многолетнее регулирование речного стока в некоторых сложных случаях. Картвелишвили Н. А., Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1957, № 6, 102—109

Рассматривается многолетняя составляющая емкости водохранилища многолетнего регулирования. Исследуются колебания объема стока за годичные интервалы времени. При этом автор считает, что речной сток описывается стохастическим дискретным процессом марковского типа и стохастическая связь между стоками несмежных лет отсутствует.

Определяется вид функции перехода, управляющей процессом, т. е. вероятность того, что в $(k+1)$-м году сток не превысит u_{k+1}, если в k-м году сток был равен u_k. Уравнение функции перехода выводится в предположении, что двумерный вектор с компонентами $f(u_k)$ и $f(u_{k+1})$ распределен также по нормированному нормальному закону (здесь $f(u)$ — неубывающая функция, надлежаще подобранная и «нормализирующая» первоначальное распределение годового стока $F_1(u)$). Оно имеет следующий вид:

$$F_1(u_{k+1}/u_k) = \frac{1}{2} + G\left[\frac{f(u_{k+1}) - rf(u_k)}{\sqrt{1-r^2}}\right],$$

где r — коэффициент корреляции случайных переменных $f(u_{k+1})$ и $f(u_k)$, а $G(k)$ — нормальный интеграл вероятности.

Далее при помощи формулы полной вероятности выводится интегральное уравнение функции распределения вероятностей наполнения водохранилища при ограниченном объеме водохранилища. При этом автор вводит предположение, что отдача воды из водохранилища в $(k+1)$-м году зависит лишь от его наполнения к концу k-го года.

Это уравнение решается приближенно.

Далее выводятся аналогичными методами уравнения функций распределения безусловных вероятностей наполнения водохранилищ двух параллельно работающих ГЭС для случая наличия стохастической связи между стоками рек, на которых они расположены, и при отсутствии связи между стоками смежных лет одной и той же реки. Эти интегральные уравнения также решаются приближенными методами.

Из них выводится формула для расчетной обеспеченности гарантированной отдачи энергии при совместной работе обеих ГЭС. М. А. Куликов

7040. Производительность N машин, обслуживаемых в фиксированном порядке одним рабочим при постоянном времени перехода и ремонта. Мак, Мерфи, Уэбб (The efficiency of N machines unidirectionally patrolled by one operative when walking time and repair times are constants. Mack C., Murphy T., Webb N. L.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 1, 166—172 (англ.)

Рассматривается система, состоящая из N машин, не требующих при нормальной работе вмешательства рабочего и работающих независимо. Вероятность остановки работающей машины за время dt равна $\gamma dt + o(dt)$, время перехода рабочего от одной машины к другой — K; добавочное время, затрачиваемое рабочим на пуск в ход остановившейся машины (время ремонта), равно C.

Каждый цикл обслуживания производится в одинаковом и фиксированном порядке: первая, вторая и т. д.

В реферируемой работе выведено уравнение для вероятности $p(R)$ остановки R машин в течение одного цикла обслуживания:

$$p(R)\exp[-\gamma(NK+R_C)] + p(R+1)\exp[-\gamma\{NK+(R+1)C\}] = p(R)$$

и доказано существование и единственность решения. Явное выражение для $p(R)$ очень громоздко.

Приведена также таблица к. п. д. группы машин (т. е. отношения средней производительности ее к производительности, достигаемой при работе без остановок машин) в функции от γNK и γC. В. П. Швальб

7041. Производительность N машин, обслуживаемых в фиксированном порядке одним рабочим при постоянном времени перехода и переменном времени ремонта. Мак (The efficiency of N machines unidirectionally patrolled by one operative when walking time is constant and repair times are variable. Mack C.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 1, 173—178 (англ.)

Рассматривается система из N машин, не требующих при нормальной работе вмешательства рабочего и работающих независимо.

Вероятность остановки r-го типа $(r=1,2,\ldots M)$ за время dt равна $\lambda_r\gamma dt$, где $\Sigma_{r=1}^{M}\lambda_r = 1$, соответствующее время ремонта машины равно C_r.

Дается вывод системы уравнений для нахождения вероятностей $p(i_s, j_t, k_u \ldots)$ того, что i-я машина имеет остановку s-го типа, j-я машина — остановку k-го типа и т. д.

Приведена также формула для вычисления среднего времени одного цикла и к. п. д. группы машин. (См. также реф. 7040). В. П. Швальб

7042. Изучение модели, подсказанной исследованием статистических свойств прозрачности фотографической эмульсии. Савелли (Étude d'un modèle suggéré par des recherches sur les propriétés statistiques de la transparence des émulsions photographiques. Savelli Michel), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 13, 1710—1721 (франц.)

Автор рассматривает такую схему флуктуации прозрачности: зерна эмульсии представляют собой кружки определенного радиуса r_0, их центры разбросаны в плоскости по закону Пуассона, прозрачность $T(M)$ в точке M равна $h_1 h_2^n$, если на M попадает n зерен эмульсии $(n=0,1,\ldots)$. Вычислены: характеристическая функция для чисел зерен n_1 и n_2, одновременно попадающих на точки M_1 и M_2, $a = [T(M)] = h_1 e^{-\pi d r_0^2 (1-h_2)}$

$$[(T(M_1) - MT(M_1))(T(M_2) - MT(M_2))] =$$

$$= a^2\{e^{dr_0(\pi-2\beta)(1-h_2)^2} - 1\}.$$

Здесь $\beta = \pi/2$ при $l \geqslant 2r_0$ и $\beta = \arcsin\left(\frac{l}{2r_0} + \frac{l}{2r_0}\sqrt{1-\frac{l^2}{4r_0^2}}\right)$ при $l \leqslant 2r_0$; $l = \rho(M_1, M_2)$, d — параметр закона Пуассона (E — знак математического ожидания).

Б. В. Гнеденко

7043. Распределение вероятности после отфильтрованного выхода умножителя, если на его входе коррелированы стационарные гауссовские процессы. Лампард (The probability distribution for the filtered output of a multiplier whose inputs are correlated, stationary, Gaussian time-series. Lampard D. G.), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, **2**, № 1, 4—11, 45 (англ.)

Рассматривается система, состоящая из умножителя и фильтра (с переходной характеристикой $h(t)$) на его выходе. На выходы умножителя поступают стационарные гауссовские процессы $x_1(t)$ и $x_2(t)$, для которых определены корреляционные функции $\psi_{ij}(u) = Mx_i x_j$ $(i, j = 1, 2)$. Определяется $p(x_0)$ — одномерная плотность распределения процесса $x_0(t)$ на выходе системы. Для

$x_0(t)$ справедливо:

$$x_0(t) = \int_0^t x_1(t-u)\, x_2(t-u)\, h(u)\, du.$$

Для $M(i\theta)$ — одномерной характеристической функции процесса $x_0(t)$ — найдено выражение:

$$M(i\theta) = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=-n}^{n} (1 - 2i\theta\lambda_j)^{-1/2},$$

где λ_j — собственные числа системы интегральных уравнений:

$$2\lambda g_1(v) = \int_0^\infty \psi_{12}(v-u)\, h(u)\, g_1(u)\, du + \int_0^\infty \psi_{11}(v-u)\, h(u)\, g_2(u)\, du$$

$$2\lambda g_2(v) = \int_0^\infty \psi_{22}(v-u)\, h(u)\, g_1(u)\, du + \int_0^\infty \psi_{21}(v-u)\, h(u)\, g_2(u)\, du.$$

Сравнительно простые выражения для $p(x_0)$ получены в двух частных случаях: $h(t) = \delta(t)$ и $h(t) = \beta e^{-\beta t}$, что соответствует умножителю без фильтра и с RC-фильтром соответственно. Библ. 21 назв. Б. С. Цыбаков

7044. Стабильность метода сглаживания в цифровых контрольных счетчиках. Каруш (Stability of a method of smoothing in a digital control computer. Karush William), IRE Trans. Electronic Comput., 1955, EC-4, № 1, 26—31, 32 (англ.)

Пусть $\xi(t)$ — случайная функция, значения которой в моменты времени $t = 1, 2, \ldots, n$ суть $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$. Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуется при сглаживании и предсказании, основанных на $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. При этом

$$x_n = \alpha L_q(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-q-1}) + (1-\alpha)\,\xi_n,$$

где $L_q(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-q-1}) = f(n)$, причем $f(t)$—есть полином Лагранжа степени, не большей q и принимающий значения x_t для $t = n-1,\ n-2, \ldots, n-q-1$. Величина α — весовой коэффициент $(0 < \alpha < 1)$. Метод сглаживания будет стабильным, если в выражении для x_n, расписанном через ξ_i $(i = 1, \ldots, n)$

$$x_n = (1-\alpha)(\xi_n + b_{q+1}\xi_{n-1} + \ldots + b_{n+q-1}\xi_1) + D_{q+1}b_{n-1} + D_q b_n + \ldots + D_1 b_{n+q-1},$$

величины $b_n = b_n(\alpha)$ стремятся к 0 при $n \to \infty$ $(D_1, \ldots, D_{q+1}$ зависят от начальных условий).

Доказано, что стабильность имеет место, если $0 < \alpha < \alpha' < 1$ и не имеет места при $\alpha' < \alpha < 1$, где

$$\alpha' = \frac{1}{\left(2\cos\frac{\pi}{q+1}\right)^{q+1} + 1}, \quad q \geqslant 1.$$

Находится, что если решение стабильно и если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы с общей дисперсией σ^2, то σ_n^2 — дисперсия x_n—имеет предел σ_∞^2. Дается способ вычисления отношения $\frac{\sigma_\infty^2}{\sigma^2}$. Выясняется асимптотическое поведение Mx_n. В качестве примера разобран случай квадратичного предсказания. Б. С. Цыбаков

7045. Составление железнодорожных расписаний. Белер, Вербек (Wachttijdproblemen bij treinverkeer. Bähler W. Th., Verbeek J. L.), Electro-techn., 1957, **35**, № 23, 539—541 (гол.; рез. англ.)

Расписание железнодорожной кампании обеспечивает идеальное движение. Однако могут возникнуть небольшие отклонения. Статистика, составляемая на основе измерений в отдельных пунктах, дает основу для вычисления вероятности занятости станций, железнодорожных узлов, или пересечения. В статье решается одна простая проблема, и в качестве примера используются некоторые функции плотности вероятностей. Резюме автора

7046. Статистическая обработка результатов измерений (Statistische Auswertung von Meßergebnissen.), Standardisierung, 1957, **3**, № 8, 1259—1271 (нем.)

Дается краткий обзор элементарных приемов математической статистики, используемых для оценок параметров и проверки гипотез. Указываются статистические приложения в текстильной промышленности. Н. В. Смирнов

7047. Допуски в подгонке обуви. Маннинг (Tolerances in fitting shoes. Manning J. R.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 325—336 (англ.)

При массовом производстве предметов одежды и обуви выгодно в целях уменьшения издержек производства сокращение количества выпускаемых размеров до разумного уровня. С целью изучения зависимости качества подгонки от имеющегося набора размеров и ширины обуви был произведен опыт с примеркой группой женщин 50 пар обуви двух фасонов, изготовленных при помощи 25 разных колодок, причем для каждого из 5 размеров имелись 5 колодок разной ширины. Качество подгонки оценивалось по четырехбалльной системе. Результаты примерки изображались точками на точечной диаграмме. Сравнение полученных результатов с контурными эллипсами двумерного нормального распределения длины ступни и ее окружности в подъеме позволяет решить задачу оптимального выбора ассортимента колодок. В. В. Петров

7048. Калькуляция капиталовложений. Формулы, теория и практика. Иверсен (Investeringskalkyler. Bruk av formler i teori og praksis. Iversen Thor A.), Bedrifts — økon., 1957, **19**, № 7, 279—280, 283—284, 314—315 (норв.)

7049. «Контроль и связь — основные понятия кибернетики». Вудуорд («Control and communication — a management concept of cybernetics». Woodward Joan), Instn Prod. Engrs J., 1957, **36**, № 9, 539—548 (англ.)

7050. На языке классификации: очерк «термостатической» теории» систем категорий с виллисовской (натуральной) структурой. Мандельброт (On the language of taxonomy: An outline of a «thermostatistical» theory of systems of categories with Willis (Natural) structure. Mandelbrot Benoît), Jnform. Theory 3rd London Sympos., 1955, London, 1956, 135—145 (англ.)

Указывается на известную аналогию между свойствами классической термодинамической системы и системы классификации растений или животных. С. С. Кислицын

7051. Зависимость дисперсии урожаев от размеров делянки. Уитл (On the variation of yield variance with plot size. Whittle P.), Biometrika, 1956, **43**, № 3—4, 337—343 (англ.)

Изменение дисперсии в зависимости от размеров и формы делянки может быть выражено с помощью ковариации урожав в двух любых точках делянки, если эта последняя задана как функция координат этих точек. В статье исследуются общие формулы, выражаю-

щие связь между предельной ковариационной функцией

$$\rho(S) = \lim_{A_1\, A_2 \to 0} \frac{\operatorname{cov}[y(\Omega_1), y(\Omega_2)]}{A_1\ A_2}$$

и дисперсией

$$V(\Omega) = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} \rho(X_1 - X_2)\, dX_1, dX_2,$$

где A_1 и A_2 — площади областей (делянок) Ω_1 и Ω_2, y — урожай; $S = \overrightarrow{M_1, M_2}$ — вектор, соединяющий две точки M_1 и M_2 на площадках A_1 и A_2, и X_1, X_2 — вектор-координаты M_1 и M_2. М. И. Эйдельнант

7052. Приложение статистического метода к предсказанию выигрыша на скачках. Наддео (Applicazione del método statistico ai pronostici del totocalcio. Naddeo Alighiero), Statistica, 1957, **17**, № 4, 395—413 (итал.)

7053. О закономерности естественного выбывания. Бёк (Über die Gesetzmäßigkeit des naturlichen Zugrundegehens. Böck H. S.), Osterr. Ingr-Arch., 1955, **9**, № 4, 319—342 (нем.; рез. англ., франц.)

Доказано, что, подобно функциям роста, существуют также функции, регулирующие естественное выбывание объектов органического мира. Эти функции выбывания определены на базе таблиц смертности населения и статистических данных, собранных при исследовании загнивания 19 млн. деревянных шпал. В заключение рассмотрен пример функций естественного выбывания для предметов массовой продукции, сделанных из органических материалов. Резюме автора

7054. Новые пути современной теории риска. Рибарц (Neue Wege der modernen Risikotheorie. Rybarz J.), Österr. Ingr-Arch., 1956, **10**, № 2—3, 260—264 (нем.)

Современная теория риска примыкает к классической проблеме о разорении игрока. На основе теоремы Финетти (Finetti B., Giorn. Ist. Ital. Att. 1939, **10**, № 1—2) возможно оценить вероятность того, что игрок будет разорен в течение бесконечной последовательности партий. Точно так же эта теория имеет большое значение для страховых расчетов. Резюме автора

7055. Обобщения и приложения статистических методов. Кассан (Généralisations et applications des méthodes statistiques. Cassan), Ind. voies ferrées et transp. automob., 1957, 46, № 525, 89—95 (франц.)

Начало см. РЖМат, 1958, 6008. Рассматривается вероятностная теория безопасности инженерных сооружений. Вводится понятие риска, и показывается (при некоторых весьма дискуссионных предположениях), как вычислять вероятность разрушения. Кратко обозреваются некоторые вопросы статистической техники. Н. В. Смирнов

7056 К. Прикладные вероятности. Ред. Мак-Колл (Applied probability. Ed. MacColl L. A. (Proc. Sympos. Appl. Math., Vol. VII), Broklyn, Apr. 14—15, 1955. New York — Toronto — London, McGraw — Hill Book Co., 1957, 104 pp., 5 doll.) (англ.)

См. также: 6381, 6382

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев*

7057. Что такое касательная? Андри (What is a geometric tangent? Andree Richard V.), Math. Teacher, 1957, **50**, № 7, 498—501 (англ.)

Даны четыре наиболее часто встречающиеся в учебной практике ошибочных определения касательной к кривой (прямая, перпендикулярная к радиусу в его конце; прямая, имеющая с кривой единственную общую точку; прямая, которая имеет с кривой общую точку, но не пересекает ее; прямая, имеющая с кривой общую точку P, с центром в которой можно построить окружность, не содержащую общих точек, отличных от P). На простых примерах устанавливается ошибочность приведенных определений. Затем автор формулирует правильное определение касательной через предельный переход. В. С. Малаховский

7058. Подвижные модели однополостного гиперболоида. Крокос С. И., Наук. зап. Київськ. ун-т, 1957, **16**, № 2, 115—118

Описывается конструкция двух подвижных моделей (нитяных) однополостного гиперболоида. Первая осуществляет преобразование круглого гиперболоида в гиперболоид общего вида (аффинным преобразованием), вторая — преобразование круглого гиперболоида в конус и цилиндр.

Приложено по три фотоснимка каждой модели, изображающих эти модели в двух крайних и одном среднем положении управляющей подвижной детали. А. С. Кованько

7059. Уравнения совместности Бельтрами — Мичела в общей тензорной форме, полученные из условий совместности Санвенана. Анджелич (Извођење Beltrami — Michell — ових једначинâ у тензорском облику из Saint-Venant-ових услова компатибилности. Анђелић Татомир П.), Зб. радова. Српска АН, 1957, к. 55, 1—4 (сербо-хорв., рез. англ.)

В предыдущей статье (РЖМат, 1956, 8232) автор показал, как наиболее общая форма условий совместности Бельтрами — Мичела может быть получена из условий равновесия Ляме. Здесь он показывет, как тот же результат можно получить, отправляясь от условий совместности Санвенана. Из резюме автора

7060. Свойства пфаффианов и хафнианов. Каяньелло (Proprietà di Pfaffiani a Hafniani. Caianiello E. R.), Ricerca, 1956, 7, genn.-giugno, 25—31 (итал.)

Рассматриваются пфаффианы — агрегаты Пфаффа (см. Широков П. А., Тензорное исчисление. Л.—М., ГТТИ, 1934, стр. 270), т. е. рациональные выражения из элементов кососимметрических матриц, равные квадратным корням из определителей этих матриц, и вводящиеся автором хафнианы, определяющиеся аналогично с помощью перманентов, т. е. числовых функций матриц, отличающихся от определителей матриц заменой всех минусов в определении определителя плюсами. Специально рассматриваются связи этих величин с алгебрами Грассмана и Клиффорда. Автор считает, что пфаффианы и хафнианы окажутся полезными для квантовой физики и теории информации. Б. А. Розенфельд

7061 К. Основания геометрии. 2 изд. (Геометриис сапудзвлеби. Мэ 2 гамоцема). Пхакадзе А. Тбилиси, Научно-метод. кабинет, 1957, 410 стр., илл., 8 р. 70 к. (груз.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

7062. Задание сложных кривых поверхностей некоторых технических форм. Карпеченко Ф. Т., Тр. Всес. заочн. энерг. ин-та, 1957, вып. 10, 61—90

Рассматривается задание кривых поверхностей методом комплекса разверток. Чертеж комплекса разверток поверхности строят в виде графиков изменения функции $u = f(x, y)$ в зависимости от изменения ее аргументов. По поводу определения метода делается ссылка на статью автора «Задание незакономерных поверхностей методом комплекса разверток», помещенную в этом же сборнике.

В работе дается графическое решение некоторых практических задач на поверхности кулачка (называемого «коноидом») кулачковых механизмов с двумя степенями свободы в счетно-решающих приборах: определение угла подъема щупа, определение линии наибольшего подъема плоскости, проходящей через данную точку, наконец, рассматривается вопрос конструирования поверхности коноида по заданной функции $u = f(x, y)$, вычисляемой прибором.

Автор показывает использование метода комплекса разверток на примере построения изображений поверхностей самолетов. В. С. Люкшин

7063. Средняя кривизна главных сечений и вертикальный градиент ускорения силы тяжести в точке эллипсоида вращения. Брагер (Courbure moyenne des sections principales et gradient vertical de la pesanteur en un point d'un ellipsoide de révolution. Bragard L.), Bull. Soc. roy. sci. Liége, 1957, 26, № 3, 136—141 (франц.)

Для практического использования формулы

$$\delta r = \frac{a_m^2}{S} \iint_S \sin\frac{\psi}{2}\, \delta c\, dS$$

(РЖАстр, 1958, 2829) приведены точное выражение средней кривизны C главных сечений эллипсоида вращения и выражение, точное до третьей степени сжатия включительно. Выражения для C и γ подставлены в формулу Брунса и с указанной точностью получено выражение для вертикального градиента нормальной силы тяжести на поверхности эллипсоида вращения. Даны численные коэффициенты выражений вертикального градиента и кривизны C для эллипсоида Хейфорда и нормальной формулы Кассиниса. М. И. Юркина

7064. О движении частицы по тору. Боттема (On the motion of a particle on a torus. Bottema O.), Nieuw arch. wiskunde, 1957, 5, № 2, 75—80 (англ.)

Пусть тор S образован вращением круга радиуса r с центром в точке M вокруг оси, лежащей в плоскости круга. Точка M удалена от оси на расстояние $R > r$. Декартова система координат выбирается так, что за ось z принимается ось вращения, а плоскость XOY проходит через точку M. На S существуют три системы окружностей: 1) меридиональные: 2) параллельные; 3) система окружностей Виларсо (Villarceau), которая получается при пересечении S и плоскостей, проходящих через точку O и составляющих с плоскостью XOY угол $\alpha = \arcsin\frac{r}{R}$.

Выясняется вопрос, каким условиям должна удовлетворять центральная сила $f(\rho)$, где ρ — расстояние от точки на S до оси z, направленная к z, чтобы материальная точка на S двигалась под действием этой силы по окружности Виларсо. Дается необходимое и достаточное условие: $f(\rho) = k^2 \rho^{-3}$. Даются выражения для проекции $f(\rho)$ на плоскость XOY и для реакции опоры при таком движении. Отрицательно решается вопрос об устойчивости движения материальной точки по тору под действием центральной силы. А. Л. Вернер

7065. Экспериментальное обоснование евклидовой структуры и применимости квадратичной метрики в многообразии зрительных образов. Бергстрём, Реенпяя (Experimenteller Erweis der euklidisch-pythagoreischen Eigenstruktur sowie des Geltens einer quadratischen Metrik in der Gesichtsmannigfaltigkeit. Bergström R. M., Reenpää Y.), Acta physiol. scand., 1957, 38, № 3-4, 220—236 (нем.)

Перед наблюдателем помещалось круглое световое пятно, размеры и освещенность которого могли варьироваться. Изменение Δl размеров пятна измерялось по числу порогов различимости при неизменной освещенности; изменение освещенности Δi мерилось по числу порогов различимости при постоянном размере пятна. Независимо измерялось число Δs порогов различимости при совместном изменении размеров и освещенности пятна. Серией опытов хорошо подтверждено соотношение $\Delta s^2 = \Delta l^2 + \Delta i^2$. Отклонения Δl, Δi достигали пяти порогов различимости.

Работа сопровождается комментариями физиологического и философского характера.

В. А. Залгаллер, Ю. С. Богданов

7066. Граничные линии годографического преобразования. Гейрингер (Grenzlinien der Hodographentransformation. Geiringer Hilda), Math. Z., 1956, 63, № 5, 514—524 (нем.)

Исследуются особенности преобразования при переходе от двух независимых переменных x, y (физической плоскости) к двум новым независимым переменным u, v (плоскости годографа), соответствующие исчезновению якобиана преобразования. Линии, вдоль которых якобиан равен нулю, называются граничными линиями. Результаты даны автором в аэродинамической форме.

В плоскости x, y рассматривается стационарная задача потока со скоростью $\vec{q}$ сжимаемого газа, безвихревого, без трения, между давлением p и плотностью ρ имеется взаимно однозначное соответствие.

Обозначаются через u, v компоненты $\vec{q}$, q, ν — полярные координаты $\vec{q}$, составляются основные аэродинамические уравнения непрерывности и отсутствия вихрей, которые при помощи функции тока ψ и потенциала φ заменяются линейной системой:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \frac{q}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial q}, \quad (M^2 - 1)\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 5q\frac{\partial\varphi}{\partial q},$$

где $M^2 = q^2 \frac{d\rho}{dp} = \frac{q^2}{a^2}$, a — скорость звука.

Характеристики основных уравнений C^-, C^+ обозначаются как ξ кривая, η-кривая, их линейные элементы ds_1, ds_2, и если положить $h_1 = ds_1 / d\xi$, $h_2 = ds_2 / d\eta$, то функциональный определитель $J = \partial(x, y) / \partial(\xi, \eta) = h_1 h_2 \sin 2\alpha$, употребляется при сверхзвуковой скорости ($M > 1$); обозначаются $M = \operatorname{cosec}\alpha$, $\alpha \neq \nu$, $\alpha \neq 90°$. Исследуется линия l_1, определяемая уравнением $h_1(\xi, \eta) = 0$, и ее отображение L_1 на плоскость x, y. Если на l_1 $\frac{\partial h_1}{\partial\xi} \neq 0$, $\frac{\partial h_1}{\partial\eta} \neq 0$, то граничная кривая L_1 будет огибающей характеристик C^+, кривых постоянного направления ν и кривых постоянной скорости q. Характеристики C^-, линии тока и потенциальные линии имеют острия на L_1.

В случае $h_2 = 0$ получается граничная линия L_2 и меняются местами ξ, η. На граничной линии два решения совпадают. Двум областям в плоскости (ξ, η) по обе стороны l_1 соответствует область на x, y по одну

сторону L_1. Чтобы получить взаимно однозначное отображение, надо каждой из двух боковых областей l_1 сопоставить свой лист физической плоскости. Такой лист несет только один поток.

Случай $h_1 = h_2 = 0$ дает изолированную особую точку. В случае $h_1 = 0$, $\frac{\partial h_1}{\partial \eta} \neq 0$, $\frac{\partial h_1}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial^2 h_1}{\partial \xi^2} \neq 0$ в точке m на l_1 получается при отображении в точке M на L_1 острие и исследуется поведение характеристик, линий тока и потенциальных линий.

При M=1 звуковая скорость $a = q$ и в годографическом отображении играет роль якобиан $D = \partial(\varphi, \psi)/\partial(q, \nu) = \frac{\rho}{q} \varphi_\xi \varphi_\eta = \rho q h_1 h_2 \cos^2 \alpha$.

В случае $\alpha = 90°$ и $\psi_q = 0$, $\psi_\nu \neq 0$ появляется новая звуковая граничная линия L_t, которой касаются C^+ и C^-.

В случае $\varphi_\xi = 0$, $\varphi_\eta = 0$ определяемая звуковая граничная линия — эквипотенциальная линия и линия постоянной скорости — является огибающей обоих семейств характеристик, геометрическим местом остриев линий тока и линий постоянного направления, которые к L_t ортогональны.

При $M < 1$ (случай дозвуковой скорости) все производные x_q, x_ν, y_q, y_ν исчезают. В. С. Люкшин

7067. О физическом смысле тензора Римана. Пиани (On the physical significance of the Riemann tensor. Pirani F. A. E.), Acta phys. polon., 1956, 15, № 6, 389—405 (англ.; рез. русск.)

7068 Д. Некоторые вопросы нелинейной теории оболочек. Галимов К. З. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Ин-т механ. АН СССР, М., 1957

7069 Д. К теории связанных векторов в механике. Истомин Н. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

7070. О формуле Герона. Шталь (Heronische Formel. Stahl J.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, 10, № 6, 273 (нем.)

Из известных формул $F = \rho s = \rho_a (s - a) = \rho_b (s - b) = \rho_c (s - c)$, где F — площадь треугольника, ρ — радиус вписанного круга, а ρ_a, ρ_b, ρ_c — радиусы вневписанных кругов, получаем $F = \sqrt{s (s - a)(s - b)(s - c)}$.

С. И. Зетель

7071. О возможности представления героновых треугольников в виде суммы или разности пифагоровых. Жекулин А. С., Уч. зап. Тамбовск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 11

Рассматриваются героновы треугольники трех родов. 1) Героновы треугольники 1-го рода могут быть представлены в виде суммы или разности двух пифагоровых треугольников. 2) Героновы треугольники второго рода могут быть представлены в виде суммы или разности героновых треугольников первого рода. 3) Существуют героновы треугольники, не принадлежащие ни к первому, ни ко второму родам (показано автором). В таблицах героновых треугольников приводятся только треугольники первого и второго родов. Доказательство проводится при помощи точечной решетки и используется известное утверждение, что геронов треугольник — треугольник решетки.

Показано построение героновых треугольников, не принадлежащих ни к первому, ни ко второму роду, и приведены примеры таких треугольников. 1) со сторонами (2655, 3040, 385) и с площадью 3060330; 2) (5265, 32116, 28391); 56070630; 3) (120575, 232959, 219584); 13067090400. С. И. Зетель

7072. Об окружности Тейлора. Гурматай (Sur le cercle de Taylor. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1957, 66, № 4—6, 199—200 (франц.)

Принимая за единичный круг в комплексных координатах круг, описываемый около треугольника ABC, автор получает некоторые свойства окружности Тейлора, например: квадрат радиуса описанной окружности — среднее арифметическое квадратов радиусов окружностей Тейлора треугольника ABC и треугольников, имеющих две вершины в вершинах треугольника ABC и третью на окружности, описанной около треугольника ABC, в точке, диаметрально противоположной третьей вершине треугольника ABC. С. И. Зетель

7073. Об аксиоме конгруэнтности треугольников в ослабленной формулировке. Пикус Д. Л., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 359—362

В добавлении II к «Основаниям геометрии» Д. Гильберта (М.—Л., 1948) показано, что замена аксиомы конгруэнтности треугольников III_5 еще более узкой формой, касающейся лишь одинаково ориентированных треугольников (что, по существу, исключает использование симметрии при построении планиметрии), при отказе от аксиомы линейной полноты V_2, приводит к евклидовой планиметрии лишь при условии присоединения к планиметрической части гильбертовой аксиоматики трех новых аксиом. В работе доказывается, что также и в случае сохранения аксиомы линейной полноты замена аксиомы конгруэнтности треугольников указанной ослабленной формой этой аксиомы недопустима. Доказательство проводится путем построения модели геометрии, в которой выполняются все планиметрические аксиомы Гильберта, кроме аксиомы III_5, и ослабленная аксиома $III\frac{\cdot}{5}$, но в которой не имеет места аксиома III_5 в полной формулировке. И. М. Яглом

7074. О теореме Эрвея. Гурматай (Sur le théorème de Hervey. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1956, 65, № 4—6, 268—269 (франц.)

Пусть даны на плоскости четыре произвольные прямые. Эти прямые образуют четыре треугольника. Возьмем в каждом треугольнике отрезок, соединяющий центр описанного круга с ортоцентром, тогда медиатрисы этих отрезков пересекаются в одной точке, названной точкой Эрвея. В 1947 г. автор обобщил это положение на случай n произвольных прямых плоскости. Отмечается, что точка Эрвея для системы n произвольных прямых является концом результирующей n сил, приложенных в «относительном центре» данной системы прямых и концами которых являются «относительные центры» n систем по $(n - 1)$ прямой, полученных при последовательном отбрасывании каждой из данных n прямых. «Относительный центр» системы n прямых является обобщением центра описанного круга около треугольника.

Для всех систем из $(n-1)$ прямых отношения расстояний от точки Эрвея системы n прямых до «относительного центра» и до точки Эрвея какой-нибудь системы из $(n - 1)$ прямых равны. В. А. Маневич

7075. К рациональной квадратуре круга. Гофман (Zur rationalen Kreisquadratur. Hofmann J. E.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, 10, № 6, 253—257 (нем.)

Рассматривается приближение площади четверти круга площадью F_n многоугольника, полученного заменой секторов, на которые разбивается круг, «касательными» четырехугольниками

$$F_n = nr^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2 + k(k+1)}. \qquad (1)$$

Этот результат автор подвергает уточнению с помощью выражения:

$$\frac{1}{3}(4F_{2n} - F_n), \qquad (2)$$

дающего хорошее приближение. Так, уже при $n = 4$.

$$\frac{1}{3}(4F_8 - F_4) = 0{,}78536r^2.$$

А. Г. Школьник

7076. Окружность девяти точек и эллипс Штейнера. Вихерс (Negenpuntscirkel en ellips van Steiner. Wichers J.), Simon Stevin, 1956, **31**, № 2, 83—85 (гол.)

Показано, что если касательные к окружности девяти точек, построенные в точках ее касания с тремя вневписанными окружностями, пересекают стороны BC, CA и AB треугольника ABC соответственно в точках P, Q и R, то прямые AP, BQ и CR пересекаются в одной точке — центре окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$, образованный средними линиями треугольника ABC. Имеет место аналогичное предложение, получающееся из предыдущего заменой одной из вневписанных окружностей окружностью, вписанной в треугольник ABC. При этом прямые AP, BQ и CR пересекаются в центре соответствующей вневписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

Касательные к окружности девяти точек, построенные в точках ее касания с вписанной и вневписанными окружностями, являются также касательными к эллипсу Штейнера (т. е. к эллипсу, который касается треугольника в точках A_1 B_1 C_1). Н. М. Остиану

7077. Некоторые отсутствующие теоремы об антидополнительном тетраэдре. Корт (Some missing theorems on the anticomplementary tetrahedron Court N. A.), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 10, 714—716 (англ.)

Тетраэдр (T'') называется антидополнительным к тетраэдру (T), если они гомотетичны с центром гомотетии в центре тяжести тетраэдра (T) и соответственные вершины расположены по разные стороны от центра гомотетии. Доказаны пять теорем, относящихся к антидополнительному тетраэдру, как, например:

Грани тетраэдра (T), пересекающие ребро антидополнительного тетраэдра, делят его на три равные части.

В. А. Маневич

7078. Заметка об инвариантах. Висванатхан (A note on invariants. Viswanathan K. A.), Math. Student, 1957, **25**, № 1—2, 43—44 (англ.)

Доказывается теорема: Если $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ преобразуется в $a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2 + 2g'X + 2f'Y + C'$, где x и y — координаты точки относительно общей декартовой системы координат с углом между осями ω, а X и Y — координаты той же точки относительно общей декартовой системы координат с углом между осями ω', то

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} : \sin^2\omega = \begin{vmatrix} a' & h' & g' \\ h' & b' & f' \\ g' & f' & c' \end{vmatrix} : \sin^2\omega'.$$

В. А. Маневич

7079. Упрощение общего уравнения кривой второго порядка. Ларивьер (Reducing the equation of the general conic. Lariviere R.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 7, Part I, 500—501 (англ.)

Рассматривается кривая второго порядка, заданная в декартовой прямоугольной системе координат уравнением общего вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,\ B \neq 0. \qquad (1)$$

С помощью обычной ортогональной подстановки с использованием основных тригонометрических тождеств автор показывает, что при повороте осей координат на угол θ, определяемый по формуле

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{C-A}{B} \pm \sqrt{\left(\frac{C-A}{B}\right)^2 + 1},$$

уравнение (1) приводится к виду:

$$\left(A + \frac{B}{2}\operatorname{tg}\theta\right)X^2 + \left(C - \frac{B}{2}\operatorname{tg}\theta\right)Y^2 + D(X\cos\theta - Y\sin\theta) + E(X\sin\theta + Y\cos\theta) + F = 0.$$

В. С. Малаховский

7080. Огибающая равносторонняя сферическая гипербола. Фаччоти (L'iperbole equilatera sferica inviluppo. Facciotti Guido), Period. mat., 1957, **35**, № 3, 164—178 (итал.)

Как известно, равносторонняя гипербола $xy = a$ на плоскости является огибающей семейства прямых, образующих с координатными осями равновеликие треугольники. По аналогии, огибающая равносторонняя сферическая гипербола Γ определяется следующим образом: на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ рассматривается множество треугольников QDE с вершинами $O(0, 0, 1)$, $D(x, 0, \sqrt{1-x^2})$, $E(0, y, \sqrt{1-y^2})$, для которых постоянна величина $\varepsilon = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta\right) - \pi$, где α, β—углы при вершинах E, D. Γ — сферическая огибающая дуг DE. Доказывается, что Γ является пересечением сферы с цилиндром $xy = \frac{1}{2}\sin\varepsilon$, и изучаются ортогональные проекции Γ на координатные и биссекторные плоскости.

Г. И. Дринфельд

7081 К. Решение типовых задач на составление уравнений геометрических мест точек. Бондарев А. Л., Всес. инж.-строит. ин-т, М., 1956, 14 стр., илл.

7082 К. Элементарная геометрия. Для технических институтов любого типа. Ди-Бари (Geometria elementare. Per gli istituti tecnici di ogni tipo. Di Bari Enzo. Treviso, Ed. Canova, 1957, 232 p., 900 L.), Bibliogr. ital., 1957, **91**, № 674, 335 (итал.)

7083 К. Лекции по геометрии и упражнения. Для математиков, физиков и инженеров второго года обучения. Изд. 5-е. Мартинелли (Lezioni di geometria con esercizi. Per il secondo anno di studi di matematica fisica e ingegneria. 5ª ed. Martinelli Enzo. (Univ. studi Roma). Roma, Eredi V. Veschi, 1957, 554 p.), Bibliogr. ital., 1957, **91**, № 673, 310 (итал.)

7084 К. Упражнения по аналитической геометрии. (Esercizi di geometria analitica. (Organismo rappresent. universitario romano. Consiglio studentesco fac. mat. e fis. e ingegnaria biennio). Roma, Ed. La goliardica, 1957, 28 p.), Bibliogr. ital., 1957, **91**, № 675, 426 (итал.)

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

7085. О гомологии. Бланшар (Sur l'homologie, Blanchard René), Mathesis, 1956, **65**, № 4—6, 271—274 (франц.)

Теорема. Если из двух гомологичных треугольников один фиксирован а другой изменяется так, что каждая из его сторон и ось гомологии проходят соответственно через фиксированные точки, то геометрическое место центров гомологии — коническое сечение, описанное около фиксированного треугольника.

Теорема доказана аналитически, используются барицентрические координаты. Рассмотрены частные случаи, когда фиксированная точка P — точка, через которую проходит ось гомологии, совпадает с одной из замечательных точек треугольника, а стороны второго треугольника проходят через точки, гармонически сопряженные основаниям прямых Чевы, проходящих через P. С. И. Зетель

7086. Об аффинных нециклических дезарговых плоскостях. Розати (Sui piani desarguesiani affini «non — ciclici». Rosati Luigi Antonio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, **22**, № 4, 443—449 (итал.)

Скажем, что аффинная дезаргова плоскость ранга n (т. е. с n собственными точками на каждой прямой) обладает свойством Г, если она допускает группу коллинеаций G, обладающую следующими свойствами: а) G — не циклическая и имеет порядок n; б) G—транзитивна относительно прямых, не проходящих через фиксированную точку U. Будем считать, что $n = p^t$, где p — простое число. Устанавливается взаимно однозначное соответствие между плоскостями, обладающими свойством Г, и почти телами порядка n^2, не являющимися полями. Для того чтобы все коллинеации группы G сохраняли двойное отношение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий: а) n — простое число; б) соответствующее почти тело обладает центром порядка n. Л. А. Скорняков

7087. Аффинные плоскости с ортогональностью. Клингенберг (Affine Ebenen mit Orthogonalität. Klingenberg Wilhelm), Arch. Math., 1957, **8**, № 3, 199—202 (нем.)

Под аффинной плоскостью с ортогональностью понимается абстрактная аффинная плоскость, на которой задана нетождественная инволюция α несобственной прямой l. Будем говорить, что $a \perp b$, если $(a \cap l)\alpha = b \cap l$. Науман (РЖМат, 1957, 5155) дал алгебраическое описание аффинных плоскостей с ортогональностью, подчиненных так называемой аксиоме К. В рассматриваемой работе тот же результат получен более коротким путем. Кроме того, обобщается одна теорема Бахмана Клингенберга (Bachmann F., Klingenberg W., Math. Ann., 1951, **123**, 288—301) Л. А. Скорняков

7088. О тригонометрии Лобачевского. Букреев Б. Я., Наук. зап. Київськ. ун-т, 1957, **16**, № 2, 5—9

Дается вывод формул тригонометрии Лобачевского в интерпретации Пуанкаре на полуплоскости. Вывод формул прямоугольного треугольника основан на соотношении между евклидовыми и неевклидовыми длинами отрезков. При этом берется треугольник, стороны которого не изображаются евклидовыми отрезками (треугольник с катетом в виде евклидова отрезка не используется). А. Г. Дорфман

7089. Замечания о треугольной сети на гиперболической плоскости. Картеси (Eine Bemerkung über das Dreiecksnetz der hyperbolischen Ebene. Karteszi Franz. Publs math., 1957, 5, № 1—2, S. 142—146, ill.) (нем.)

Евклидова плоскость покрывается сетью равных равносторонних треугольников. Один треугольник сети — k_0, принимаемый за центральный, опоясывается одним рядом треугольников из данной сети. Полученный шестиугольник k_1 также опоясывается одним рядом треугольников, вновь полученный шестиугольник k_2 опять опоясывается рядом треугольников и т. д. Если R_n есть площадь, заключенная между k_n и k_{n-1}, а S_n есть площадь, заключенная внутри шестиугольника k_n, то, как известно, $\lim_{n\to\infty}(R_n : S_n) = 0$.

Гиперболическая плоскость может быть также покрыта сетью равных правильных треугольников, однако число m треугольников сети, прилегающих к одной вершине, больше шести ($m \geqslant 7$).

Автором доказано, что предел отношения $R_n : S_n$ при $n \to \infty$ представляет собой квадратную иррациональность. Этот предел выражается через m следующим образом: $\frac{1}{2}[\sqrt{(m-4)^2-4} - (m-6)]$. З. А. Скопец

7090. Параболическая геометрия Ли. Такасу (Parabolic Lie geometry. Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1956, **4**, № 2, 95—98 (англ.)

Обычная геометрия сфер Ли (см. Клейн Ф., Высшая геометрия. М. — Л., ОНТИ, 1939, стр. 109) состоит в том, что сферы обычного пространства отображаются на точки некоторой гиперповерхности второго порядка в 5-мерном проективном пространстве. При этом точки 5-мерного пространства изображают линейные комплексы сфер — 3-параметрические семейства сфер, изображаемые сечениями гиперповерхности 2-го порядка гиперплоскостями, полярными относительно нее точкам 5-мерного пространства. В реферируемой работе в 5-мерное проективное пространство вводится евклидова метрика и, тем самым, определяется «параболическое расстояние» между линейными комплексами сфер. С помощью построенного пространства строится пространство параболической Ли-сферико-геометрической связности. Указывается, что обобщение Гофмана пространства Эйнштейна — Майера, в котором строится один из вариантов единой теории поля, является 4-мерной поверхностью этого пространства параболической связности. Б. А. Розенфельд

7091 К. Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. Ред. и автор вступит. статьи **Норден А. П.** М., Гостехиздат, 1956, 527 стр. илл., 18 р. 70 к.

В сборник включены работы по неевклидовой геометрии и вопросам аксиоматического обоснования геометрии, сыгравшие важную роль в развитии этой области математики. Подобный сборник был выпущен Казанским физико-математическим обществом к 100-летию со дня рождения Лобачевского (1893), вскоре переиздан (1895) и давно стал библиографической редкостью. Настоящий сборник выпущен к 100-летию со дня смерти Лобачевского и значительно расширен. Он сопровождается вступительной статьей А. П. Нордена «Открытие Лобачевского и его место в истории новой геометрии». Материал сборника подразделен на три отдела.

Первый — «Геометрия Лобачевского», содержит извлечения из трех сочинений Н. И. Лобачевского: «О началах геометрии» (1 ч., 1829), «Воображаемая геометрия» (1 ч., 1835), «Новые начала» (Вступление, 1835), и работы его современников, разделяющих с ним славу создания неевклидовой геометрии, «Аппендикс» (1832) Я. Бойаи и отрывки из писем и записей (1799—1848) К. Ф. Гаусса.

Второй отдел «Основы теории поверхностей и интерпретации геометрии Лобачевского» открывается классической работой Гаусса «Общие исследования о кривых поверхностях» (1827). За ней следуют четыре работы Ф. Миндинга, касающиеся внутренней геометрии поверхностей постоянной кривизны, в одной из которых (1840) фактически содержится реализация геометрии Лобачевского, хотя сам автор и не отметил совпадения полученных им соотношений с формулами тригонометрии плоскости Лобачевского. Далее помещены: известный мемуар Э. Бельтрами «Опыт интерпретации

неевклидовой геометрии» (1868) и работа Д. Гильберта «О поверхностях постоянной гауссовой кривизны» (1901). Другой путь реализации неевклидовых геометрий представлен «Шестым мемуаром о формах» (1859) А. Кэли, в котором впервые вводится идея проективной метрики, и работой Ф. Клейна «О так называемой неевклидовой геометрии» (1871). Отдел замыкает небольшой отрывок из работы А. Пуанкаре «Теория фуксовых групп» (1882), в котором впервые указана конформная интерпретация геометрии Лобачевского.

Третий отдел «Развитие идей геометрии Лобачевского» начинается со знаменитого мемуара Б. Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1868), к которому приложен комментарий Г. Вейля. За ним следуют «Основы теории пространств постоянной кривизны (1868—1869) Э. Бельтрами. Далее помещены работы, касающиеся связи геометрии с группой движений: Г. Гельмгольц «О фактах, лежащих в основании геометрии» (1868). «Замечания» С. Ли на эту работу Гельмгольца (1886), А. Пуанкаре «Об основных гипотезах геометрии» (1887). Этот цикл работ завершен составившей эпоху «Эрлангенской программой» (1872) Ф. Клейна и его отзывом на «Теорию групп преобразований» Т. III С. Ли. Вопросы аксиоматического обоснования геометрии представлены отзывом (1903) А. Пуанкаре на знаменитое сочинение Д. Гильберта «Основания геометрии» (отсутствие самой работы Гильберта объясняется ее большим объемом и наличием отдельного ее издания) и статьей В. Ф. Кагана «Система евклидовой геометрии» (1927), в которой дано сжатое изложение аксиоматики, разработанной автором в 1905 г. Отдел заканчивает статья Э. Картана «Теория групп и геометрия» (1927), в которой идеи эрлангенской программы получают обогащение и новое развитие в применении к обобщенным пространствам различного рода связностей.

Некоторые из работ впервые переведены для настоящего издания: наброски Гаусса, статьи Миндинга, мемуар Кэлли, проективная интерпретация неевклидовой геометрии Клейна, отрывок из работы Пуанкаре по фуксовым группам. К сборнику приложены библиографические сведения о работах, включенных в сборники, составленные И. Н. Бронштейном.

Б. Л. Лаптев

7092 К. Сборник задач по начертательной геометрии. Сечения, пересечения, тени, приложения аксонометрии. Мишкулеску, Никоарэ (Culegere de probleme de geometrie descriptivă. Secţiuni — Intersecţii — Umbre — Aplicaţii axometrice. Mişculescu D., Nicoară G. Bucureşti, Inst. politehn., 1957, 384 p., il., 21 lei.— Litogr.), Bibliogr. RPR, 1957, 6, № 18, 633 (рум.)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

7093. О плоских кривых третьего порядка. До (Sur des cubiques planes. Deaux R.), Nieuw arch. wiskunde, 1957, 5, № 2, 63—67 (франц.)

Автор ссылается на заметку Тюммерса «Замечательные точки, связанные с треугольником» (РЖМат, 1958, 2314) и на теорему Франка (1929 г.): Если $P_1P_2P_3$ и $Q_1Q_2Q_3$ в треугольнике ABC —педальные треугольники произвольных точек P и Q (т. е. треугольники оснований прямых Чевы, проходящих через P и Q), то шесть прямых, соединяющих $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ F соответственно с точками $(P_2P_3, QA)(P_3P_1, QB)$, $(P_1P_2, QC)(Q_2Q_3, PA)$, $(Q_3Q_1, PB)(Q_1Q_2, PC)$ пересекаются в одной точке R (доказано автором в 1929 г., что точка R является полюсом прямой PQ относительно конического сечения, проходящего через пять точек A_1 $B_1C_1P_1Q$; точка R обладает и другими свойствами). Рассматривается определенная точечная инволюция (T), оставляющая инвариантным, как доказано автором (1953 г), 14 семейств кривых третьего порядка. В этой инволюции P и Q гомологичны, если они сопряжены относительно двух конических сечений определенной связки. Среди семейств кривых третьего порядка имеется семейство C_3. Уравнения C_3 в трилинейных координатах (за основной треугольник взят ABC):

$$ax(y^2+z^2)+by(z^2+x^2)+cz(x^2+y^2)+dxyz=0,$$

где a, b, c, d — произвольные постоянные. Касательные к C_3 в точках A, B, C пересекают соответственно BC, CA, AB в точках D_1, D_2, D_3, лежащих на прямой Δ:

$$ax+by+cz=0.$$

Существует кривая второго порядка, трижды касающаяся C_3 в точках A, B и C. Полюс прямой Δ относительно кривой второго порядка — трилинейный полюс $D\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ прямой Δ относительно треугольника ABC. Кубическая кривая C_3

$$ax(y^2+z^2)+by(z^2+x^2)+cz(x^2+y^2)-\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{abc}xyz=0$$

есть геометрическое место пар точек P и Q, гомологичных в инвалюции (T) и сопряженных относительно конического сечения, касающегося сторон треугольника ABC в вершинах педального треугольника точки D.

Рассматривается частный случай, если (T)—изогональная инверсия и если Δ является несобственной прямой. Особо рассмотрен случай, когда в уравнении C_3 d обращается в нуль. С. И. Зетель

7094. Применение определяющих Крамера к построению графиков алгебраических кривых. Лукарони (Grafici di curve algebriche con l'uso delle determinatrici de Cramer. Lucaroni Raffaele), Archimede, 1956, 8, № 6, 272—277 (итал.)

Точкам (m, n) плоскости ставятся в соответствие мономы ax^my^n. При замене $y=\alpha x^\mu$ и при $x\to 0$ либо $x\to\infty$ моном есть бесконечно малая или бесконечно большая порядка $m+n\mu$. Если два монома ax^ny^m, bx^py^q одного порядка, то мономы, соответствующие точкам прямой (m, n), (p, q) — того же порядка. На этом основан способ построения графиков алгебраических кривых. Наносятся точки, соответствующие всем мономам алгебраической кривой. Точки соединяются прямыми так, чтобы остальные точки лежали в одной полуплоскости. Получается выпуклый многоугольник. Его стороны, называемые определяющими Крамера, определяют главные части кривой для $x\to 0$, либо $y\to 0$, либо $x\to\infty$, либо $y\to\infty$. По ним намечается поведение графика и затем уточняется по непрерывности. Способ, представляющий собой некоторое применение многоугольника Ньютона, проиллюстрирован на примерах. Я. П. Бланк

7095. Вещественные пучки алгебраических кривых. Брузотти (Fasci reali di curve algebriche. Brusotti Luigi), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1952 (1953), 23, 21—35 (итал.; рез. англ.)

Статья обзорного характера с указанием большого количества литературы. Классификация особенностей вещественных алгебраических кривых, соотношения между числами особенностей различного типа, некоторые вопросы существования. В. В. Морозов

7096. Об арифметических и эффективных жанрах алгебраических кривых. Хиронака (On the arith-

metic genera and the effective genera of algebraic curves. Hironaka Heisuke), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1957, A. Math., 30, № 2, 177—195 (англ.)

Устанавливаются некоторые свойства арифметических и эффективных жанров кривых без каких-либо ограничений на универсальную область. Кривой C в проективном пространстве P_N называется позитивный одномерный P_N-цикл без кратных компонент. Если C_1, C_2 — две кривые без общих компонент, P — их общая точка, k — поле, над которым C_1, C_2 и P рациональны, R — локальное кольцо точки P над k и A_i — идеал, определяющий C_i над R, то кратностью пересечения C_1 и C_2 в P автор называет число $i(P, C_1C_2)$=длине $R/(A_1, A_2)R$. Если C — кривая с абсолютно неприводимыми компонентами C_i $(i \leqslant r)$; P — ее точка, k — поле, над которым рациональны все соответствующие P-точки производных нормальных кривых для кривых C, L — локальное кольцо кривой C в P над k и $\overline{L}$ — интегральное замыкание L в его кольце частных, то порядком сингулярности C в P автор называет величину $\delta(P:C) = \dim_k(\overline{L}:L)$. В частном случае, если в P_N существует содержащая C поверхность S, для которой P — простая точка, то $\delta(P:C) = \Sigma r(r-1)/2$, где суммирование проводится по кратностям всех бесконечно близких к P точек вдоль C. Величина $\sum_{q=2}^{r} i(P; (\sum_{i=1}^{q-1} C_i)\cdot C_q)$ не зависит от порядка индексов; она обозначается $i(F; \Lambda_1^r C_i)$; под $\Lambda_1^r C_i$ понимается 0-мерный цикл $\sum_P i(P, \Lambda_1^r C_i)P$, где P пробегает все точки $\sum_{i=1}^{r} C_i$.

Показывается, что: 1) арифметический жанр (в смысле Хирцебруха) произвольной кривой C в P_N выражается формулой $p_a(C) = \pi(C) + \sum_{P \in C} \delta(P:C) - (r-1)$, где $\pi(C)$ — эффективный жанр C, а r — число ее абсолютно неприводимых компонент; 2) если C_i $(i = 1, \ldots, r)$ — кривые из P^N, не имеющие попарно общих компонент, то $p_a\left(\sum_1^r C_i\right) = \sum_1^r p_a(C_i) + \deg(\Lambda_1^r C_i) - (r-1)$ (модулярное свойство арифметического жанра). С использованием принципа вырождения Зариского устанавливается связь между арифметическим (эффективным) жанром кривой C и ее специализации. В. В. Морозов

7097. Теорема связности для бирациональных преобразований. Зариский (The connectedness theorem for birational transformations. Zariski Oscar), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 182—188 (англ.)

Автор, не опираясь на теорию абстрактных голоморфных функций (как это было сделано в его работе: Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 53, 490—542), доказывает теорему связности: Если V/k, V'/k, T/k — два неприводимых многообразия (м.) и бирациональное преобразование одного из них в другое, определенные над полем k, и если P — точка V, в которой V/k аналитически неприводимо, то м. $T(P)$ связно над $k(P)$.

В. В. Морозов

7098. Окрестность двойной точки в точечном преобразовании с нулевым якобианом между пространствами. Итальяни (L'intorno di un punto unito a Jacobiano nullo in una trasformazione puntuale fra spazi. Italiani Mario), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 2, 254—263 (итал.; рез. англ.)

Принимая точку O — двойную точку преобразования T (с нулевым якобианом) линейного пространства S_r в себя — за начало неоднородных проективных координат и подходящим образом выбирая положение осей координат и единичной точки, автор получает следующие уравнения этого преобразования:

$$x_s' = a_s x_s + \sum_{ij} a_{ij}^s x_i x_j + [3] \quad (s = 1, 2, \ldots, r-1),$$
$$x_r' = \sum_{ij} a_{ij}^r x_i x_j + [3] \quad (i, j = 1, 2, \ldots, r), \qquad (1)$$

где [3] — члены 3-й степени. Коэффициенты a_{ij}^s, a_{ij}^r, a_s связаны соответствующими условиями. С помощью понятия касательной гомографии автор устанавливает геометрический смысл коэффициентов a_s. Указывается на возможность установить геометрический смысл коэффициентов второго порядка с помощью так называемой характеристической прямой и гиперплоскости, касательной в точке O к гиперповерхности якобиана.

В канонизированном репере, относительно которого преобразование T определяется равенствами (1), прямая $x_1 = x_2 = \ldots = x_{r-1} = 0$ совпадает с так называемой стационарной прямой, а гиперплоскость $x_r = 0$ — с неподвижной гиперплоскостью. Преобразование T устанавливает между направлениями, исходящими из точки O, некоторую гомографию. Последняя определяет, в частности, соответствие между линейными подпространствами S_{r-2}, расположенными в неподвижной гиперплоскости и содержащими точку O, и гиперплоскостями, проходящими через стационарную прямую. Последние гиперплоскости пересекают неподвижную гиперплоскость по некоторым линейным подпространствам S_{r-2}. Соответствие, которое таким путем устанавливается между S_{r-2} и $\overline{S}_{r-2}$, есть некоторый проективитет ω'. При $r = 3$ уравнения вида (1) выводятся в следующих случаях: 1) ω' — общий проективитет и ранг k якобиана равен 2, 2) ω' — параболический проективитет, $k = 2$, 3) ω' — тождественное преобразование, $k = 2$, 4) $k = 1$.

В каждом случае указывается на возможность геометрического истолкования коэффициентов. Специально рассматривается случай $r = 2$. Н. И. Кованцов

7099. Уравнения шестой степени с тремя парами корней, принадлежащими одной инволюции. До, Клодик (Équations du sixième degré à racines groupées en ternes involutifs. Deaux R., Clodic M.), Mathesis, 1957, **66**, № 4—6, 129—138 (франц.)

Рассматривается уравнение шестой степени с действительными или мнимыми коэффициентами и исследуется вопрос о принадлежности трех пар корней этого уравнения одной инволюции. Шесть различных корней можно разбить пятнадцатью способами на три пары. Доказывается, что среди этих пятнадцати троек существует не более шести троек, каждая из которых принадлежит одной инволюции. Кроме этого, исследуется вопрос о возможном существовании общих пар у двух таких троек. П. Г. Колобов

7100. Замечание о построении нерациональных алгебраических поверхностей жанра нуль. Годо (Observation sur la construction de surfaces algébriques non rationnelles de genres zéro. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 9, 587—589 (франц.)

В заметке указан способ построения поверхности геометрического и арифметического жанра нуль и бижанра, превышающего единицу, опирающийся на ранее доказанную автором теорему относительно циклических инволюций, принадлежащих алгебраической поверхности. Искомая поверхность получается как образ некоторой циклической инволюции. О. А. Котий

7101. О точках дирамации кратной поверхности: точки второй категории. Годо (Sur les points de di-

ramation d'une surface multiple: points de seconde catégorie. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 4, 235—243 (франц.)

Точки дирамации второго рода кратной поверхности (РЖМат, 1953, 1367) разделяются на точки первой, второй и третьей категории, соответственно тому, распадается ли касательный конус к поверхности на два, три или четыре рациональных конуса. Если P — точка дирамации второй категории, то ей соответствует расщепление касательного конуса на три рациональных конуса σ_α, τ_α и σ_β, причем σ_α и τ_α, а равно σ_β и τ_α имеют общую прямую, в то время как σ_β и σ_α не пересекаются. В работе исследуется случай, когда на общей прямой двух первых конусов находится бесконечно близкая к точке дирамации двойная коническая точка. Проводимое по образцу предыдущих, исследование показывает, что в этом случае точка дирамации бирационально эквивалентна совокупности рациональных кривых σ_α, ρ_0, τ_α, ρ_1, ρ_2, . . ., ρ_t, σ_β, каждая из которых пересекается с предыдущей и последующей, но не пересекается с остальными, при этом кривые ρ_i $(i = 0, \ldots, t)$ будут виртуальной степени —2. В заключение рассмотрен пример, не разработанный ранее до конца (см. РЖМат, 1958, 3217). В. В. Морозов

7102. Некоторые обобщения одной теоремы Энрикеса. Рот (Alcune estensioni di un teorema di Enriques. Roth Leonard), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1954—1955 (1956), 26, 122—135 (итал.; рез. англ.)

Дан ряд обобщений теоремы Энрикеса от унирациональности и представимости инволюцией порядка n алгебраического многообразия V_r, содержащего бирациональную конгруэнцию рациональных кривых, имеющих бирациональную n-секущую V_{r-1}, простую на V_r. Здесь приводятся два из них.

1. Если V_r над полем k содержит унирациональную систему индекса $\geqslant 1$ многообразий V_k, унирациональных над $k(V_h)$, где V_h — подмногообразие V_k, и если на производящем V_k можно V_h определить рационально, то V_r унирационально.

2. Если V_r содержит унирациональную конгруэнцию $\{V_k\}$ многообразий V_k, рациональных над $k(P)$, где P — производящая точка V_r, и, кроме того, содержит унирациональное многообразие V_{r-k}, простое на V_r и плюрисекущее к конгруэнции $\{V_k\}$, то V_r унирационально.

Подробно рассматриваются случаи, когда V_r содержит конгруэнции поверхностей и кривых. Приводятся многочисленные примеры и приложения. В. В. Морозов

7103. Замечание о поверхности 4-го порядка, имеющей инфлексиональную двойную точку. Годо (Remarque sur la surface du quatrieme ordre possédant un point double inflexionnel. Godeaux Lucien), Publs scient. Univ. Alger, 1955, **A2**, № 2, 241—245 (франц.)

Поверхность 4-го порядка, имеющая в качестве особенности только инфлексиональную двойную точку (уравнение ее в предположении, что эта точка — бесконечно удаленная точка оси z, напишется в виде $z^2 f_2(x, y) + f_4(x, y) = 0$, где f_2, f_4 — полиномы 2-й и 4-й степеней, причем $f_2 = 0$ и $f_4 = 0$ пересекаются в 8 различных точках) оказывается образом инволюции 2-го порядка T: $x' = x$, $y' = y$, $u' = -u$, $v' = -v$ на поверхности F: $u^2 = f_2$, $v^2 = f_4$, имеющей жанры $p_a = P_4 = 1$. Строится проективный образ F_1 поверхности F в пространстве S_9; строятся две инволюции, оставляющие F инвариантной и перестановочные между собой и с T (они получаются, если в уравнениях T заменить u на $-u$ или v на $-v$) и изучаются геометрические свойства соответствующих гомографий на F_1. В. В. Морозов

7104. Свойства Бейкера поверхности Уэдла. Эдж (Baker's property of the Weddle surface. Edge W. L.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 4, 463—466 (англ.)

Геометрическое место вершин конусов второго порядка, проходящих через данные 6 точек N_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, трехмерного проективного пространства, есть поверхность 4-го порядка W, называемая поверхностью Уэдла (Weddle). Точки N_i являются двойными на W. Прямые, проходящие через точку N_i, пересекают поверхность W еще в двух точках, которые находятся в инволюции I_i. Свойства Бейкера (Baker) заключаются в том, что эти шесть инволюций перестановочны, а их произведение есть тождественное преобразование.

В работе показано, что эта конструкция может быть получена в пятимерном проективном пространстве S_5, проектированием некоторой двумерной поверхности F восьмого порядка, которая представляет собой пересечение трех гиперквадрик, из прямой λ, лежащей на F, на трехмерное пространство S_3. При этом F отображается на поверхность W, а инволюции I_i на W возникают из инволюционных гомологий H_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ в S_5, центры которых лежат в вершинах симплекса Σ автополярного относительно гиперквадрик, образующих F, а гиперплоскости инволюций H_i являются противоположными гранями Σ. Свойства Бейкера получены как непосредственные следствия аналогичных свойств гомологий H_i, относительно которых F инвариантна.

Попутно получены некоторые другие свойства поверхности. О. А. Котий

7105. По поводу алгебраических поверхностей, касающихся вдоль кривой, и о максимальном числе их двойных точек. Д'Оржеваль (A propos des surfaces algébriques se touchant le long d'une courbe et du nombre maximum de leurs points doubles. D'Orgeval B.), Publs. scient. Univ. Alger, 1955, **A2**, № 2, 247—250 (франц.)

Получены формулы для числа двойных точек поверхностей F и F' порядков m и n, касающихся вдоль кривой c порядка o:

$$D_F = (m-1)\,o - c, \quad D_{F'} = (n-1)\,o - c,$$

где D_F и $D_{F'}$ — число двойных точек на F и F' соответственно, а c равно классу поверхности, образованной общими касательными плоскостями к F и F'. На основе этих формул получена асимптотическая формула максимального числа двойных точек алгебраической поверхности данного порядка. О. А. Котий

7106. О поле определения несингулярного бирационального образа алгебраической поверхности. Абхьянкар (On the field of definition of a nonsingular birational transform of an algebraic surface. Abhyankar Shreeram), Ann. Math., 1957, **65**, № 2, 268—281 (англ.)

Доказывается теорема локальной униформизации алгебраических поверхностей; если K — поле алгебраических функций двух переменных над совершенным полем k, то каждая нульмерная валюация K/k униформизируема. Отсюда и из результатов Зариского вытекает существование неособенной проективной модели K/k (теорема о разрешении особенностей). Далее: если поле k произвольно, то можно найти конечное вполне несепарабельное его расширение k', обладающее тем свойством, что если K' — свободное объединение k'

и K над k, то существует абсолютно несингулярная проективная модель K'/k.

Из предварительных результатов упомянем следующие. Если K^* — расширение Галуа поля K алгебраических функций двух переменных над k и v^* — нульмерная валюация K^*/k, а v — ее ограничение на K и если для некоторой двумерной нормальной алгебраической локальной области (R, M) (кольца R с единственным максимальным идеалом M; условие нетеровости не обязательно) с полем частных K/k, и для которой v имеет в R в качестве центра M, идеал M не разветвляется в расширении K^*/k, то из униформизируемости v^* следует униформизируемость v. Далее, если T — бирациональное соответствие между двумя неприводимыми алгебраическими многообразиями V_1 и V_2 над совершенным полем k^*, алгебраичным над k, и W^* — множество нульмерных валюаций k^* $(V_2)/k^*$ с простыми центрами на V_2/k^*, то существует содержащееся в k^* конечное алгебраическое расширение k' поля k, такое, что для каждого промежуточного между k' и k^* поля k'': 1) поле k'' будет общим полем определения для V_1, V_2 и T; 2) T/k'' будет бирационально; 3) k'' (V_2) сепарабельно порождено над k'' и 4) центр V_2/k'' на k'' (V_2)-ограничении любой валюации в W^* абсолютно прост (теорема о сохранении простых точек).

Работа завершается перечислением ряда проблем, существенных для решения вопроса о локальной униформизации над несовершенным полем. В. В. Морозов

7107. Еще о разности между классом и порядком алгебраической поверхности. Галларати (Ancora sulla differenza tra la classe e l'ordine di una superficie algebrica. Gallarati Dionisio), Ricerche mat., 1957, 6, № 1, 111—124 (итал.)

Пусть $a = \nu - n$ — разность между классом ν и порядком n неприводимой алгебраической поверхности с обыкновенными особенностями. Известно, что $a \geqslant -1$, причем $a = -1$ только для плоскости, поверхности Веронезе и ее производящих проекций; автором доказано также, что $a = 0$ характеризует неразвертывающиеся линейчатые поверхности (РЖМат, 1957, 7315). Исследуя значения, которые может принимать a, автор получает такие результаты. Для всякой поверхности F, за исключением линейчатых, поверхности Веронезе F^4 и ее проекций $a \geqslant 3$, существуют рациональные поверхности без кратных точек, для которых a принимает любое заданное целое значение $\geqslant 3$; для нелинейчатой поверхности с обыкновенными особенностями и неотрицательным арифметическим жанром $a \geqslant 1$; нормальные поверхности, для которых $a \leqslant 10$, все рациональны. Перечисление последних: при $a = 3, 4, 5, 6, 7$ — поверхность Дель — Пеццо F^{12-a} в S_{12-a} (при $a = 4$ — два типа), при $a = 8$ F^4 — полное пересечение двух квадрик в S_4 и две F^{12} в S_{11}; при $a = 9$ — общая кубика в S_3 и рациональная поверхность F^{11} в S_{10} при $a = 10$ — F^{10} в S_9. Здесь F^{12}, F^{11} и F^{10} имеют гиперплоскостные сечения жанра 2. В. В. Морозов

7108. О некоторых эллиптических поверхностях. Панелла (Intorno ad alcune superficie ellittiche. Panella Gianfranco), Rend. mat. e applic., 1955, 14, № 3, 342—354 (итал.)

Решается задача классификации эллиптических поверхностей нулевого геометрического жанра, несущих эллиптический пучок кривых жанра 4,5 или 6 в предположении, что детерминант поверхности равен порядку полной группы проективных преобразований в себя некоторой плоской кривой 5-го порядка и жанра p. Сначала находятся 33 арифметически возможных случая, из которых, как оказывается далее, 14 не соответствуют поверхностям. Затем строятся уравнения соответствующих поверхностей, причем оказывается, что некоторые арифметически возможные случаи приводят к нескольким различным типам поверхностей. По поводу классификации поверхностей, несущих пучок жанра 4, см. также работы д'Оржеваля (РЖМат, 1957, 1721) и реф. 7105. В. В. Морозов

7109. Алгебраическая характеризация типов унодов поверхностей в S_3. Хершберг (Algebraic characterization of types of unodes of surfaces in S_3. Herszberg J.), J. London Math. Soc., 1957, 32, № 2, 187—198 (англ.)

В 1912 г. Гудсон (Hudson H. P., On binodes and nodal curves. Int. Congr. of Math., Cambridge, 1912) указала каноническую форму, к которой приводится уравнение алгебраической поверхности в S_3, имеющей в начале координат бинод. В этой статье аналогичный вопрос рассматривается для более сложного случая унода — изолированной двойной точки, не содержащей ни в одной из своих инфинитезимальных окрестностей двойной прямой. Сначала автор показывает, что поверхность может иметь унод в двойной точке P или в какой-либо из ее окрестностей только в том случае, когда P — унипланарная (с единственной касательной) двойная точка, затем находятся условия отсутствия двойной прямой в окрестности изолированной двойной точки и, наконец, устанавливаются типы уравнений для обыкновенных и исключительных типов унодов. Необходимым и достаточным условием того, чтобы поверхность имела в начале координат унод U, является приводимость ее уравнения к одному из следующих видов: а) обыкновенный унод U_s: $(x + u_2 + \cdots + u_{s-5})^2 + (y + t_2 + \cdots + t_{s-6})^2 (z + v_2 + \cdots + v_{s-6}) + w_{s-3} + \cdots + w_n = 0$, $w_{s-3}(0, 0, 1) \neq 0$; б) исключительный унод U_8^*: $(x + u_2 + u_3)^2 + (y + t_2)^3 + z^4 + w_5 + \cdots + w_n = 0$; в) исключительный унод U_9^*: $(x + u_2 + u_3)^2 + (y + t_2)^3 + yz^3 + w_5 + \cdots + w_n = 0$; г) исключительный унод U_{10}^*: $(x + u_2 + u_3 + u_4)^2 + (y + t_2 + t_3)^3 + z^5 + w_6 + \cdots + w_n = 0$, где u, t, v, w — однородные полиномы, степень которых равна нижнему индексу. В. В. Морозов

7110. О принципе вырождения в алгебраической геометрии. Чжоу Вэй-лян (On the principle of degeneration in algebraic geometry. Chow Wei-Liang), Ann. Math., 1957, 66, № 1, 70—79 (англ.)

Дается доказательство принципа вырождения, более простое, чем доказательство Зариского (опирающееся на теорию голоморфных функций на алгебраическом многообразии). Если R — нетерова область целостности, p — простой идеал в ней, $\overline{R}$ — кольцо вычетов R/p и k — поле, содержащее R, то каждому полиному $F(x) \in R[x]$ однозначно соответствует полином $\overline{F}(x) \in \overline{R}[x]$; если Z — цикл в проективном пространстве над универсальной областью, содержащей K, и $F(U)$ — его ассоциированная форма, коэффициенты которой можно считать лежащими в R, причем не все они принадлежат p, то $\overline{F}(U)$ будет ассоциированной формой некоторого цикла $\overline{Z}$ над универсальной областью, содержащей $\overline{R}$; говорят, что $\overline{Z}$ получается из Z редукцией $\bmod p$, и принцип вырождения гласит, что если Z связен, то связен и $\overline{Z}$. Доказательство приводится к случаю, когда R — полное вещественное дискретное кольцо валюаций и p — максимальный простой идеал (в этом случае $\overline{R} = \overline{K}$ будет полем). В этом предположении доказывается более сильный результат: если Z — позитивный цикл, ассоциированная форма которого рациональна над K, и если цикл Z K-связен, то цикл $\overline{Z}$ $\overline{K}$-связен (именно, показывается, что, исходя из данной факторизации присоединенной формы $\overline{F}$ цикла

$\overline{Z}$ на два несвязных фактора, можно построить соответствующую факторизацию присоединенной формы F цикла Z). Принцип вырождения отсюда следует, если заменить K таким его алгебраическим расширением, чтобы каждая компонента цикла $\overline{Z}$ была определена над K. В. В. Морозов

7111. Интегральное замыкание модулей и полные линейные системы. **Снаппер** (Integral closure of modules and complete linear systems. Snapper Ernst), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 167—176 (англ.)

Пусть K — конечно порожденное поле конечной степени трансцендентности над основным полем k и L — модуль над k в K. Пусть затем $\sigma \in K$ — такой элемент, что существует ненулевой конечнопорожденный модуль M_σ, удовлетворяющий соотношению $\sigma M_\sigma < M_\sigma L$. Совокупность таких σ автор называет интегральным замыканием $|L|_i$ модуля L. Доказывается, что если L имеет конечное число производящих над k, то его интегральное замыкание также имеет конечное число производящих. Эта теорема является ответом на поставленный автором вопрос: какая алгебраическая теорема о конечнопорожденных расширениях эквивалентна геометрической теореме о содержании линейной системы в полной линейной системе. В. В. Морозов

7112. О символе виртуального пересечения алгебраических многообразий. **Северн** (On the symbol of virtual intersection of algebraic varieties. Severi Francesco), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 157—166 (англ.)

Краткое изложение определения и свойств введенного автором в 1904 г. символа виртуального пересечения. В. В. Морозов

7113. О проективном вложении абелевых многообразий. **Вейль** (On the projective embedding of Abelian varieties. Weil André), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 177—181 (англ.)

Показывается, что каждое абелево многообразие (м.) допускает проективное вложение. Доказательство сводится к установлению существования на нем обильных систем дивизоров. Показывается, далее, что если X — позитивный дивизор на абелевом м. A, то для существования такого целого n, чтобы дивизор nX порождал обильную систему, необходимо и достаточно, чтобы X был невырожден (т. е. на A существовало лишь конечное множество таких точек t, для которых $X_t \sim X$; РЖМат, 1956, 5453). В. В. Морозов

7114. Дивизоры и эндоморфизмы на абелевом многообразии. **Лан** (Divisors and endomorphisms on an Abelian variety. Lang Serge), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 4, 761—777 (англ.)

Рассматривая два абелевых многообразия A и B и модуль гомоморфизмов $H(A, B): A \to B$, автор для двух гомоморфизмов α, $\beta \in H(A, B)$ определяет отображение $D_X(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta)^{-1}(X) - \alpha^{-1}(X) - \beta^{-1}(X)$, где X — дивизор на B. Это отображение в группу $N(A)$ Нерона — Севери; оно обладает тем свойством, что для любых целых m и n $(m\alpha + n\beta)^{-1}(X) \equiv m^2\alpha^{-1}(X) + mnD_X(\alpha, \beta) + n^2\beta^{-1}(X)$. Изучая это отображение и (при $A = B$) дуальное ему отображение эндоморфизмов A в группу 1-циклов на A и опираясь на теорему о квадрате и нумерическую эквивалентность нулю дивизора $\equiv 0$, автор воспроизводит большую часть результатов Вейля об эндоморфизмах абелевых многообразий (Weil A., Variétés abeliennes et courbes algébriques, Paris, 1948): формулу для следа $\mathrm{tr}(\alpha\alpha') > 0$, выражение характеристического полинома (причем даются выражения коэффициентов $\nu(\Sigma m_i \alpha_i)$, где ν — функция Вейля, а m_i — целые, через числа пересечений), формулу Лефшеца для неподвижных точек и др. Дается критерий позитивности симметричного $(\alpha = \alpha')$ элемента кольца эндоморфизмов A над полем рациональных чисел. Показывается, что характеристические числа автоморфизма Фробениуса для абелевого многообразия над конечным полем из q элементов по абсолютному значению равны $\sqrt{q}$. В. В. Морозов

7115. Пучок касательных векторов и канонические системы Тодда на алгебраическом многообразии. **Накано** (Tangential vector bundle and Todd canonical systems of an algebraic variety. Nakano Shigeo), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1955, **A**—29, № 2, 145—149 (англ.)

Доказывается, что для неособенного алгебраического проективного многообразия классы Чжена касательного пучка векторов совпадают с каноническими системами Тодда. Ср. РЖМат, 1956, 4038; 1958, 4150. (Для неособенного многообразия, являющегося полным пересечением прималей, теорема доказана Ходжем: Proc. London Math. Soc., 1951, 1, 138—151). В. В. Морозов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

7116. Угол наклона и кривизна. **Ганс** (Teaching of mathematics. Gans David), Math. Mag., 1957, **31**, № 1, 31—32 (англ.)

Автор считает, что при выводе формулы кривизны плоской кривой $y = y(x)$ нельзя пользоваться обычным определением угла наклона в точках относительного экстремума, так как в этих точках угол наклона $\alpha(x)$ принимает одновременно значения 0° и 180°, т. е. функция $\alpha = \alpha(x)$ терпит разрыв. Если определить угол наклона прямой с угловым коэффициентом m как главное значение $\mathrm{arctg}\, m$, то эта неопределенность исключается и функцию α можно дифференцировать. В. С. Мелаховский

7117. Определение плоских кривых, заданных неравенством, связывающим абсолютные значения функций линейных элементов в текущей точке кривой. **Пародн** (Détermination de courbes planes définies par une inégalité entre les valeurs absolues de fonctions des éléments de contact en un point courant. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 22, 1871 (франц.)

Дифференциальное уравнение

$$\Delta(x, y, y') = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_3 \\ \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_1 \end{vmatrix} = 0,$$

где $\varphi_i = \varphi_i(x, y, y')$ определяет семейство кривых, удовлетворяющих неравенству

$$|\varphi_1(x, y, y')| \leqslant |\varphi_2(x, y, y')| + |\varphi_3(x, y, y')|.$$

Я. П. Бланк

7118. Введение в дифференциальную геометрию **Видаль-Абаскаль** (Introduccion a la geometria diferencial. [Introduction to differential geometry.]. Vidal Abascal E. Madrid, Dossat, S. A., 1956, XVI, 329 p., 220 ptas.) (исп.)

Книга содержит стандартный материал курса дифференциальной геометрии с некоторыми заслуживающими внимания добавлениями и изменениями. Сначала автор представляет материал в векторном изложении, далее в гл. V вводятся внешние формы и внешнее

дифференцирование и, пользуясь ими, снова коротко выводятся основные результаты.

Кроме введения, в котором подробно рассматриваются векторы и матрицы, книга содержит 6 глав I—VI. Приводим названия глав, давая некоторые подробности в скобках: I. Плоские кривые (вместе с кривыми постоянной ширины). II. Пространственные кривые (с подробным исследованием поверхностей огибаемых соприкасающейся, нормальной и спрямляющейся плоскостями). III. Элементарная теория поверхностей (первая и вторая основные формы поверхности). IV. Основные уравнения теории поверхностей (уравнения Гаусса, Вейнгартена, Кодацци-Майнарди, линии кривизны, асимптотические линии). V. Геометрия на поверхности (кроме уже упомянутого применения внешнего дифференцирования, заслуживает упоминания, как необычная особенность, введение в интегральную геометрию на поверхностях, в частности на поверхностях постоянной кривизны). VI. Отображения поверхностей, специальные поверхности (дифференциальные параметры, конформные и другие отображения, минимальные поверхности, линейчатые поверхности, конгруэнции линий).

Книга читается легко, но иногда оставляет желать лучшего в отношении строгости. Например, неочевидное существование нормальных координат класса $\geqslant 2$ считается само собой разумеющимся. H. Busemann

Перевод из Math. Revs. 1956, **17**, № 6, 656.

7119. О кривых постоянной кривизны. Калапсо (Sulle curve a flessione costante. Calapso Maria Teresa), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957, **22**, № 4, 438—442 (итал.)

Формулируется теорема: Любая аналитическая пространственная кривая постоянной кривизны допускает параметрические представления

$$x = tf'' - f' - \frac{f'''}{\varphi'''}(t\varphi'' - \varphi'),$$

$$y = \frac{1-t^2}{2}f'' + tf' - f - \frac{f'''}{\varphi'''}\left(\frac{1-t^2}{2}\varphi' + t\varphi' - \varphi\right),$$

$$z = i\left(\frac{1+t^2}{2}f'' - tf' + f\right) - i\frac{f'''}{\varphi'''}\left(\frac{1+t^2}{2}\varphi'' - t\varphi' + \varphi\right),$$

где f, φ — голоморфные функции t, связанные условием $f''' = \frac{ic\varphi'''}{\sqrt{\varphi'^2 - 2\varphi\varphi''}}$, $\varphi''' \neq 0$, c — радиус кривизны кривой. Кручение $\frac{1}{T} = \frac{c\varphi^2\varphi'''}{(\varphi'^2 - 2\varphi\varphi'')^{3/2}}$. Эти же формулы, но при условии $f''' = \frac{\varphi'''}{(\sqrt{\varphi'^2 - 2\varphi\varphi''})^n}$, $n \neq 1$, определяют кривые, у которых радиус кривизны — линейная функция дуги. Приведены примеры. Я. П. Бланк

7120. Замечание о пересечении двух кривых в трехмерном пространстве. Фан Дэ-чжи, Сямынь дасюэсюэбао, 1956, № 2, стр. 102—107 (кит.; рез. англ.)

Пусть O — произвольная точка на поверхности V_2 в проективном пространстве P_3. Доказываются следующие результаты: Каждая квадрика Дарбу в точке O пересекает конус Калапсо в точке O вдоль кривой второго порядка (кроме двух асимптотических касательных линий), плоскость которой проходит через второе ребро Грина. Полярные плоскости трех касательных линий Сегре и трех касательных линий Дарбу относительно конуса Калапсо пересекаются вдоль первого ребра Грина. Кроме того, в работе обнаруживается конус Γ^* второго порядка, проективно-ковариантно связанный с двумя пересекающимися кривыми, которые имеют разные касательные и разные соприкасающиеся плоскости. Указаны некоторые геометрические свойства конуса. Гу Чао-хао

7121. Об уравнениях Френе. Винтнер (On Frenet's equations. Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1956, **78**, № 2, 349—356 (англ.)

Настоящая работа продолжает большой цикл исследований автора и Хартмана по вопросам о необходимости требований дифференцируемости в дифференциально-геометрических вопросах. Рассматривается ориентированная спрямляемая дуга Γ трехмерного евклидова пространства $X(x, y, z) : X = X(s)$ (s — длина дуги) класса C'', т. е. такая, что векторная функция $X(s)$ имеет непрерывную вторую производную $X''(s)$; дополнительно требуется существование единичного вектора $U_3(s)$, ортогонального $U_1 = X'(s)$ и такого, что (непрерывная) производная U'_3 коллинеарна векторному произведению $[U_3, U_1]$. Кривые, удовлетворяющие поставленным условиям, называются кривыми Френе (что записывается: $\Gamma \in F$). Показывается, что класс кривых Френе есть тот, на который естественно распространяется теория Френе, а именно, что для каждой подобной кривой существует (может быть, не единственный) сопровождающий трехгранник и имеют место обычные формулы Френе (так что кривизна и кручение кривой Френе, в противоположность сопровождающему трехграннику, определяются однозначно).

Далее рассматриваются поверхности класса C''. Доказывается, что геодезическая подобной поверхности обязательно является кривой Френе и, следовательно, в каждой точке поверхности для каждого направления однозначно определяется геодезическое кручение; далее для поверхностей класса C'' устанавливается обычная связь линий кривизны с геодезическим кручением и для поверхностей класса C''' доказывается теорема Бельтрами — Энеппера. В заключение показывается, что кривая Френе в том и только в том случае принадлежит к классу C''', если ее кривизна $k(s) = |X''(s)|$ — непрерывно дифференцируемая функция s.

В приложении к статье доказывается, что линейчатые поверхности, образуемые касательными и бинормалями кривой Френе (точнее — положительными или отрицательными лучами этих прямых), являются торсами (поверхностями нулевой кривизны, развертывающимися поверхностями) класса C^2. И. М. Яглом

7122. Точки возврата поверхности и теорема Гаусса — Бонне. Ставрулакис (Points de rebroussement des surfaces et théorème de Gauss — Bonnet. Stavroulakis Nicias), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 14, 1112—1114 (франц.)

Точка P поверхности называется точкой возврата, если все кривые на поверхности, исходящие из этой точки, имеют общую полукасательную. При некоторых предположениях относительно строения поверхности вблизи точек возврата обобщается теорема Гаусса — Бонне. В простейшем случае, если область G, на поверхности ограниченная гладкой кривой γ, содержит одну точку возврата P, то

$$\int_\gamma \frac{dS}{R_g} + \int_{G-P}\int kd\sigma = 0,$$

где $\frac{1}{R_g}$ — геодезическая кривизна кривой γ, а k — гауссова кривизна поверхности. А. В. Погорелов

7123. Об одном классе поверхностей W. Шемин (Sur une classe de surfaces-W. Şemin Ferruh), Istanbul Univ. fen fak. mecm., 1956, **A21**, № 1, 55—59 (франц.; рез. турец.)

Как известно, асимптотические линии некоторой поверхности образуют сеть Чебышева тогда и только тогда, кода полная кривизна поверхности постоянна. При этом каждое семейство асимптотических линий

имеет постоянное геодезическое кручение, эти два кручения равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Обобщая приведенный результат, автор доказывает теорему: Для того чтобы координатные линии некоторой поверхности S, имеющие одну и ту же постоянную нормальную кривизну a, образовывали сеть Чебышева, необходимо и достаточно, чтобы поверхность S представляла собой поверхность W, определяемую условием $Wa - K = a^2 + b^2$, где $\frac{W}{2}$ и K — соответственно средняя и полная кривизна поверхности и b — другая постоянная. Оба семейства координатных линий имеют постоянное геодезическое кручение, равное $\pm b$. Касательные к координатным линиям образуют с их сопряженными направлениями один и тот же постоянный угол. Линии C на поверхности S, вдоль которых координатные линии пересекаются под постоянным углом, являются в то же время линиями, вдоль которых W и K постоянны. Касательные к этим линиям ортогональны к прямым, соединяющим центры геодезической кривизны координатных линий. П. Н. Глаголева

7124. О двусторонне расслояемых парах конгруэнций окружностей. Баккес (Sur les congruences de cercles qui sont doublement stratifiables. Backes F.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, **42**, № 9, 921—927 (франц.)

В 1952 г. референтом, а затем независимо автором было введено понятие расслоения двух конгруэнций окружностей. Две конгруэнции окружностей (C_1) и (C_2) образуют двусторонне расслояемую пару, если между окружностями C_1 и C_2 обеих конгруэнций установлено взаимно однозначное соответствие, и через окружности (C_1) проходит ∞^1 двупараметрических семейств сфер S, названных референтом расслаивающими, характеристические точки которых лежат на соответствующих окружностях C_2, и наоборот.

Автор рассматривает двусторонне расслояемую пару конгруэнций окружностей в трехмерном евклидовом пространстве и доказывает две теоремы.

1. Если две конгруэнции окружностей (C_1) и (C_2) образуют двусторонне расслояемую пару, то окружности обеих конгруэнций ортогональны фиксированной сфере и, следовательно, обладают фокальными сферами. Окружности, образованные пересечением расслаивающих сфер (S_1) и (S_2), дают конгруэнцию W — все их 10 грассмановых координат удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению 2-го порядка Лапласа.

Прямая, проходящая через центр окружности перпендикулярно к ее плоскости, называется осью окружности. Таким образом, с парой конгруэнций окружностей связана пара конгруэнций прямых ее осей.

2. Если две конгруэнции осей двух конгруэнций окружностей образуют двусторонне расслояемую пару конгруэнций прямых, и все окружности обеих конгруэнций ортогональны одной фиксированной сфере, то эта пара окружностей также будет образовывать двусторонне расслояемую пару. Р. М. Гейдельман

7125. О системах ∞^2 центральных сфер изотропной развертывающейся поверхности. Винченсини (Sur les systèmes de ∞^2 sphères centrées sur une développable isotrope. Vincensini Paul), J. math. pures et appl., 1957, **36**, № 2, 155—169 (франц.)

Демулен ввел инвариант двупараметрического семейства сфер — кривизну дифференциальной квадратичной формы $d\varphi^2$, дающей (в главной части) квадрат бесконечно малого угла сферы семейства и ее бесконечно близкой. Эта форма имеет вид:

$$d\varphi^2 = \frac{1}{R^2}(ds^2 - dR^2),$$

где ds^2 — квадрат линейного элемента поверхности центров (S) сфер семейства, отнесенного к криволинейным координатам u и v, $R(u, v)$ — радиус центральной сферы поверхности S в точке u, v. Кривизна K квадратичной формы $a\varphi^2$ выражается через кривизну поверхности (S), R и дифференциальные операторы Бельтрами поверхности (S).

В реферируемой статье решается проблема разыскания классов двупараметрических семейств сфер (конгруэнций) постоянной кривизны K, допускающих преобразование изменения радиусов этих сфер в произвольном постоянном отношении.

Автор находит все классы таких конгруэнций. В частности, показывается, что всякая конгруэнция сфер, у которой поверхность центров — изотропная плоскость, имеет кривизну $+1$, причем изгибанием эту конгруэнцию можно перевести в конгруэнцию, все сферы которой проходят через одну точку.

Если поверхность центров (S) — невырожденная, то у конгруэнций сфер постоянной кривизны, допускающей изменение радиусов сфер в произвольном постоянном отношении, ее линейный элемент приводится к виду $ds^2 = 2e^z du dv$, где $z = z(u, v)$ в прямоугольных координатах (u, v, z) является уравнением произвольной развертывающейся поверхности.

Далее рассматриваются случаи вырождения поверхности в изотропную неконическую поверхность, изотропную коническую и т. д. Р. М. Гейдельман

7126. Заметка об инвариантных производных. Шемин (Note sur les dérivées invariantes. Şemin F. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, 1954 (1955), **A19**, 175—179) (франц.)

В теории поверхностей понятие инвариантной производной известно, когда поверхность отнесена к линиям кривизны. Автор распространяет это понятие на случай, когда поверхность отнесена к произвольным координатным линиям u, v. Если E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы и если $f = f(u, v)$ является функцией, определенной на поверхности, то первыми инвариантными производными f_1, f_2 от f в направлениях u, v являются $f_1 = f_u / \sqrt{E}$, $f_2 = f_v / \sqrt{g}$. Вторые смешанные инвариантные производные связаны соотношением: $f_{12} + qf_1 = f_{21} + \bar{q}f_2$. Автор находит геометрическое значение коэффициентов q и $\bar{q}$ дает инвариантное выражение для полной кривизны и вновь получает некоторые известные классические результаты, касающиеся сетей Чебышева. C. Longo

Перев. из Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 525—526.

7127. О минимальных поверхностях, которые одновременно являются проективно-минимальными и аффинно-минимальными. Маркус (Sur les surfaces minima qui sont en même temps minima projectives et minima affines. Marcus F.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 5, 330—334 (франц.)

Формулируется теорема: Только минимальные поверхности, у которых в асимптотических координатах $ds^2 = (Au + Bv + c)^2(du^2 + dv^2)$ и $A^2 + B^2 + 1 = 0$, являются одновременно проективно-минимальными и аффинно-минимальными. Это мнимые поверхности, зависящие от четырех постоянных. Они обладают плоскими линиями кривизны, а также плоскими сферическими изображениями асимптотических линий, принадлежат к предельному случаю поверхностей Цицейки — Вильчинского и не содержатся среди минимальных поверхностей, являющихся одновременно аффинно-минимальными, определенных Томсеном и приведенных в курсе Бляшке. Приведены их уравнения в явном виде. Я. П. Бланк

7128. Проективное преобразование однопараметрического семейства поверхностей обычного пространства. Ваона (Defomazione proiettiva di uno strato

di superficie dello spazio ordinario. Vaona Guido), Atti Semin. mat. e fis. Univ. Modena, 1953—1954, (1954), **7**, 28—67 (итал.)

Понятие проективного преобразования (T) однопараметрического семейства гиперповерхностей (Σ) линейного пространства S_r было дано Чехом (РЖМат, 1956, 4831). Точечное преобразование между двумя линейными пространствами S_r и S_r' называется проективным преобразованием семейства Σ пространства S_r в семейство Σ' пространства S_r', или проективной наложимостью первого семейства на второе, если для каждой пары соответствующих точек (P, P') существует гомография K между S_r и S_r', касательная к T в паре (P, P'), которая преобразует гиперповерхность F семейства Σ, проходящую через P, в гиперповерхность KF, имеющую в P' аналитическое касание 2-го порядка с гиперповерхностью F', соответствующей F в T. Необходимым и достаточным условием того, чтобы соответствие T между S_r и S_r' было проективным преобразованием семейства Σ в семейство Σ', является то, что направления, касательные к гиперповерхностям обоих семейств, являются характеристическими направлениями T. Поскольку точечное преобразование между двумя S_r, не являющееся гомографией, может иметь в каждой точке не более двух гиперплоскостей характеристических направлений, то, следовательно, преобразование T может допускать в каждом пространстве не более двух семейств проективно деформированных гиперповерхностей.

Чехом доказано, что при $R = 3$ преобразования, допускающие только одно семейство проективно деформируемых семейств поверхностей, могут быть преобразованиями лишь одного из следующих типов: 1) преобразования, являющиеся проективными преобразованиями семейства поверхностей R; 2) преобразования, являющиеся проективными преобразованиями семейства поверхностей R_0; 3) преобразования, являющиеся проективными преобразованиями развертывающихся поверхностей или плоскостей.

Случай, когда деформируемое семейство поверхностей является двойным, исчерпывающе исследован Чехом. В реферируемой работе автор ставит своей задачей исследовать случай, когда деформируемое семейство является простым, а деформируемые поверхности — не развертывающиеся. Работа содержит три параграфа. В первом решается проблема аналитического представления преобразования посредством дифференциальных уравнений в частных производных. Здесь устанавливается наличие двух типов преобразования — преобразование поверхностей R и преобразование поверхностей R_0.

Во втором параграфе изучаются преобразования поверхностей R. Дается каноническое представление преобразования. Находится необходимое и достаточное условие того, чтобы однопараметрическое семейство поверхностей, снабженных сетями R, преобразовывалось таким образом, что на каждой поверхности сеть преобразования является рассматриваемой сетью R. (Понятие сети преобразования см. у Fubini G., Čech E., Géométrie projective differentielle des surfaces, Paris, 1931, стр. 120). Полученные здесь результаты прилагаются к проективным преобразованиям поверхностей частного вида. Устанавливается простейшая геометрическая конструкция семейства поверхностей, содержащих сеть плоских кривых R. Определяются проективно деформируемые семейства поверхностей 2-го порядка и находятся их преобразования в явной форме.

Третий параграф посвящен исследованиям проективных преобразований семейств поверхностей R_0. Находится каноническое представление для таких преобразований. Устанавливается геометрическая характеристика семейства поверхностей R_0, деформируемых таким образом, что на каждой поверхности сеть преобразования сводится к сети асимптотических линий.

Н. И. Кованцов

7129. Дуальные неявные функции и геометрические результаты, связанные с ними. Сабан (Fonctions duales implicites et résultats géométriques qui en découlent. Saban G., Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, 1954—1955, **A19**, 148—153) (франц.; рез. турецк.)

Автор приходит к некоторым теоремам линейчатой геометрии, установленным Кула (Kula M., тот же журнал, 1952, **17**, 322—343) с использованием дуальных векторов и некоторых неявных дуальных функций. Результаты упомянутой работы нуждались в дополнении в направлении более глубокого анализа свойств использованных дуальных функций, что и сделано автором настоящей заметки. Среди полученных результатов мы укажем следующие, относящиеся к семействам синектических конгруэнций: так как огибающая семейства таких конгруэнций зависит от одного вещественного параметра, то она является или линейчатой поверхностью или цилиндрической конгруэнцией; первый случай имеет место, если конгруэнции рассматриваемого семейства имеют различные сферические изображения, второй случай — если сферические изображения совпадают в одной и той же кривой.

P. Vincensini

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 6, 659

7130. О топологических вопросах дифференциальной геометрии. Бляшке (Über topologische Fragen der Differentialgeometrie. Blaschke Wilhelm), Bull. math. Soc. sci. math. et phys. RPR, 1957, **1**, № 1, 1—4 (нем.)

Излагаются некоторые результаты из книги автора (РЖМат, 1956, 6103к). В частности, приводится новое доказательство теоремы Дюбурдье (Dubourdieu J.).

М. А. Бартошевич

7131. Интегральная геометрия. Мазотти-Биджоджеро (La geometria integrale. Masotti Biggiogero Giuseppina), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1953—1954 (1955), **25**, 164—231 (англ.)

Обзор относительно простых результатов интегральной геометрии евклидова пространства 2 и 3 измерений.

Из формул, принадлежащих автору, можно отметить две:

1) $dR = \frac{\rho_1\rho_2}{D^3}dP$, где dR — плотность прямых R, пересекающих овал Ω; ρ_1, ρ_2 — радиусы кривизны овала в точках A_1, A_2 пересечения его с R; dP — плотность точек пересечения касательных к Ω в точках A_1, A_2; D — диаметр окружности, описанный вокруг треугольника A_1PA_2;

2) $dR = \frac{1}{K_1K_2}\cdot\frac{\sin^4\omega}{\gamma^3}\,dR'$, где dR — плотность прямых R, пересекающих овалоид Σ; dR' — плотность прямых R', по которым пересекаются плоскости π_1, π_2, касающиеся Σ в точках встречи с R; K_1, K_2 — полные кривизны Σ в указанных точках, ω — угол между плоскостями π_1 и π_2; γ — длина отрезка R внутри Σ.

Приводится несколько формул, непосредственно следующих из отмеченных или из них и известных формул

Библ. 286 назв. Из работ советских авторов указана только одна статья П. А. Соловьева. Г. И. Дринфельд

7132 К. Задачи по дифференциальной геометрии. Франгу (Probleme de geometrie diferențială. Frangu Radu. București, Inst. tehn. Galați,

1957, 199 p., il., 9,50 lei.— Litogr.), Bibliogr. RPR, 1957, 6, № 18, 632 (рум.)

7133 К. Введение в интегральную геометрию. Санталó Л. А. Перев. с англ. Ред. **Лопшиц А. М., Яглом И. М.** М., Изд-во ин. лит., 1956, 183 стр., илл., 8 р. 10 к.

Перевод с английского (РЖМат, 1955, 3346к). Книга состоит из трех частей: 1) Метрическая интегральная геометрия на плоскости, 2) Интегральная геометрия на поверхности, 3) Общая интегральная геометрия. В русском переводе помещено еще приложение, «Интегральная геометрия в множестве линейных элементов», написанное И. М. Ягломом.

В первой части рассматриваются определения плотности и меры во множествах точек, прямых, пар точек, отрезков и т. п. на евклидовой плоскости. Выводятся различные интегральные формулы и даются их приложения к некоторым геометрическим задачам (изопериметрическое неравенство, некоторые теоремы о выпуклых областях, о решениях и т. п.). Содержание этой части близко примыкает к имеющемуся в русском переводе первой части книги Бляшке «Лекции по интегральной геометрии» (Успехи матем. наук, 1938, вып. 5, 97—149).

Вторая часть — наименьшая по объему, посвящена перенесению идей первой части на множества геодезических на произвольной поверхности. Автору, очевидно, незнакомы работы П. К. Рашевского, Б. В. Лесового, И. М. Яглома, в связи с чем изложение автора не дает достаточно полного представления об этом круге вопросов. Частично этот пробел устраняется вышеупомянутым приложением.

В третьей части рассматривается плотность и мера в однородных пространствах. Собственно, общему рассмотрению вопроса посвящен частично лишь § 18. Остальная часть текста делится между весьма элементарным изложением элементов теории групп Ли в духе Картана и рассмотрением примеров на введенные в § 18 общие понятия. Рассмотрены унимодулярные центро-аффинная и аффинная группы на плоскости, проективная группа n-мерного пространства, группа движений n-мерного евклидова пространства, плоскость Кэли (в эллиптическом случае). В. В. Рыжков

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

7134. Об изгибании гиперповерхности V_m в евклидовом E_{m+1} с сохранением средней кривизны. Ху Хэшэн, Шусюэ сюэбао, Acta Math. Sinica, 1956, 6, № 1, 127—137 (кит.; рез. англ.)

Рассматривается изгибаемость гиперповерхности V_m в евклидовом E_{m+1} $(m \geqslant 3)$ с сохранением средней кривизны H. Известно, что изгибаемые гиперповерхности должны иметь ранг 2 и их классификация зависит от определяющей системы (S) $\Gamma^i_{\alpha j}\lambda_{ik} - \Gamma^i_{\alpha k}\lambda_{ij} = 0$ $(\alpha = 3, \ldots, m;\ i,\ j = 1,\ 2)$ (РЖМат, 1953, 432). Получены следующие результаты:

Если ранг системы (S) равняется 2, то V_m неизгибаема при требовании сохранения H. Если ранг системы (S) равняется 1, то V_m неизгибаема или допускает только дискретное изгибание при требовании сохранения H. Если ранг системы (S) равняется нулю, то можно свести задачу к изучению изгибания V_2 в пространстве постоянной кривизны с сохранением H. При помощи метода внешних форм доказывается, что произвол пар V_m, изгибаемых в E_{m+1} и имеющих одинаковую H, зависит от четырех функций одного аргумента. Для общей неизгибаемой $V_2 \subset S_3$ в таком смысле получается выражение коэффициентов второй фундаментальной формы через коэффициенты первой фундаментальной формы и среднюю кривизну.

Гу Чао-хао

7135. Преобразование W картановых многообразий особого проективного типа. Фиников С. П., Матем. сб., 1957, **43**, № 2, 169—186

Картаново многообразие $\mathfrak{M}_p$ представляет собой p-мерное многообразие, у которого соприкасающееся подпространство (вторых дифференциалов) имеет размерность $2p$ и система вторых квадратичных форм может быть приведена к системе p-квадратов. Нулевые линии этих квадратов образуют p-сопряженную систему из p семейств попарно сопряженных линий (Cartan E., Bull. Soc. Math. France, 1919, **47**, 125—160; 1920, **48**, 132—208).

Автор ставит общую задачу преобразования W многообразий $S_p \to S_p^*$ в P_n. S_p и S_p^* находятся в отношении преобразования W, если между их точками локально можно установить взаимно однозначное соответствие $M \rightleftarrows M^*$ так, чтобы прямая MM^* принадлежала обоим касательным подпространствам S_p и S_p^* в точках M, M^* и системы квадратичных форм S_p и S_p^* были между собой эквивалентны (выражались бы линейно одна через другую).

Задача применяется автором к картановым $\mathfrak{M}_p$, $\mathfrak{M}_p^*$ в P_n $(n \geqslant 2p)$. При отнесении $\mathfrak{M}_p$ к параметрам p-сопряженной системы, его аналитическая точка M удовлетворяет уравнениям Лапласа.

Рассматриваются два картановых многообразия $\mathfrak{M}_p$ и $\mathfrak{M}_p^*$ с $M \rightleftarrows M^*$, у которых прямые MM^* принадлежат касательным подпространствам $\mathfrak{M}_p$ и $\mathfrak{M}_p^*$ в точках M, M^*. Исключается случай расслоения $\mathfrak{M}_p$, $\mathfrak{M}_p^*$ на $q' - q$ параметрические семейства пар p'-мерных $(p' = p + q - q')$ картановых многообразий, допускающих преобразование W.

Два четномерные $(p = 2q)$ картановы многообразия $\mathfrak{M}_p$, $\mathfrak{M}_p^*$, связанные преобразованием W, существуют с тем же произволом, как и одно $\mathfrak{M}_p$, но определяющие их функции подчинены условиям в начальной точке. К. Н. Тихоцкий

7136. n-мерное подпространство в $2n$-мерном евклидовом пространстве. У Гуан-лэй (Wu Guang-lei), Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ); Acta scient. natur. Univ. pekinensis, 1957, № 1, 61—77 (кит.; рез. англ.)

Пусть M — компактное ориентируемое n-мерное дифференцируемое многообразие, погруженное в евклидово пространство E_{2n}. Уравнения бесконечно малых перенесений ортогональных реперов вдоль пути на M имеют вид $dP = \omega_i e_i$, $de_i = \omega_{ij} e_j + \omega_{i\alpha} e_\alpha$, где e_j — касательные векторы M в точке P, e_α — нормальные векторы $(i = 1, \ldots, n;\ \alpha = n+1, \ldots, 2n)$. Известно, что $\omega_{i\alpha} = a_{i\alpha k}\omega_k$ и $a_{i\gamma k} = a_{k\alpha i}$. Определяются следующие инварианты: $H(p) = \int_{S_{n-1}} \det t_i a_{i\alpha k}\, d\sigma_{n-1}$ и $H^*(p) = \int_{S_{n-1}} |\det t_i a_{i\alpha k}|\, d_{\sigma n-1}$, где S_{n-1} — единичная сфера на касательной плоскости в точке p, $d\sigma_{n-1}$ — объемный элемент S_{n-1}, $t_i e_i$ — произвольная точка на S_{n-1}. Ясно, что при нечетном n $H(p) = 0$. Получаются следующие интегральные формулы (1) $d_F = \frac{1}{\sigma_{2n-1}} \times \int_M H(p)\, dr$, где d_F — число пересечений M, определяемое Уитни, σ_{2n-1} — объем единичной $(2n-1)$-

мерной сферы в E_{2n}; $\int_M H^*(P)\,dr = \int_{S_{2n-1}} I^*(v)\,d\sigma_{2n-1}$, где $I^*(v)$ — число касательных плоскостей, параллельных единичному вектору v. Показывается, что при четном $n = 2m$ $\dfrac{1}{\sigma_{2n-1}} H(p)\,dr = (-1)^m 2^{-n}\pi^{-m}(m!)^{-1} \times$ $\times E_{\alpha_1,..,\alpha_n}[\bar\Omega_{\alpha_1\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\bar\Omega_{\alpha_{n-1}\alpha_n}]$, где $\bar\Omega_{\alpha\gamma} = -[\omega_{i\alpha}\omega_{i\gamma}]$, причем нормальный характеристический класс W_N^n, индуцированный вложением $f(M) \subset E_{2n}$, является когомологическим классом, определяемым этой внешней формой в смысле Ж. Де Рама. Список опечаток см. в том же журнале, 1957, 3, № 2. Гу Чао-хао

7137. Группы аффинных преобразований и группы проективных преобразований в пространстве K-протяжений. Исихара, Фуками (Groups of affine transformations and groups of projective transformations in a space of K-spreads. Ishihara Shigeru, Fukami Tetsuzo), Нихон сугаку сюхо Japan. J. Math., 1956, 26, 79—93 (англ.)

Пусть в N-мерном пространстве S_N задано семейство K-мерных многообразий ($1 \leqslant K \leqslant N-1$) так, что через каждые $K+1$ точку общего положения в S_N проходит одна и только одна поверхность семейства, уравнение которой

$$x^i = x^i(u^\alpha,\ a^\nu),$$

где $x^i (i = 1, \ldots, N)$ — координаты точки в S_N, $u^\alpha (\alpha = 1, \ldots, K)$ параметры, данной поверхности, $a^\nu (\nu = 1, \ldots, R;\ R = (N-K)(K+1))$ параметры, от которых зависит семейство K-поверхностей. Пространство S_N с заданной указанным образом системой K-поверхностей называется пространством K-протяжений (при $K=1$ — пространством путей). Пространства K-протяжений задаются вполне интегрируемой системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + H^i_{\alpha\beta}(x^k,\ p^k_\gamma) = 0,\ p^k_\gamma = \frac{\partial x^k}{\partial u^\gamma}\ , \qquad (1)$$

где $H^i_{\alpha\beta}$ однородные функции 2-го порядка от аргументов p^k_γ и симметричны по индексам α, β.

При преобразованиях координат $x^{i'} = x^{i'}(x^k)$ пространства S_N функции

$$\Gamma^i_{jk}(x,\ p) = \frac{1}{K(K+1)} \sum_{\alpha,\ \beta} \frac{\partial^2 H^i_{\alpha\beta}}{\partial p^j_\alpha \partial p^k_\beta}$$

преобразуются, как коэффициенты аффинной связности, и поэтому определяют аффинную связность в пространстве K-протяжений. Аффинно плоским называется такое пространство K-протяжений, у которого в некоторой системе координат $H^i_{\alpha\beta} = 0$, т. е. K-поверхности плоские: $x^i = A^i_\alpha u^\alpha + B^i$ (A^i_α, $B^i = \text{const}$).

Аффинными преобразованиями пространства K-протяжений называются такие преобразования координат x^i, которые сохраняют введенную там аффинную связность. Авторы изучают пространства K-протяжений, допускающие непрерывную группу G_r аффинных преобразований при $r > N^2$. Обнаруживается, что в этом случае группа G_r транзитивна, ее порядок r равен N^2+N, N^2+N-1 или N^2+1, а пространство K-протяжений аффинно плоское и в целом гомеоморфно либо евклидову пространству, либо прямому произведению окружности на евклидово пространство.

Проективная геометрия в пространстве K-протяжений эквивалентна теории пространств K-мерных плоскостных элементов (x^i, p^i_α) с нормальной проективной связностью, в которой уравнения (1) определяют семейство K-мерных вполне геодезических поверхностей. Доказывается, что если пространство K-протяжений допускает непрерывную группу проективных преобразований G_r порядка $r \geqslant N^2+N$, то пространство проективно плоское, а $r = N^2+2N$ или N^2+N. В случае $r = N^2+2N$ группа транзитивна, и если пространство односвязно, то оно гомеоморфно N-мерной сфере.

Г. И. Кручкович

7138. О конгармонических преобразованиях. Исии (On conharmonic transformations. Ishii Yoshihito), Tensor, 1957, 7, № 2, 73—80 (англ.)

Рассматривается конформное преобразование $\bar g_{ij} + e^{2\sigma} g_{ij}$ метрического тензора в римановом пространстве V_n и доказывается, что если $\nabla^i\nabla_i\sigma + \frac{1}{2}(n-2)\nabla_i\sigma\nabla^i\sigma = 0$, то функция $\bar A = e^{\frac{1}{2}(2-n)\sigma} A$ гармонична относительно $\bar g_{ij}$, когда A гармонична относительно g_{ij}. Такое преобразование автор называет конгармоническим. Доказывается, что конформное преобразование конгармонично тогда и только тогда, когда оно оставляет инвариантным тензор Rg_{ij}, где R — скалярная кривизна. Строится тензор Z^h_{ijk}, инвариантный относительно конгармонических преобразований и такой, что $Z^h_{ijk} = 0$ тогда и только тогда, когда пространство может быть сделано евклидовым посредством конгармонического преобразования (при $n > 3$). Строятся также некоторые конгармонические инварианты, связанные с семейством гиперповерхностей, и выводится условие того, чтобы конгармоническое преобразование переводило пространство Эйнштейна снова в пространство Эйнштейна.

А. Л. Онищик

7139. Некоторые свойства подгрупп в просто транзитивных группах. Нагаи (Some properties of subgroups of simply transitive groups. Nagai Tamao), Tensor, 1957, 7, № 2, 103—109 (англ.)

Продолжается изучение (РЖМат, 1957, 4358) геометрических свойств просто транзитивной группы G_m с базисными операторами

$$X_a = \xi^i_a(x^1,\ \ldots,\ x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}\ ,\ \mathrm{Det}\,|\,\xi^i_a\,| \neq 0\ (i, a = 1, \ldots, m).$$

С помощью обратной матрицы $\|\,\xi^a\,\|$ в пространстве $(x^1, \ldots, x^n)$ вводится риманова метрика $g_{ij} = \sum_a \xi^a_i \xi^a_j$, в которой ξ^i_a определяют орторепер. Коэффициенты вращения этого репера γ_{abc} связаны со структурными константами C^a_{bc} группы G_m формулами: $\gamma_{abc} = \frac{1}{2}(C^a_{bc} + C^b_{ca} + C^c_{ba})$. Используется понятие вариации конгруэнции ξ^i_a относительно ξ^i_b: $\gamma_{ab} = (\sum_{c=1}^{m} \gamma^2_{abc})^{1/2}$ (РЖМат, 1955, 2855). Кроме того, определяется субвариация ξ^i_a относительно ξ^i_b: $\gamma'_{ab} = (\sum \gamma^2_{abc})^{1/2}$, где суммирование идет по всем c, за исключением $c = b$.

В просто транзитивной группе G_m рассматривается подгруппа G_n, причем ее базисные операторы составляют часть базиса всей группы G_m. Доказываются следующие утверждения:

1) Если $\gamma_{\alpha\nu} = \gamma'_{\alpha\nu}$ для всех $\alpha = 1, \ldots, n$ и $\nu = n+1, \ldots, m$, то инвариантные многообразия подгруппы G_n являются минимальными поверхностями в римановом пространстве R_m просто транзитивной группы G_m.

2) Если структурные константы C^a_{bc} кососимметричны по всем индексам, то инвариантные многообразия любой подгруппы G_n являются вполне геодезическими в R_m.

3) Если G_m есть прямое произведение $G_n \times G_{m-n}$, то инвариантные многообразия ее компонент — вполне геодезические в R_m.

4) Если $\gamma_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha\, \beta = 1, \ldots, n)$, то подгруппа G_n абелева.

Если все конгруэнции ξ^i_a в R_m являются нормальными, то

5) Необходимым и достаточным условием, чтобы подгруппа G_n была нормальным делителем в G_m, является равенство $\gamma_{\alpha\nu} = \gamma'_{\alpha\nu}$ для всех $\alpha = 1, \ldots, n$ и $\nu = n+1, \ldots, m$.

6) Чтобы группа G_m была прямым произведением $G_n \times G_{m-n}$, необходимо и достаточно равенство $\gamma_{\alpha\nu} = 0$.

Г. П. Кручкович

7140. Геодезические классы пространств $V(K)$. Солодовников А. С., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 1, 33—36

Геодезическим классом данной метрики ds^2 называется совокупность всех метрик, имеющих с данной общие геодезические. Решается задача определения геодезических классов метрик пространств $V(K)$, т. е. римановых пространств с положительно определенной метрикой, для которых существует система координат, в которой

$$ds^2 = ds_0^2 + \sigma_1 ds_1^2 + \ldots + \sigma_t ds_t^2, \qquad (1)$$

где ds_0^2, ds_α^2 $(\alpha = 1, \ldots, t)$ самостоятельные метрики, зависящие каждая от своих переменных, а функции σ_α зависят только от координат из ds_0^2 и удовлетворяют условию, чтобы присоединенная метрика $ds^{*2} = ds_0^2 + \sigma_1 dy_1^2 + \ldots + \sigma_t dy_t^2$ имела постоянную кривизну K (метрика ds_0^2 также должна быть той же постоянной кривизны K). В совокупности с результатами автора (РЖМат, 1958, 5137) эта заметка дает полное решение вопроса о римановых пространствах с общими геодезическими.

Максимальным K-разложением называется представление метрики ds^2 в виде (1) с наибольшей по размерности частью ds_0^2. Формулируются теоремы. 1. Если (1) есть максимальное K-разложение, то каждая метрика $d\bar{s}^2$ с теми же геодезическими необходимо имеет вид K-разложения, отличающегося от (1) только набором ds_0^2, σ_α. При этом $\bar{K}$-разложение является также максимальным. 2. Если ds^2 и $d\bar{s}^2$, имеющие вид K-разложений $(\bar{K} = K)$, обладают одними и теми же геодезическими, то $d\bar{s}^2$ получается из ds^2 только преобразованием переменных из ds_0^2. Эти теоремы используются для нахождения геодезических классов метрик $V(K)$, приведенных предварительно к каноническим формам.

Г. П. Кручкович

7141. Проективные преобразования римановых пространств и пространства с общими геодезическими. Солодовников А. С., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. **1**, М., АН СССР, 1956, 171—172

Указывается, что автором получена полная классификация римановых пространств по проективным группам, более широким, чем группы движений, а также решена задача разбиения всех римановых метрик на геодезические классы, т. е. на классы метрик, имеющих друг с другом общие геодезические. Предполагается, что метрика положительно определенная и размерность пространства $n \geqslant 3$. Приводится описание наиболее интересных из полученных римановых пространств — пространств $V(K)$.

Г. П. Кручкович

7142. Кривые в пространстве Минковского. Мак-Дафф и (Curves in Minkowski space. Mac Duffee C. C.), Duke Math. J., 1957, 24, № 3, 379—389 (англ.)

В пространстве Минковского метрика определяется квадратичной формой

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \qquad (1)$$

Линейные преобразования A, сохраняющие вид формы (1), образуют группу Лоренца и удовлетворяют уравнению $A^T J A = J$, где J — матрица коэффициентов формы (1), а A^T — транспонированная матрица A.

Кривая в пространстве Минковского задается системой четырех функций $t(s)$, $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, для которых $t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 > 0$, причем расстояние между двумя точками равняется интегралу

$$\int_{s_1}^{s_2} V\overline{t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2}\, ds.$$

Если принять длину дуги за параметр, то будет выполняться условие $t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 1$.

Выражения $h_{ij} = t^{(i)}t^{(j)} - x^{(i)}x^{(j)} - y^{(i)}y^{(j)} - z^{(i)}z^{(j)}$ инварианты относительно группы Лоренца.

Матрице

$$\Delta = \begin{pmatrix} t' & t'' & t''' & t^{IV} \\ x' & x'' & x''' & x^{IV} \\ y' & y'' & y''' & y^{IV} \\ z' & z'' & z''' & z^{IV} \end{pmatrix}$$

принадлежит инвариантная симметрическая матрица

$$\Delta^T J \Delta = H = (h_{rs}),$$

которая приводится к каноническому виду

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K^2T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K^2T^2S^2 \end{pmatrix}$$

с помощью полудиагональной матрицы F, диагональные элементы которой равны единице.

$$\Gamma = F^T H F.$$

При этом

$$K^2 = -\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}; \quad K^4T^2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix}, \quad K^6T^4S^2 = -|H|.$$

K — кривизна, T — кручение первого порядка, а S — кручение второго порядка.

Строится полудиагональная матрица Φ с диагональными элементами $1, K, KT, KTS$, преобразующая H в J. $H = \Phi^T J \Phi$.

Матрица

$$\Delta\Phi^{-1} = \Lambda = \begin{pmatrix} \varkappa_1 & \varkappa_2 & \varkappa_3 & \varkappa_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет уравнению

$$\Lambda' = \Lambda Q, \qquad (2)$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & K & 0 & 0 \\ -K & 0 & -T & 0 \\ 0 & T & 0 & -S \\ 0 & 0 & S & 0 \end{pmatrix}$$

Уравнение (2) выражает в пространстве Минковского формулы Серре-Френе. Столбцы матрицы Λ определяют направляющие косинусы касательной, главной нормали, бинормали и тринормали, проведенных к кривой в точке (t, x, y, z).

Далее ставится задача построения кривой по заданной матрице $Q(s)$. Матрица Λ определяется тогда дифференциальным уравнением (2) и начальным условием $\Lambda^T(s_0)J\Lambda(s_0) = J$.

В частности, рассматриваются линии, имеющие постоянную кривизну K и постоянные кручения S и T. В этом случае матрица Λ и все ее 16 элементов удовлетворяют однородному линейному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами $\Lambda^{IV} + (-K^2 + S^2 + T^2)\Lambda'' - K^2S^2\Lambda = 0$.

Пусть $\pm\mu$ и $\pm i\nu$ — корни уравнения

$$x^4 + (-K^2 + S^2 + T^2)x^2 - K^2S^2 = 0.$$

При начальном условии $\Lambda(0) = I$, где I — единичная матрица, получаем

$$\Lambda = A \operatorname{sh} \mu s + B \operatorname{ch} \mu s + C \sin \nu s + D \cos \nu s,$$

причем A, B, C, D — постоянные матрицы, выражающиеся через Q и I:

$$A = \frac{1}{\mu} QB, \quad B = \frac{\nu^2 I + Q^2}{\mu^2 + \nu^2}, \qquad C = \frac{1}{\nu} QD,$$

$$D = \frac{\mu^2 I - Q^2}{\mu^2 + \nu^2}.$$

Доказывается, что с помощью соответствующего преобразования Лоренца уравнения линии постоянной кривизны и постоянных кручений приводятся к каноническому виду

$$\bar{t} = a \operatorname{sh} \mu s; \quad \bar{x} = a \operatorname{ch} \mu s; \quad \bar{y} = b \sin \nu s;$$

$$\bar{z} = b \cos \nu s; \quad a^2\mu^2 - b^2\nu^2 = 1.$$

Ю. Л. Рабинович

7143. Геометрическое исследование тензора Римана — Кристоффеля римановых пространств четырех измерений. Дебевре (Étude géométrique du tenseur de Riemann-Christoffel des espaces de Riemann à quatre dimensions. Debever R.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 3, 313—327 (франц.)

Эта первая часть работы автора по изучению разложения тензора Римана — Кристоффеля риманова пространства на неприводимые составляющие. Используется геометрическая интерпретация в келиевом (или псевдокелиевом) пространстве C_3 и в пространстве C_5, в которое отображаются прямые из C_3.

Пусть X^i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — координаты точки пространства E_4 (евклидова или псевдоевклидова), касательного к V_4 в некоторой фиксированной точке. Рассматривая X^i как проективные координаты точки некоторой гиперплоскости из E_4 и задавая абсолют уравнением

$$g_{ij}X^iX^j = 0,$$

где g_{ij} — фундаментальный тензор пространства V_4, получим в этой гиперплоскости пространство C_3.

С тензором Римана — Кристоффеля R_{ijkl} связан в C_3 квадратичный комплекс прямых $R_{ijkl}p^{ij}p^{kl} = 0$ (комплекс Римана), где p^{ij} — точечные координаты прямой.

В пространстве C_5 (проективные координаты точки которого суть p^{ij}) образом множества прямых из C_3 служит гиперквадрика Клейна K:

$$\eta_{rstu}p^{rs}p^{tu} = 0$$

($\eta_{rstu} = \pm (e(g)g)^{1/2}$, знак определяется четностью перестановки $(r\ s\ t\ u)$ из чисел 1, 2, 3, 4 и $e(g)$ — знак g; $\eta_{rstu} = 0$, если среди индексов есть равные).

Пусть p^{ij} и p^{*ij} — две сопряженные точки в C_5 (прямые p и p^* в C_3 полярно сопряжены относительно фундаментальной квадрики). На прямой, соединяющей эти точки, имеются две самосопряженные точки:

$$p_+^{ij} = \frac{1}{2}(p^{ij} + e(g)^{\frac{1}{2}}p^{*ij}) \quad \text{и} \quad p_-^{ij} = \frac{1}{2}(p^{ij} - e(g)^{\frac{1}{2}}p^{*ij}).$$

Множество самосопряженных точек образует в C_5 плоскости E_2^+ с уравнением $p^{ij} = 0$ и E_2^- с уравнением $p_+^{ij} = 0$.

Отметив ряд результатов, известных по работам Э. Картана и Рузе (библиография — в конце всей работы), автор переходит к построению других тензоров, производных от тензора Римана — Кристоффеля:

$$R'_{ijkl} = \frac{1}{2} R_{ijrs}\Delta_{kl}^{rs} \qquad \text{(операция')},$$

$$R'_{ijkl} = \frac{1}{2} \Delta_{ij}^{rs}R_{rskl} \qquad \text{(операция')},$$

$$R^*_{ijkl} = \frac{1}{4} \Delta_{ij}^{rs}R_{rstu}\Delta_{kl}^{tu} \qquad \text{(операция*)},$$

где $\Delta_{rs}^{ij} = \frac{1}{2}g^{ijtu}\eta_{lurs}$ и $g^{ijkl} = g^{ik}g^{jl} - g^{il}g^{jk}$.

Вводятся в рассмотрение матрицы $R = \| R_{ijkl} \|$, $\Delta = \| \Delta_{rs}^{ij} \|$ и т. д. — матрицы 6-го порядка по группам индексов ij, rs.

Матрицы R' и R' транспонированы одна из другой. Корреляции, ими устанавливаемые, проективно тождественны, если $\tilde{\Delta}R = R\Delta$ или, если $\tilde{\Delta}R + R\Delta = 0$ ($\sim$ символ транспортирования).

Симметрический тензор R^* связан с комплексом, полярным комплексу Римана относительно фундаментальной квадрики в C_3. В C_5 он соответствует квадрике, преобразованной из квадрики R посредством проективитета Δ. Пучок комплексов $\lambda R + \mu R^*$ содержит два автополярных:

$$H = \frac{1}{2}(R + e(g)R^*) \quad \text{и} \quad E = \frac{1}{2}(R - e(g)R^*),$$

из которых комплекс E — гармонический (содержит две серии образующих фундаментальной квадрики).

Квадрики $H^+ = \frac{1}{2}(H + e(g)^{\frac{1}{2}} H')$, $H^- = \frac{1}{2}(H - e(g)^{\frac{1}{2}} H')$ самосопряжены относительно операций′. Они вырожденные, ранга 3 и аннулируются тождественно на E_2^- и E_2^+ соответственно. Значит, соответствующие им в C_3 квадратичные комплексы содержат по одной серии образующих фундаментальной квадрики.

Параллельно с разложением тензора H можно производить разложение тензора E. При этом матрицы E^+ и E^- транспонированы одна из другой, корреляции

$$E^{\pm} = \frac{1}{2}(E \pm e(g)^{\frac{1}{2}} E')$$

самосопряжены относительно операции′ и не определены на плоскостях $E_2^{\pm}$. В. Т. Базылев

7144. Геометрическое изучение тензора Римана — Кристоффеля риманова пространства четырех измерений. (Второе сообщение). Дебевер (Étude géométrique du tenseur de Riemann — Christoffel des espaces de Riemann à quatre dimensions. (Seconde communication). Debever R.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, **42**, № 5, 608—621 (франц.)

Продолжение (см. реф. 7143).

В E_4 формула

$$R_{ijkl} = C^+_{ijkl} + C^-_{ijkl} + E_{ijkl} - Rg_{ijkl}/2$$

задает разложение тензора Римана—Кристоффеля на неприводимые по Картану тензоры. Следовательно, задание 19 проективных компонент тензора R_{ijkl} порождает проективные тензоры $C^{\pm}_{ijkl}$ с 4 компонентами и тензор E_{ijkl} с 8 компонентами. Геометрически в C_5 квадрике R присоединены инвариантно 3 квадрики $C^{\pm}$, E. В C_3 комплекс Римана определяет три квадратичных комплекса $C^{\pm}$, E и, стало быть, связку

$$\lambda C^+_{ijkl} + \mu C^-_{ijkl} + \nu E_{ijkl} + \sigma g_{ijkl}.$$

На этом основании изучаются проективные инварианты, присоединенные к комплексу Римана. Найдены выражения их в виде следов тензоров, присоединенных к R_{ijkl},. Всего имеется 14 инвариантов (8 собственных и 6 смешанных) степеней от 1 до 5-й (относительно компонент R_{ijkl}). Библ. 12 назв. К. М. Белов

7145. Некоторые пространства аффинной связности с ареальной метрикой. Су Бу-цин, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, **7**, № 2, 285—294 (кит.; рез. англ.)

Пусть V_n — n-мерное пространство с m-мерной ареальной метрикой $V = \int_R (Fx^i - p^i_\alpha)(du)^k$, $i = 1, \ldots, n$; $\alpha = 1, \ldots, m$, $p^i_\alpha = \frac{dx^i}{du^\alpha}$, $\Gamma^i_{jk}(x^l, p^l_\alpha)$ — аффинная связность без кручения, зависящая от x^l и m-мерного плоского элемента, определяемого векторами p^l_α (РЖМат, 1954, 416). Доказывается, что если Γ^i_{jk} удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial F}{dx^i} - \frac{\partial F}{dp^h_\alpha} p^j_\alpha \Gamma^h_{ij} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p^l_\beta} \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial p^i_\alpha} p^j_\alpha p^k_\beta = 0, \tag{2}$$

то вектор Эйлера для вариационной задачи $\delta \int_R F(du)^k = 0$ имеет вид

$$E_j = \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial p^j_\alpha \partial p^j_\beta} \left(\frac{\partial^2 x^2}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \Gamma^i_{hk} p^h_\alpha p^k_\beta \right).$$

Получается явное выражение второй вариации для экстремальной поверхности. Автор показывает, что пространства Финслера со связностью Бервальда, пространства Финслера со связностью Картана и пространства со связностью Картана и $(n-1)$-мерной ареальной метрикой представляют собой частные случаи рассматриваемых пространств, метрика и связность которых связываются условиями (1) и (2). Гу Чао-хао

7146. Теория векторно-значных дифференциальных форм. Ч. 1. Дифференцирования в градуированном кольце дифференциальных форм. Фрёлихер, Нейенхейс (Theory of vector-valued differential forms. Part I. Derivations in the graded ring of differential forms. Frölicher Alfred, Nijenhuis Albert), Proc. Koninkl. nederl. akade. wet. Indagationes math., 1956, **A59**, № 3, 338—359 (англ.)

Векторно-значные или, короче, векторные формы рассматриваются в связи с теорией дифференциальных операций на градуированном кольце Φ скалярных дифференциальных форм класса C^∞ на многообразии класса C^∞.

Отображение D кольца Φ в себя называется дифференцированием степени r, если оно удовлетворяет следующим требованиям:

$$D(\Phi_p) \subset \Phi_{p+r}, \quad D(\varphi + \psi) = D\varphi + D\psi, \quad D(\varphi_p \wedge \psi_q) = D\varphi_p \wedge \psi_q + (-1)^{rp} \varphi_p \wedge D\psi_q$$

индексы p, q, r — степени). Оказывается, что любое дифференцирование степени r разлагается на сумму дифференцирований той же степени, принадлежащих следующим двум типам.

1. Тип i_* образован дифференцированиями степеней $r \geqslant -1$ тривиально действующими на Φ_0. Каждое дифференцирование такого типа есть не что иное, как некоторое умножение $\overline{\wedge}$, сходное с внешним умножением, формы $\varphi \in \Phi$ на определенную заданием этого дифференцирования векторную форму L степени $r+1$. Операция $\varphi \overline{\wedge} L$ задается в понятных обозначениях равенством (q — степень φ)

$$i_L \varphi = \varphi \overline{\wedge} L(u_1, \ldots, u_{q+r}) = \frac{1}{(r+1)!(q-1)!} \times \sum_\alpha |\alpha| \omega(L(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_{r+1}}) u_{\alpha_{r+2}} \ldots u_{\alpha_{r+q}}),$$

где $|\alpha|$ — плюс или минус единица, смотря по четности подстановки $\begin{pmatrix} 1,2, & \ldots r+q \\ \alpha_1, \alpha_2 \ldots & \alpha_{r+q} \end{pmatrix}$, а u_{α_i} — произвольные векторы в касательном векторном пространстве многообразия.

2. Тип d_*, к которому принадлежит оператор d внешнего дифференцирования и всякий оператор дифферен-

цирования D степени r, удовлетворяющий соотношению $Dd = (-1)^r dD$. Оператор типа d_* определяется своим заданием на Φ_0; с каждым таким оператором однозначно связывается форма L (векторная) степени r такая, что

$$D\omega = d\omega \overline{\wedge} L + (-1)^r d(\omega \overline{\wedge} L) = (i_L d - (-1)^{r-1} d i_L)\,\omega.$$

Дифференцирование общего типа представляется как $i_* + d_*$. Устанавливаются многочисленные соотношения, в духе внешнего исчисления, между определенными выше операторами.

В конце первой части работы рассматриваются векторные 1-формы и дается новое доказательство одной теоремы в формулировке, принадлежащей Хантьесу (РЖМат, 1956, 6125), касающейся условий интегрируемости (голономности) полей собственных подпространств матрицы векторно-значной формы h (т. е. матрица смешанного тензора второго ранга) в случае ее приводимости к диагональному виду. В. В. Рыжков

7147. Некоторые свойства бискалярных полей. Шабак (Cîteva proprietăţi ale cîmpurilor biscalare. Şabac Ion Gh.), Bul. Inst. politehn. Bucureşti, 1956, 18, № 3-4, 41—49 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор называет бискалярным поле вектора $\mathbf{V}$, если

$$\mathbf{V} = \lambda \operatorname{grad} U,$$

где λ и U — скалярные функции, и находит различные выражения для средней и полной кривизны поверхностей уровня функции U. Так, например,

$$2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{V}\left[\operatorname{div}\mathbf{V} - \frac{d}{dn}\right],$$

$$2K = \frac{2}{R_1 R_2}\left[\frac{1}{V}\operatorname{div}\mathbf{V}\right] + \frac{d}{dn}\left[\frac{1}{V}\operatorname{div}\mathbf{V}\right] - \operatorname{div}\left[\frac{1}{V}\frac{d\mathbf{V}}{dn}\right],$$

где $\frac{d}{dn}$ есть оператор дифференцирования по направлению нормали к поверхностям уровня. Рассматриваются частные случаи и некоторые приложения к гидродинамике. А. П. Норден

7148. Связь между аффинной дифференциальной геометрией и геометрией Минковского. Лаугвиц (Eine Beziehung zwischen affiner und Minkowskischer Differentialgeometrie. Laugwitz Detlef. Publs math., 1957, 5, № 1-2, S. 72—76) (нем.)

Гиперповерхность n-мерного центроаффинного пространства

$$x^i = x^i(u^\alpha) \qquad i, j = 1, \ldots, n, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, n-1,$$

может быть принята за индикатрису метрики Минковского с линейным элементом

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j,$$

коэффициенты которого зависят от точки и от направления. Показывается, что для направлений касательных к индикатрисе

$$ds^2 = -\frac{\operatorname{Det}(d^2x, x_1, \ldots, x_{n-1})}{\operatorname{Det}(x, x_1, \ldots, x_{n-1})},$$

где $x_\alpha = \frac{\partial x}{\partial u^\alpha}$, т. е. коэффициенты линейного элемента отличаются только знаком от коэффициентов основной квадратичной формы центроаффинной теории гиперповерхностей. А. П. Норден

7149. Об одном частном случае пространства Финслера. Шош (Über eine spezielle Klasse von Finslerschen Räumen. Soós Gy. Publs math., 1957, 5, № 1-2, S. 150—153) (нем.)

Автор называет квазисимметрическими такие пространства Финслера, которые характеризуются условиями:

$$A^i_{jk|l} = 0 \qquad (R^i_{jkl} - A^i_{jm}R^m_{0kl})_{|n} = 0,$$

где A^i_{jk} — тензор кручения, а R^i_{jkl} и R^m_{0kl} — компоненты тензора кривизны картановой связности, которая используется и для ковариантного дифференцирования. Показывается, что любое квазисимметрическое пространство допускает по крайней мере однопараметрическую непрерывную группу преобразований, сохраняющих связность. А. П. Норден

7150. Классификация точечных преобразований первого рода между плоскостями. Муракини (Una classificazione delle trasformazioni puntuali di prima specie fra piani. Muracchini Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 2, 204—211 (итал.; рез. англ.)

Соответствие T между двумя плоскостями π и $\bar{\pi}$ есть соответствие первого рода, если в каждой паре соответствующих точек $(O, \bar{O})$ существуют три отличных друг от друга пары характеристических направлений. Такое соответствие может быть представлено с помощью уравнений:

$$\bar{x} = x - xy + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + [4],$$
$$\bar{y} = y - xy + b_{30}x^3 + 3b_{21}x^2y + 3b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 + [4]. \qquad (1)$$

Уравнения

$$\bar{x} = \frac{x\{\lambda x + (\mu+1)y - 1\}}{(\lambda+1)(\mu+1)xy - (\lambda x - 1)(\mu y - 1)},$$
$$\bar{y} = \frac{y\{(\lambda+1)x + \mu y - 1\}}{(\lambda+1)(\mu+1)xy - (\lambda x - 1)(\mu y - 1)} \qquad (2)$$

(λ, μ — параметры) определяют ∞^2 соприкасающихся квадратичных преобразований $\mathcal{Q}(\lambda, \mu)$, уравнения

$$\alpha' = a_{30}\alpha^3 + (3a_{21} - 1)\alpha^2\beta + 3a_{12}\alpha\beta^2 + a_{03}\beta^3 - \mu\alpha\beta(\alpha - \beta),$$
$$\beta' = b_{30}\alpha^3 + 3b_{21}\alpha^2\beta + (3b_{12} - 1)\alpha\beta^2 + b_{03}\beta^3 + \lambda\alpha\beta(\alpha - \beta) \qquad (3)$$

определяют преобразование прямых линий, исходящих из точек $(O, \bar{O})$, соответствующее преобразованию $\mathcal{Q}(\lambda, \mu)$. Обозначим такие преобразования символом $\mathcal{R}(\lambda, \mu)$. Двойные прямые преобразования $\mathcal{R}(\lambda, \mu)$ суть гиперсоприкасающиеся прямые преобразования $\mathcal{Q}(\lambda, \mu)$. Для последних дается геометрическая характеристика, не зависящая от $\mathcal{R}(\lambda, \mu)$. Характеристические прямые определяются равенством $\alpha\beta(\alpha - \beta) = 0$.

Доказывается ряд предложений, например: если одна из характеристических прямых r, исходящих из O, есть гиперсоприкасающаяся прямая одного преобразования $\mathcal{Q}(\lambda, \mu)$, то это справедливо для всех других $\mathcal{Q}$. Характеристическая кривая преобразования T касательная в O к r имеет здесь перегиб.

Главной гиперсоприкасающейся прямой преобразования $\mathcal{Q}(\lambda, \mu)$ называется гиперсоприкасающаяся прямая этого преобразования, обладающая тем свойством, что кривая γ плоскости π, касающаяся этой прямой, преобразуется в две кривые плоскости $\bar{\pi}$ $\bar{\gamma}$ $(= T\gamma)$ и $\gamma(\lambda, \mu)$ $(= \mathbf{Q}(\lambda, \mu)\gamma)$, имеющие аналитическое касание 3-го порядка. Если преобразование $\mathcal{Q}(\lambda, \mu)$ имеет только одну главную прямую, то преобразование $\mathcal{R}(\lambda, \mu)$ имеет индекс (1.2).

Существует всегда одно и только одно $\mathcal{Q}(\lambda, \mu)$, которое имеет две из четырех гиперсоприкасающихся прямых, совпадающие с парой прямых, получающихся от приравнивания к нулю гессиана от левой части урав-

нения характеристических направлений: $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0$. Здесь λ и μ определяются равенствами

$$\lambda = b_{03} - b_{30} + 3b_{12} - 3a_{12} - 3a_{21},$$
$$\mu = a_{30} - a_{03} + 3a_{21} - 3b_{12} - 3b_{21}.$$

Пусть $\mathscr{C}^*$ — преобразование $\mathscr{C}(\lambda, \mu)$, определяемое этими значениями λ и μ, а $\mathscr{R}^*$—соответствующее ему преобразование $\mathscr{R}(\lambda, \mu)$. Автор различает следующие случаи преобразования T:

1. Случай, когда $\mathscr{R}(\lambda, \mu)$ имеет индекс (1.3) (правые части формул (3) не имеют общих множителей).

2. Случай, когда $\mathscr{R}(\lambda, \mu)$ имеет индекс (1.2) (правые части формул (3) имеют один общий линейный множитель).

3. Случай, когда $\mathscr{R}(\lambda, \mu)$ имеет индекс (1.1) (правые (части формул (3) имеют один общий квадратный множитель). В этом случае преобразование $\mathscr{R}(\lambda, \mu)$ есть проективитет.

4. Случай, когда $\mathscr{R}(\lambda, \mu)$ является вырожденным (правые части формул (3) отличаются лишь постоянным множителем).

Случай 1 в свою очередь делится на 4 подслучая:

а) Преобразования, для которых $\mathscr{R}^*$ имеет индекс (1.3).

б) Преобразования, для которых $\mathscr{R}^*$ имеет индекс (1.2).

в) Преобразования, для которых $\mathscr{R}^*$ имеет индекс (1.1) (проективитет).

г) Преобразования, для которых $\mathscr{R}^*$ вырождено.

Используя предложения, доказанные ранее, автор дает безинтегральное представление для каждого из случаев 2—4. Например: преобразование б можно получить, если взять в π и $\bar{\pi}$ произвольные системы ∞^1 прямых, установить между ними произвольное соответствие и между каждой парой соответствующих прямых установить какой-нибудь проективитет. Н. И. Кованцов

7151 Д. О n-мерных поверхностях с сопряженными или асимптотическими полями p-направлений. Лумисте Ю. Г. Автореф. дис. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

7152. Кривизна и характеристические классы риманова многообразия. Чжень Шэн-шень (On curvature and characteristic classes of a Riemann manifold. Chern Shiing-shen), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1955, 20, № 1—2, 117—126 (англ.)

Напоминается (со ссылкой на работу автора: Topics in differential geometry. Institute for Advanced Study, Princeton, USA) ряд соотношений, связывающих кривизну ориентируемого компактного риманова многообразия M с некоторыми характеристиками M в целом: характеристикой Эйлера-Пуанкаре $\chi(M)$ и понтрягинскими классами p_k. Именно: 1) Если M имеет четную размерность $n = 2s$, то

$$\chi(M) = (-1)^s \frac{1}{2^{2s}\pi^s s!} \int_M \Delta,$$

где $\Delta = \sum_{i_1 \ldots i_{2s}} \varepsilon_{i_1 \ldots i_{2s}} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{2s-1} i_{2s}}$, Ω_{ij} — формы кривизны ($\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$) в ортонормированном репере $e_1, \ldots, e_n$, при условии, что $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ — n-вектор меры 1, когерентный с ориентацией M ($\varepsilon_{i_1 \ldots i_{2s}}$ — символ Кронекера, $\wedge$ означает косое умножение). 2) Дифференциальная форма, определяющая (в смысле теоремы Де Рама) понтрягинский класс p_k, имеет вид

$$\psi_k = \frac{1}{(2\pi)^{2k}(2k)!} \sum \delta(i_1 \ldots i_{2k}; j_1 \ldots j_{2k}) \times \times \Omega_{i_1 j_1} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{2k} j_{2k}}.$$

Подсчитываются $\chi(M)$ и p_k в специальных случаях (при особой алгебраической структуре тензора кривизны). В частности, доказывается теорема (Мильнор): Если $n = 4$ и риманова кривизна в направлении двух взаимно-перпендикулярных двумерных площадок всегда имеет один и тот же знак, то $\chi(M) \geqslant 0$; если кривизна в любом двумерном направлении всегда > 0 или же всегда < 0, то $\chi(M) > 0$.

В заключение доказывается: Комплексное проективное пространство комплексной размерности m может быть вложено дифференцируемым образом в действительное евклидово пространство размерности $3m - 1$ или $3m - 2$, смотря по тому, m четно или нечетно (доказательство опирается на предложение: если двойственный понтрягинский класс $\bar{p}_e$ компактного многообразия $M \neq 0$, то M может быть вложено дифференцируемым образом в евклидово пространство размерности $n + 2l - 1$. Ф. А. Березин

7153. О теории аффинного вложения. Гу Чаохао, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, 6, № 3, 464—471 (кит.; рез. русск.)

Г. Ф. Лаптев показал (Докл. АН СССР, 1943, 41), что любая m-мерная аффинная связность без кручения всегда осуществима в многообразии V_m той же размерности в n-мерном аффинном пространстве, где $n \geqslant {}^1/_2(m^2 + 2m - 1)$. Автор доказывает некоторые результаты такого же рода очень простым способом, если размерность пространства вложения увеличена до ${}^1/_2(m^2 + 3m)$.

Доказываются три теоремы:

1. Пусть V_m — m-мерное многообразие в аффинном пространстве A_n размерности $n = {}^1/_2(m^2 + 3m)$. Если размерность соприкасающихся пространств второго порядка V_m также равна n, тогда можно осуществить любую заданную аффинную связность с кручением на V_m путем выбора подходящей системы первых нормальных многообразий для V_m.

2. Пусть V_m — m-мерное многообразие в n-мерном аффинном пространстве A_n, где $n = {}^1/_2(m^2 + 3m) - 1$. Если а) соприкасающееся пространство второго порядка для V_m также n-мерное и б) в каждой точке V_m нетривиальные решения $A^{(\alpha, \beta)}$, B^λ уравнений

$$A^{(\alpha, \beta)} \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + B^\lambda \frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda} = 0 \; (i = 1, \ldots n;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

удовлетворяют условию $\det |A^{\alpha\beta}| \neq 0$ ($A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha} = {}^1/_2 A^{(\alpha, \beta)}$, $\alpha \neq \beta$; $A^{\alpha\alpha} = A^{(\alpha\alpha)}$), тогда, выбирая подходящие нормальные многообразия первого рода для V_m, мы можем осуществить на V_m систему заданных путей.

3. При выполнении условий теоремы 1 можно осуществить заданное пространство K-протяженностей в расслоенном пространстве $V_{m,k}$. Su Buchin

7154. О парах связностей и интегральных многообразиях системы уравнений с частными производными 2-го порядка (I), (II). Гу Чаохао, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, 6, № 2, 153—162; 163—169 (кит.; рез. русск.)

I. Рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + H^i_{\alpha\beta}(u^\lambda, x^i, p^l_r) = 0 \qquad (1)$$

$$(i, j = 1, \ldots, n;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, m;$$

$$p^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \quad H^i_{\alpha,\beta} = H^i_{\beta\alpha}, n > m).$$

Бортолотти было найдено несколько дифференциальных объектов, определяемых системой (1).

Важнейшими из них является пара связностей $\Gamma^i_{jk}(u, x, p)$ и $G^\gamma_{\alpha\beta}(u, x, p)$. В настоящей работе дана геометрическая интерпретация этой пары связностей, которая рассматривается как пара аффинных связностей, определенных на m-мерном многообразии $x^i = x^i(u^\alpha)$ в x-пространстве, являющемся образом некоторого u-пространства при данном отображении.

Доказана теорема: Если в x-пространстве дано какое-либо оснащение, соответствующее всякому плоскому элементу (x^i, p^i_α), т. е. дана система контравариантных векторов с компонентами

$$p^i_s = p^i_s(x, p^l_\alpha),\ s = m+1, \ldots, n$$

$$(\det|p^i_\alpha, p^i_s| \neq 0,\ p^i_s(x, p^i_\alpha) = p^i_s(x, K^\beta_\alpha p^i_\beta),$$

где $\det|K^\beta_\alpha| \neq 0$), то на каждом интегральном многообразии определены пары аффинных связностей с компонентами γ^i_{jk} и $G^\gamma_{\alpha\beta}$ так, что выполняются следующие условия: 1) данное многообразие представляет собой вполне геодезическое многообразие для связности γ^i_{jk}, 2) связность $G^\gamma_{\alpha\beta}$ является индуцированной связностью первой связности γ^i_{jk}.

Если система (1) вполне интегрируемая и определение интегрального многообразия не зависит от выбора базиса начального m-элемента, то на каждом интегральном многообразии существует пара связностей, удовлетворяющая указанным условиям и связанная с многообразием внутренним образом.

II. Проводится геометрическое исследование системы (1) при условии, что $n < m$.

В этом случае система (1) также определяет пару связностей с компонентами Γ^i_{jk} и $G^\gamma_{\alpha\beta}$, которые являются функциями u^γ, x^i и p^l_ε. Если дана система функций (2) $x^i = x^i(u^\alpha)$ (ранг $\left\| \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \right\|$ равен u), которая определяет некоторое отображение u-пространства в x-пространство, то все u-пространство разлагается на $\infty^n V_{m-n}$, каждое из которых является прообразом некоторой точки в x-пространстве при данном отображении. Из системы (2) получаем пару систем функций $\Gamma^i_{jk}(u^\alpha, x^l(u^\gamma), p^h_\varepsilon(u^\beta))$ и $G^\gamma_{\alpha\beta}(u^\varepsilon, x^i(u^\delta), p^l_\sigma(u^\gamma))$, являющихся функциями только от u. Тогда связность с компонентами $G^\gamma_{\alpha\rho}$ играет роль аффинной связности в u-пространстве, а связность с компонентами Γ^i_{jk} определяет некоторое изоморфное соответствие между $(n-m)$-мерными векторными пространствами, состоящими из нормальных ковариантных векторов в каких-либо двух бесконечно близких точках.

Если система (2) есть решение системы (1), то каждое из $\infty^n V_{m-n}$, определенных системой (2), называется интегральным многообразием. Доказана теорема: Если в u-пространстве дано оснащение, т. е. задана система ковариантных векторов

$$P^s_\alpha = P^s_\alpha(u, p),\ s = n+1, \ldots, m$$

$$(\det|P^i_\alpha, P^s_\alpha| \neq 0,\ P^s_\alpha(u, K^\gamma_\beta P^l_\gamma) = P^s_\alpha(u, P^l_\beta),$$

где $\det|K^\gamma_\beta| \neq 0$), то на u-пространстве определяется аффинная связность с компонентами $\check{G}^\gamma_{\alpha\beta}$ так, что каждое интегральное многообразие, соответствующее решению (2), является вполне геодезическим многообразием.

Если: 1) система (1) вполне интегрируемая, (2) определение системы интегральных многообразий не зависит от выбора базиса начального элемента, то связность $G^\gamma_{\alpha\beta}$ обладает свойствами $\check{G}^\gamma_{\alpha\beta}$.

Из резюме автора

7155. О парах связностей и интегральных многообразиях системы уравнений в частных производных 2-го порядка (III). Гу Чао-хао, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, 6, № 3, 426—432 (кит.; рез. русск.)

Продолжение двух предыдущих статей с этим же названием (реф. 7154). Предполагается, что $n > m > 1$, система

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + H^i_{\alpha\beta}(u^\lambda, x^i, p^l_r) = 0$$

$$(i, j = 1, \ldots, n;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, m;$$

$$p^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \quad H^i_{\alpha\beta} = H^i_{\beta\alpha})$$

вполне интегрируема и интегральные многообразия независимы от начального линейного элемента. Автор дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы система была проективно плоской. G. Wu

7156. Приложения понятия неголономной струи. Эресман (Applications de la notion de jet non holonome. Ehresmann Charles), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 4, 397—399 (франц.)

Автор пользуется обозначениями своей предыдущей работы (РЖМат, 1956, 4858). Пространство $\overline{L}^r_{m,n}$ всех полуголономных r-струй из R^n в R^m с началом O и концом O разлагается в прямую сумму пространства $\overline{M}^k_{m,n}$ $(k = 1, \ldots, r)$, каждое из которых отождествляется с произведением $R^m \otimes (R^n)^* \otimes \ldots \otimes (R^n)^*$, содержащим k экземпляров пространства $(R^n)^*$, сопряженного к R^n. Тем самым в пространстве $\overline{L}^r_{m,n}$ вводится аналитическая структура. Группа $\overline{L}^r_n \subset \overline{L}^r_{n,n}$, состоящая из обратимых струй, становится при этом группой Ли, и группа $\overline{L}^r_m \times \overline{L}^r_n$ аналитически действует на $\overline{L}^r_{m,n}$.

Если V, E, E' — многообразия класса r, а $\varphi\colon E' \times E \to E$ — дифференцируемое отображение класса r, то определяется неголономное продолжение $\tilde{\varphi}\colon \tilde{J}^r(V, E' \times E) \to \tilde{J}^r(V, E)$ отображения φ. При этом полуголономные струи переходят в полуголономные. Полуголономное продолжение группы Ли G оказывается группой Ли, являющейся несущественным расширением группы G. Вводится также понятие продолжения многообразия V по отношению к данному подгруппоиду группоида обратимых полуголомных r-струй из V в V, и доказывается транзитивность таких продолжений. А. Л. Онищик

7157. О геометрическом строении комплексно-аналитической поверхности V_{2n} в пространстве R_{2N}. Лумисте Ю. Г., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 2, 259—262

Если уравнения поверхности в евклидовом пространстве представимы в ортогональных координатах в виде $x^J + \sqrt{-1}x^{N+J} = f^J(w^k)$, где f — комплексно-аналитические функции комплексных параметров w^k ($J = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, n$), то такая поверхность называется комплексно-аналитической.

В работе дано следующее необходимое и достаточное условие того, что поверхность является комплексно-аналитической: 1) поверхность есть поверхность переноса двух мнимых комплексно сопряженных вполне изотропных аналитических поверхностей X_n и $\overline{X}_n$, 2) поверхности X_n и $\overline{X}_n$ лежат соответственно в двух плоских образующих изотропного конуса, пересекающихся только в точке поверхности. Д. В. Беклемишев

7158. Вещественные аналитические многообразия и комплексные аналитические многообразия. Картан (Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes. Cartan Henri), Bull. Soc. math. France, 1957, 85, № 1, 77—99 (франц.)

Пусть X — комплексное аналитическое многообразие, являющееся объединением счетного множества компактов, и пусть A — замкнутое подмножество X, обладающее фундаментальной системой окрестностей, каждая из которых есть многообразие Штейна. Доказывается, что для когерентных аналитических пучков на пространстве A остаются в силе основные теоремы (A) и (B) о многообразиях Штейна. В частности, n-мерное вещественное пространство R^n, рассматриваемое как подмножество комплексного пространства C^n, обладает фундаментальной системой окрестностей, являющихся областями регулярности, откуда выводится, что теоремы (A) и (B) верны для когерентных аналитических (в вещественном смысле) пучков на пространстве R^n. Аналитическое подмножество $A \subset R^n$ называется когерентным, если соответствующий ему пучок идеалов когерентен, всякое аналитическое подмногообразие является когерентным аналитическим подмножеством. Доказывается, что теоремы (A) и (B) верны для когерентных аналитических пучков на когерентных аналитических подмножествах пространства R^n. Отсюда выводится, что всякое когерентное аналитическое подмножество пространства R^n может быть задано в целом конечным числом аналитических уравнений. Приводятся примеры аналитических подмножеств пространства R^3, не обладающих этим свойством. А. Л. Онищик

7159 К. Некоторые вопросы геометрии в целом в римановом пространстве. Погорелов А. В., Харьков, Харьковский ун-т, 1957, 90 стр., 3 р. 50 к.

Доказывается следующая основная теорема.

Двумерное замкнутое риманово многообразие M с регулярной метрикой и кривизной, которая больше некоторой постоянной K_R^*, допускает изометрическое погружение в трехмерное риманово пространство R с регулярной метрикой в виде регулярной замкнутой поверхности Ф.

Постоянная $K_R^* = \max \max \{K_1(X), 3(K_1(X) - K_2(X))\}$, где X—произвольная точка пространства R и $K_1(X)$, $K_2(X)$—наибольшая и наименьшая из кривизн пространства в двумерных площадках этой точки. Можно потребовать, чтобы при погружении точка X многообразия M переходила в любую точку Y пространства R, а пучок направлений многообразия M переходил в изометричный ему пучок направлений в точке Y и чтобы заданное направление обхода пучка образовало с направлением внутренней нормали поверхности «правый винт». Этими условиями поверхность Ф определяется однозначно. Отсюда следует, что в римановом пространстве R замкнутая поверхность с гауссовой кривизной большей, чем K_R^*, допускает непрерывные изгибания с таким же произволом, как движения в евклидовом пространстве.

В книге содержится также решение вопроса о бесконечно малых изгибаниях замкнутой поверхности с положительной внешней кривизной. Именно, доказана жесткость замкнутой, гомеоморфной сфере, поверхности положительной внешней кривизны в трехмерном римановом пространстве, при условии, что поверхность закреплена в одной точке вместе с пучком направлений, исходящих из этой точки.

В § 2 и § 3 доказывается, что могут быть получены оценки для нормальных кривизн замкнутой поверхности с гауссовой кривизной большей K_R^*, зависящие только от метрики поверхности и метрики риманова пространства.

Существуют аналогичные оценки и для производных различных порядков пространственных координат точки поверхности по координатам на поверхности. Я. П. Бланк

7160 Д. Пространства симметричной почти симплектической связности. Лемлейн В. Г. Автореф. дис. канд. физ.-матем. н., Моск. гор. пед. ин-т, М., 1958

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

7161. Линейные конгруэнции в проективных пространствах над алгебрами альтернионов. Джавадов М. А., Азэрб.ССР Элмлэр Акад. хэбэрлэри, Изв. АН АзербССР, 1957, № 7, 3—15 (рез. азерб.)

В проективном пространстве $P_{2n+1}({}^lA_m)$ над алгеброй альтернионов ${}^lA_m$ (реф. ☞ 7162) определяются линейные конгруэнции прямых. Показывается, что такая конгруэнция является моделью проективного пространства $P_n({}^lA_{m+1})$ над алгеброй альтернионов более высокого порядка, причем коллинеации $P_n({}^lA_{m+1})$ гомоморфно изображаются коллинеациями $P_{2n+1}({}^lA_m)$, переводящими в себя конгруэнции, а ядром этого гомоморфизма является группа коллинеаций $P_{2n+1}({}^lA_m)$, переводящих в себя каждую прямую конгруэнции. Находится связь между двойными отношениями четверок точек $P_n({}^lA_{m+1})$ и двойными отношениями четверок точек, принадлежащих прямым $P_{2n+1}({}^lA_m)$, изображающим четверки точек $P_n({}^lA_{m+1})$. Частные случаи этих результатов для $m = 1$ и 2 были получены ранее А. П. Норденом и референтом. Б. А. Розенфельд

7162. Проективные пространства над алгебрами. Джавадов М. А., Элми эсэрлэр. Азэрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1957, № 2, 3—18 (рез. азерб.)

Определяются проективные пространства над полупростыми алгебрами, специально рассматриваются такие пространства в случае алгебр вещественных, комплексных и двойных матриц и алгебр альтернионов (чисел Клиффорда). Показывается, что коллинеации проективных пространств над алгебрами имеют вид

$$y^i l = \sum_j a_j^i f(x^j),$$

а кореляции этих пространств имеют вид

$$lu_i = \sum_i g(x^j) a_{ij},$$

где x^i, y^i — проективные координаты точек, u_i — тангенциальные проективные координаты гиперплоскостей, $f(x)$—непрерывный автоморфизм, $g(x)$—непрерывный антиавтоморфизм алгебры. Для алгебр матриц и альтернионов выражения коллинеаций и корреляций записываются с помощью конкретных автоморфизмов и антиавтоморфизмов этих алгебр. Определяется также двойное отношение четырех точек на прямой и показывается, как оно преобразуется при коллинеациях и корреляциях. В конце работы обобщаются на проективные пространства над алгебрами матриц с элементами из произвольной полупростой коммутативной алгебры результаты работы референта «Геометрия многообразия плоскостей проективного пространства как точечная проективная геометрия» (Тр. семинара по вект. и тенз. анализу при МГУ, вып. 9, 1952, 213—222). Б. А. Розенфельд

7163. Неевклидовы геометрии над алгебрами. Джавадов М. А., Элми эсэрлэр Азэрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1957, № 4, 3—16 (рез. азерб.)

В проективных пространствах над алгебрами вещественных, комплексных и двойных матриц и над алгебрами альтернионов (реф. 7162) определяются все инволюционные корреляции. С помощью этих инволюционных корреляций в указанных пространствах строятся неевклидовы геометрии, для которых найденные корреляции являются абсолютными поляритетами. Метрические инварианты двух точек этих неевклидовых пространств определяются как собственные числа матриц, определяемых двойными отношениями данных точек и полярных им гиперплоскостей. Показывается, что движения неевклидовых пространств, т. е. взаимно однозначные преобразования этих пространств, сохраняющие метрические инварианты точек, совпадают с коллинеациями, перестановочными с абсолютным поляритетом. Подсчитывается число метрических инвариантов для различных рассматриваемых неевклидовых пространств. Б. А. Розенфельд

7164. Инвариантные пространства матрицы. Чаудхури (On invariant spaces of a matrix. Choudhury A. C.), Math. Student, 1957, 25, № 1—2, 1—3 (англ.)

Пусть L — структура инвариантных подпространств линейного преобразования A конечномерного векторного пространства над полем P. Доказывается, что структура L изоморфно вкладывается в структуру делителей минимального полинома преобразования A, а дуально-изоморфно — в структуру идеалов кольца $P[x]$. Л. А. Скорняков

7165. Матричное представление четырехмерного вращения в гиперпространстве. Гхошц (A matrix treatment of four-dimensional rotation in hyperspace. Ghosh N. N.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1954, 20, № 5, 542—547 (англ.)

Вращение в четырехмерном евклидовом пространстве может быть представлено матрицей

$$e^{\Omega} = E + \Omega + \frac{\Omega^2}{2!} + \ldots, \qquad (1)$$

где Ω — кососимметричная матрица, которая удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\Omega^5 + p_1^2\Omega^3 + p_1^4\Omega = 0. \qquad (2)$$

Пользуясь этим уравнением, можно привести (1) к следующему матричному многочлену

$$e^{\Omega} = E + f_1(p_1, p_2)\,\Omega + \ldots + f_4(p_1, p_2)\,\Omega^4, \qquad (3)$$

коэффициенты которого f_i, $i = 1, \ldots, 4$, являются бесконечными степенными рядами относительно p_1, p_2. Вращение будет плоским при $p_2 = 0$, и в этом случае

$$e^{\Omega} = E + \frac{\sin p_1}{p_1}\,\Omega + \frac{1 - \sin p_1}{p_1^2}\,\Omega^2. \qquad (4)$$

Далее показывается, что, зная корни уравнения (2), можно разложить (3) на множители вида (4), т. е. представить любое вращение в виде произведения двух плоских вращений. А. П. Норден

7166. Замечание о некоторых частично транзитивных плоскостях. Хьюз (A note on some partially transitive projective planes. Hughes D. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 978—981 (англ.)

Исследуются плоскости типа $(4m)$ (РЖМат, 1957, 5917). Показывается, что $m=3$ влечет $n=4$, т. е. соотношение между m и n, доказанное в цитированной выше работе для $m \neq 3$, сохраняется и для $m=3$. Устанавливается, что плоскости типа $(4m)$ существуют для любого $n = p^{2t}$, где p — простое число. Л. А. Скорняков

7167. О числе полуправильных многогранников. Ашкинузе В. Г., Матем. просвещение, вып. I, 1957, 107—118

Многогранник называется полуправильным или архимедовым, если все его многогранные углы равны между собой, а все грани являются правильными многогранниками (разных типов). Традиционно указывается, что еще Архимед установил существование двух бесконечных типов полуправильных многогранников (призмы и антипризмы) и еще 13 изолированных типов подобных многогранников (см., например, статью «Многогранники» в Большой Советской Энциклопедии, т. 27, стр. 652). В статье устанавливается существование 14-го типа полуправильных многогранников, в каждой вершине которого сходятся те же правильные многоугольники и в той же последовательности, что и в одном из известных многогранников (3 квадрата и 1 правильный треугольник), но который, однако, относится к другому топологическому типу. Утверждается, что четырнадцатью типами исчерпываются все возможные типы полуправильных многогранников. И. М. Яглом

7168. Кратные покрытия плоскости кругами. Блендон (Multiple covering of the plane by circles. Blundon W. J.), Mathematika, 1957, 4, № 7, 7—16 (англ.)

Работа, примыкающая к кругу вопросов, составляющих содержание монографии Фейеша Тота (Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, М., 1958), посвящена r-кратным покрытиям плоскости равными кругами, т. е. таким покрытиям, что каждая точка плоскости принадлежит по крайней мере r кругам (ср. Хепеш, РЖМат, 1957, 4355). В работе находится для $r = 2,3,4$ редчайшее r-кратное решетчатое покрытие (т. е. такое покрытие, что центры кругов образуют решетку точек) и плотность $\vartheta^{(r)}$ соответствующего покрытия. А именно: показывается, что если $\vartheta = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1{,}209\ldots$ есть плотность редчайшего однократного покрытия, то $\vartheta^{(2)} = 2\vartheta$, $\vartheta^{(3)} = \mu\vartheta$, где $\mu = [(15 + \sqrt{97})\sqrt{11 + 5\sqrt{97}}] : 48\sqrt{2} = 2{,}841\ldots$ и $\vartheta^{(4)} = (25 : 4\sqrt{3})\,\vartheta = 3{,}608\ldots\vartheta$. И. М. Яглом

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

7169. О признаках локально выпуклых плоских дуг, в частности дуализируемых. Хаупт (Über Kennzeichnungen lokal konvexer, ebener Bogen, insbesondere auch dualisierbarer. Haupt Otto), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1957, 21, № 1-2, 44—54 (нем.)

Передоказывается, уточняется и дополняется ряд теорем Унгера (РЖМат, 1954, 4173, 5755) о дуализируемых дугах.

Два новых результата: 1) для дуализируемой дуги локальная выпуклость эквивалентна регулярности; 2) дуга без параллельных паратингентов, ни одна точка которой не обладает совпадающими полуокрестностями (левой и правой), есть простая выпуклая дуга.

В. А. Рохлин

7170. Об одном приеме превращения невыпуклой ломаной в выпуклую. Решетняк Ю. Г., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 189—191

Рассматривается процесс превращения невыпуклой замкнутой ломаной в выпуклую, состоящий в следующем:

На плоскости дана простая замкнутая невыпуклая ломаная L. Тогда существует опорная к ней прямая, имеющая по крайней мере две общие точки, которые разбивают ломаную L на части, не сводящиеся к отрезку. Одна из этих частей объемлет другую. Объемлемая дуга зеркально отражается в рассмотренной выше опорной прямой. Если в результате этого построения получится невыпуклая кривая, то применяем к ней снова то же построение. В работе устанавливается, что описанный процесс в конечное число шагов приводит к выпуклой ломаной.

И. Я. Бакельман

7171. О геометрическом месте середин хорд, делящих периметр овала в отношении k. Радзишевский, Левандовский (Sur le lieu géométrique des milieux des cordes qui divisent le périmètre d'un ovale dans le rapport k. Radziszewski Konstanty, Lewandowski Zdzisław), Ann. Univ. M. Curie Skłodowska, 1955(1957), A9, № 1—13, 181—185 (франц.; рез. русск., польск.)

Доказана теорема: Геометрическим местом середин хорд, делящих в данном отношении длину (периметр) замкнутой выпуклой центральной кривой, является замкнутая выпуклая кривая, имеющая центр.

Доказательство состоит в установлении соответствующей теоремы для выпуклого многоугольника и последующего предельного перехода.

П. П. Касьянков

7172. Об одном варианте теоремы Хелли. Хадвигер, Дебруннер (Über eine Variante zum Hellyschen Satz. Hadwiger H., Debrunner H.), Arch. Math., 1957, 8, № 4, 309—313 (нем.)

Дается доказательство следующего предложения, обобщающего теорему Хелли (Helly E., Jahresber. Deutsch. Math. Verein., 1923, 32; ср. РЖМат, 1958, 2417): Если конечное, содержащее по меньшей мере p элементов множество овалов n-мерного евклидова пространства обладает тем свойством, что среди любых p овалов множества по меньшей мере q овалов имеют непустое пересечение, то все множество может быть разбито на n подмножеств ($n \leqslant p - q + 1$) так, что овалы, входящие в одно и то же подмножество, имеют непустое пересечение. При этом предполагается, что $k \geqslant 1$, $p \geqslant q \geqslant k + 1$, $kq > (k-1)p + k + 1$. $N = p - q + 1$ — верхняя грань чисел n, обладающих указанным свойством. При $p = q = k + 1$ теорема сводится к теореме Хелли.

А. Г. Школьник

7173. (M, F)-проблема. Бири (Ein (M, F)-Problem. Bieri H.), Experientia, 1957, 13, № 10, 389—391 (нем.; рез. англ.)

Окончание работы автора (РЖМат, 1957, 5928), в которой доказывается, что среди выпуклых тел вращения данной высоты l с заданным интегралом средней кривизны M наименьшей поверхностью F обладают прямые круговые конусы. В предшествующей работе доказательство было проведено для тел, у которых экваториальное сечение лежит в основании.

А. Г. Школьник

7174. О числе контактов между параллельно смещенными выпуклыми телами. Хадвигер (Über Treffanzahlen bei translationsgleichen Eikörpern. Hadwiger H.), Arch. Math., 1957, 8, № 3, 212—213 (нем.)

Для невырожденного замкнутого тела A в E^k рассматривается наибольшее количество $n(A)$ тел, которые получаются из A параллельными смещениями, пересекают A и не имеют друг с другом общих внутренних точек. Посредством симметризации доказывается, что $n(A) \leqslant 3^k$ (если A — параллелотоп, то $n(A) = 3^k$). Ставится вопрос о наименьшем значении $n(A)$ и форме тела, для которого $n(A)$ минимально.

В. А. Залгаллер

7175. Экстремальная задача, относящаяся к центру тяжести выпуклого диска. Хелфенстейн (An extremal problem concerning the centre of gravity of a convex disc. Helfenstein H. G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 992—1001 (англ.)

Пусть R_p — внешнее параллельное расширение данной ограниченной выпуклой области R на расстояние p. Расстояние $\rho(R, R')$ между двумя областями определяется как наименьшее из чисел p, для которых $R \subset R'_p$ и $R' \subset R_p$. Доказывается, что при таком определении $\rho(R, R')$ расстояние y_R центра тяжести R от фиксированной прямой, лежащей в плоскости R, является непрерывным функционалом аргумента, если площадь R отлична от нуля. Из доказываемой автором компактности пространства (C) всех плоских выпуклых областей с диаметром, не превышающим Δ, и имеющих хорду AB длины $a \leqslant \Delta$, следует существование максимума расстояния y_R центра тяжести R от AB. Пусть C — точка пересечения полуокружностей радиуса Δ описанных из центров AB по одну сторону от AB; M — середина AB; $\alpha = \angle ACM$; D, E — ближайшие к CM точки пересечения прямой параллельной к AB с полуокружностями; $2\theta = CAE$; y_Q — расстояние центра тяжести пятиугольника $ABECD$ от AB; $\eta(\theta, \alpha) = y_Q/\Delta$; $\eta(\alpha)$ — результат исключения θ из равенств

$$\eta(\theta, \alpha) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sin\theta\cos(\alpha+\theta) + 2\sin\alpha\cos^2(\alpha+2\theta) - \sin\alpha\cos^2\alpha}{2\theta + 2\sin\alpha\cos(\alpha+2\theta) - \sin\alpha\cos\alpha},$$

$$\theta\cos(\alpha+2\theta) + \frac{1}{4}\sin\alpha\cos^2\alpha = \sin\theta\,[\cos(\alpha+\theta) +$$

$$+ \sin\alpha\sin(\alpha+\theta)\cos(\alpha+2\theta)].$$

Теорема. $y_R \leqslant \Delta \cdot \eta(\alpha)$; равенство имеет место тогда и только тогда, когда R — пятиугольник вида $ABECD$. Для значений $\frac{a}{\Delta} = 2\sin\alpha = 0;\ 0,2;\ 0,4;\ \ldots;\ 1$, $\eta(\alpha)$ табулирована.

Г. И. Дринфельд

7176 К. Задачи, относящиеся к евклидову пространству: приложения выпуклости. Эглстон (Problems in Euclidean space: application of convexity. The Adams Prize Essay of the University of Cambridge 1955—1956. Eggleston H. G. London — New York — Paris — Los Angeles, Pergamon Press, 1957, VIII, 165 pp., ill., 40 sh.) (англ.)

Книга посвящена разбору ряда задач, относящихся к евклидовой плоскости или трехмерному пространству, в той или иной степени связанных с понятием выпуклости. Выбор задач является довольно случайным; разбиение книги на главы, соответствующие большей или меньшей роли выпуклости в рассматриваемых задачах, довольно условно. При этом все задачи интересны и разбор их проведен оригинально, с использованием ряда специальных публикаций автора.

Первая глава посвящена некоторым общим задачам теоретико-множественного характера, связь которых с понятием выпуклости является косвенной; сюда относятся вопросы о точечных множествах, котрые порождаются пересечением связных открытых множеств; об апроксимациях произвольных гомеоморфизмов всей плоскости или ее подмножества суперпозициями гомеоморфизмов типа $(x, y)\to(x', y')$, где $x'=x$ или $y'=y$; о связи линейной меры Хаусдорфа плоского множества с нижней гранью мер его ортогональных проекций на всевозможные направления (аналог «ширины» выпуклой фигуры).

Во второй главе рассмотрена единственная задача по формулировке не относящаяся специально к выпуклым множествам, но сводящаяся к задаче о свойствах выпуклых множеств; речь идет о высказанном К. Борсуком предположении, в силу которого каждое выпуклое множество в n-мерном пространстве может быть разбито на $n+1$ множеств меньшего диаметра (Борсук доказал, что n-мерная сфера не может быть разбита на n множеств меньшего диаметра); в книге приведено принадлежащее автору изящное геометрическое доказательство соответствующей трехмерной теоремы.

Третья глава посвящена задачам, непосредственно относящимся к выпуклым кривым и фигурам; здесь рассмотрены некоторые свойства многоугольников с заданным числом сторон, приближающих наилучшим образом (в разном смысле этого слова) данную выпуклую кривую, а также несколько относящихся к выпуклым кривым задач, решением которых является треугольник (для примера упомянем следующую задачу: три попарно пересекающиеся прямые делят выпуклую фигуру на шесть областей одной и той же площади λ и внутреннюю треугольную область площади α; в каких пределах может заключаться отношение $\alpha:\lambda$?).

Последняя, четвертая глава книга посвящена задачам, касающимся частных классов выпуклых фигур, а именно: кривым постоянной ширины и треугольникам; здесь рассмотрены вопросы о «мере асимметрии» кривых постоянной ширины («мерой ассиметрии» выпуклой фигуры Δ автор, согласно А. С. Безиковичу, называет отношение площади максимальной содержащейся в Δ натурально-симметричной фигуры к площади Δ) и о возможном отношении ширины выпуклой фигуры Δ к ширине содержащейся в Δ фигуры постоянной ширины, а также ряд экстремальных задач, относящихся к треугольникам, описанным вокруг выпуклых фигур (соответствующие задачи приводят автора к оригинальному решению «проблемы дощечек» Тарского для двумерного случая; по поводу последней проблемы см., например, РЖМат, 1957, 2668) и одну задачу о наиболее плотном (в определенном смысле) заполнении равностороннего треугольника (неравными) непересекающимися равносторонними треугольниками со сторонами, параллельными сторонам Г, но противоположно ориентированными. Разбор каждой из фигурирующих в книге задач завершается библиографией.

И. М. Яглом

См. также: 6358, 6466, 6568, 6831, 6834, 6835, 6879—7192, 6733.

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

7177. Формула открытого типа для численного интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. Уилф (An open formula for the numerical integration of first order differential equations. Wilf Herbert S.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, **11**, № 59, 201—203 (англ.)

Излагается прием получения формул численного интегрирования уравнения

$$y'=f(x, y) \qquad (1)$$

из формул численного дифференцирования функции $y(x)$; в последних y_i' заменяется через $f(x_i, y_i)=f_i$ и затем исключаются все y_i, кроме двух. После иллюстрации исключением y_2 и y_3 из четырехточечных формул дифференцирования получается неявная схема

$$y_1-y_0=\frac{h}{12}[5f_0+8f_1-f(x_2, y_2^*)]+0(h^4),$$
$$y_2^*=5y_0-y_1+2h[f_0+2f_1]$$

для численного интегрирования уравнения (1).

В линейном случае $y'=p(x)+Q(x)y$ последние формулы переписываются в виде одной:

$$y_1\left[1-\frac{h}{3}(2Q_1+Q_2)+\frac{h^2}{3}Q_1Q_2\right]-y_0\left[1+\frac{h}{12}(Q_0-Q_1)-\right.$$
$$\left.-\frac{h^2}{6}Q_0Q_2\right]=\frac{h}{12}[5P_0+8P_1-P_2]-\frac{h^2Q_2}{6}[P_0+2P_1]+$$
$$+\frac{h^4}{24}y^{(IV)}(\xi)\left[1+\frac{h}{3}Q_2\right], \qquad x_1<\xi<x_2.$$

Из приведенного примера вытекает, что в применении к задаче $y'=1+y$, $y(0)=2$ эта схема сравнима по точности полученных результатов с четырехточечной схемой Рунге—Кутта.

А. Д. Горбунов

7178. Некоторые применения метода Чаплыгина к приближенному решению дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Клямко Э. И., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 4, 305—312

Для уравнений $N[y]\equiv y'(x)-F[x, y(x), y(x-\tau(x))]=0$ и $L[y]\equiv y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)=f(x)+c(x)y(x-\tau(x))$, где $\tau(x)>0$ и непрерывна, $F[p, q, s]$ дважды непрерывно дифференцируема по своим аргументам, a, b, c и f непрерывны, доказаны теоремы:

1. Пусть $\partial F/\partial s\gtrless 0$ и непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, H]$ ($\alpha<0>H$) функция $z(x)$ удовлетворяет условию: $z(x)=y(x)$ при $x\in[\alpha, 0]$. Тогда неравенство $N[z]\geqslant 0$, $x\in[0, H]$, влечет за собой на $[0, H]$ неравенство $z\geqslant y$, где y — решение уравнения $N[y]=0$ с начальными условиями: $y(x)=y_0(x)$, $x\in[\alpha, 0]$.

2. Пусть $c(x)\geqslant 0$ и на $[0, H]$ справедлива теорема Чаплыгина для уравнения $L[y]=0$. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, H]$ функция $z(x)$ удовлетворяет условию: $z(x)=y(x)$, при $x\in[\alpha, 0]$ и $z'(0)=y'(0)$. Тогда неравенство $L[z]\geqslant f+cz(x-\tau)$, $x\in[0, H]$, влечет за собой на $[0, H]$ неравенство $z\geqslant y$, где y — решение уравнения $L[y]=f+cy(x-\tau)$ с начальными условиями: $y(x)=y_0(x)$, $x\in[\alpha, 0]$; $y'(0)=y_0'(0)$.

На основе приведенных условий разрешимости задачи Чаплыгина построены методы последовательных приближений типа метода Чаплыгина. Некоторые вопро-

сы распространения метода Чаплыгина на уравнения с запаздывающим аргументом рассматривались С. Н. Слугиным (РЖМат, 1955, 3432). Отметим также, что приведенные теоремы и их обобщения на нелинейные уравнения любого порядка могут быть получены на основе результатов одного из референтов (Цалюк З. Б., Уч. зап. Удмуртского пед. ин-та, 1957, вып. 11, 129—130). Сформулированное без доказательства достаточное условие $(a'(x) - b(x) > 0)$ неограниченной применимости теоремы Чаплыгина для уравнения $L[y] = 0$ непосредственно вытекает из следствия теоремы 2 работы референта (РЖМат, 1956, 4903), если положить $u = e^{\int_0^x a(t)dt}$, причем строгое неравенство можно заменить нестрогим.

Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк

7179. Применение метода Галеркина к задачам об автоколебаниях. Стрелков С. П., Вестн. Моск. ун-та, Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1957, № 3, 51—55

Автор, ссылаясь на механическую трактовку (наложение на исследуемую систему некоторой дополнительной связи), ищет приближенное периодическое решение уравнения

$$m\ddot{y} + ky = f(y, \dot{y}),$$

где y — неизвестная функция t; m и k — заданные постоянные; f — известная функция своих аргументов; решение ищется в виде $y = \varphi(t, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где параметры a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определяются из условия равенства нулю работы силы связи $\Phi = m\ddot{\varphi} + k\varphi - f(\varphi, \dot{\varphi})$ в среднем за период T на любом «возможном перемещении», что приводит к системе уравнений $\int_0^T \cdot \Phi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial a_i}\, dt = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В случае $\varphi = \Sigma_{i=1}^n a_i \psi_i(t)$ получается обычная система уравнений Галеркина.

Запас функций $f(y, \dot{y})$ в статье не уточняется, математических рекомендаций относительно выбора функции φ не дается, вопросы существования решения и сходимости метода не рассматриваются.

Указывается, что при применении метода Галеркина к классическим задачам об автоколебаниях получаются те же результаты, что и по методу Ван-дер-Поля (Van der Pol, Phil. Mag., 1927, 3, 65). Отмечается, что рассмотрение приближенного решения задачи, как точного решения задачи о движении в некоторой другой системе, отличающейся от исследуемой добавлением силы связи, дает в известной мере представление о допущенной погрешности.

Д. Б. Тополянский

7180. Численное интегрирование колеблющихся систем. Рид (Numerical integration of oscillatory systems. Reed Harry L., Jr. Ballistic Res. Lab., Aberdeen Proving Ground, Md., Rept, 1955, № 957, 15 pp.) (англ.)

Рассматривается численное интегрирование при помощи машины систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Сравнивается эффективность методов Рунге — Кутта и Адамса. Дается числовой пример нахождения вековых решений; при этом высокочастотные колебания системы уничтожаются численно. Рассматриваются только ошибки усечения, введенные численным методом.

W. S. Loud

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 6, 667.

7181. Об ошибках в некоторых разностных операторах, заменяющих оператор Лапласа. Педерсен (On errors in some difference operators substituted for the Laplacian operator. Pedersen Kåre), Rapp. Vid.-akad. inst. vaer-og klimaforskn., 1955—1956(1956), № 2, 1—5 (англ.)

Рассматривается скалярная функция $z = \cos k(x' + \alpha) \cdot \cos k(y' + \beta)$ с длиной волны $L = 2\pi/k$ вдоль обеих осей в декартовой системе координат x', y'. Преобразованием поворота осей на угол φ функция z в новой системе координат x, y приводится к виду

$$z = \frac{1}{4}\left[e^{ik(ux+vy+\alpha+\beta)} + e^{-ik(ux+vy+\alpha+\beta)} + e^{ik(-vx+uy-\alpha+\beta)} + e^{-ik(-vx+uy+\alpha+\beta)}\right],$$ где $u = \cos\varphi + \sin\varphi$, $v = \cos\varphi - \sin\varphi$.

Для этой функции рассматривается 5-точечный разностный оператор

$$\nabla^2 z = -\frac{4}{d^2}[z - \bar{z}] = -\frac{4}{d^2}(1 - \lambda)z, \qquad (1)$$

где $d = \text{const}$, $\bar{z} = \frac{1}{4}[z(x + d, y) + z(x - d, y) + z(x, y + d) + z(x, y - d)] = \lambda z$. Приводится таблица экстремальных значений λ для $\varphi = 0°$ и $\varphi = 45°$ для различных значений z. Вычисляется отношение $R(d, \varphi)$ между $\nabla^2 z$, данным формулой (1), и его точным значением: $R(d, \varphi) = L^2(1 - \Delta)/2\pi^2 d^2$, и приводятся значения этого отношения для $\varphi = 0°$ и $\varphi = 45°$ для различных значений L.

Аналогичные рассуждения с соответствующими результатами приведены для случаев 7-точечного и 9-точечного разностных операторов.

Рассматриваются некоторые свойства операторов и отношений $R(d, \varphi)$.

Д. Ф. Давиденко

7182. О приближенном вычислении функции тока Стокса. Гринспан (On the numerical evaluation of the Stokes, stream function. Greenspan Donald), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, 11, № 59, 150—160 (англ.)

Приводится оценка погрешности при решении методом сеток задачи Дирихле для уравнения

$$u_{xx} - \frac{1}{y}u_y + u_{yy} = 0 \qquad (1)$$

в области G, не содержащей точек $y = 0$.

Для случая простейшего 5-точечного разностного оператора автор доказывает единственность решения системы разностных уравнений при $|n/y| < 1$ и получает, пользуясь известными идеями С. А. Гершгорина, следующую формулу:

$$|u - v| \leqslant 2hM_1 + \frac{r^2}{4}\left[\frac{h^2 M_3}{3!\,\bar{y}} + \frac{h^2 M_4}{3!} + \frac{h^4 M_5}{2\cdot 4!\,\bar{y}}\right],$$

где u — точное решение задачи, v — приближенное решение, r — радиус окружности, охватывающей область G, $\bar{y}$ — минимальное значение y в G.

$$M_i = \max_G\left[\max_G\left|\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|, \max_G\left|\frac{\partial^i u}{\partial y^i}\right|\right] (i = 1, 4),$$

$$M_j = \max_G\left|\frac{\partial^j u}{\partial y^j}\right| (j = 3, 5).$$

Приводится более общий 5-точечный разностный оператор для уравнения (1), содержащий некоторые параметры $\varepsilon_i(h)$, который при некоторых значениях этих параметров переходит в простейший. Получено разностное уравнение для определения значений искомой

функции в центре произвольного квадрата сетки по известным значениям ее в вершинах этого квадрата.

Отмечается, что развитые автором идеи могут быть использованы для оценки численного решения уравнения $u_{xx} + \frac{k}{y}u_y + u_{yy} = 0$, где k — фиксированная константа. Д. Ф. Давиденко

7183. Применение метода С. А. Чаплыгина к нахождению приближенного решения одного нелинейного уравнения параболического типа. Зерагия П. К., Сообщ. АН ГрузССР, 1957, 18, № 6, 647—654

Показана возможность применения метода Чаплыгина к решению следующей нелинейной задачи:

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x_1, x_2, x_3, t, u, p_1, p_2, p_3, q) \quad (1)$$

$$\left(p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i},\quad q = \frac{\partial u}{\partial t},\quad a_{ij} = a_{ji},\ \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}h_i h_j > 0\right.$$

$$\left.\text{при } \sum_{i=1}^{3} h_i^2 \neq 0\right),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),\quad x(x_1, x_2, x_3) \in D,$$

$$u(\varepsilon, t) = \psi(\varepsilon, t),\ \varepsilon \in S,\ 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (2)$$

Разыскивается решение $u(x, t)$ уравнения (1), непрерывное в замкнутой пространственной области D, ограниченной достаточно гладкой поверхностью S, $0 \leqslant t \leqslant T$, и удовлетворяющее условиям (2).

При некоторых предположениях $[f_u > 0,\ f_q > 0,$ $(h_0\partial/\partial u + \sum_{i=1}^{3} h_i\partial/\partial p_i + h_4\partial/\partial q)^2 f \leqslant 0]$ автор доказывает для данной задачи теоремы о неравенствах, аналогичные теоремам Чаплыгина (для краевой задачи).

Опираясь на эти теоремы, автор строит две последовательности соответственно верхних и нижних функций $\{w_n(x, t)\}$, $\{u_n(x, t)\}$, сходящиеся к искомому решению с обычной для метода Чаплыгина скоростью. Построение предполагает наличие начальной пары верхних и нижних функций. Вопрос о существовании и построении такой пары в работе не рассматривается. Б. Н. Бабкин

7184. Об устойчивости разностных схем для решения дифференциальных уравнений параболического типа. Юань Чжао-дин, Докл. АН СССР, 1957, 117, № 4, 578—581

Пусть Q — область плоскости (x, y) с границей Γ, Q_h — совокупность узлов квадратной сетки с шагом h, принадлежащих Q, Γ_h — совокупность узлов этой сетки, лежащих вне Q, расстояние которых до Q не больше h. Пусть $\Delta_h u = u_{\bar{x}x} + u_{\bar{y}y}$, где $u_x = \frac{1}{h}[u(x+h, y) - u(x, y)]$, $u_{\bar{x}} = \frac{1}{h}[u(x, y) - u(x-h, y)]$ и т. д.

Для $A \in Q_h$ и $B \in \Gamma_h$ рассматриваются формулы

$$u(t, A) = \tau\Delta_h u(t-\tau, A) + u(t-\tau, A),\ u(t, B) = 0; \quad (A)$$

$$u^{[k+1]}(t, A) = \frac{b + \tau\Delta_h}{b+1}u^{[k]}(t, A) + \frac{1}{b+1}u(t-\tau, A),$$

$$u^{[k+1]}(t, B) = 0, \quad (B(b)),$$

при помощи которых формулируются две новые устойчивые схемы решения первой граничной задачи для уравнения $\partial u/\partial t = \Delta u$.

Схема I_1: а) зная значения $u(t-\tau, A)$, находим значения $u(t, A)$ по схеме (A); б) принимая найденные значения как первое приближение, делаем одну итерацию по схеме $(B(\tau\Lambda - 1))$; в) на основе найденных значений делаем k итераций по схеме $(B(\frac{1}{2}\tau\Lambda))$.

Схема I_2: а) зная $u(t-2\tau, A)$, по схеме (A) считаем значения на слоях $t-\tau$ и t; б) используя найденные значения, выполняем 2 раза итерацию по $(B(\tau\Lambda - 1))$ для уточнения $u(t, A)$; в) по уточненным значениям выполняем еще $2k$ раз итерацию по $(B(\frac{1}{2}\tau\Lambda))$.

Здесь Λ — максимальное по модулю собственное значение оператора Δ_h; число k определяется в связи с условиями устойчивости.

При $\tau\Lambda \to +\infty$ объем вычислительной работы при применении схемы I_1 или I_2 по мнению автора, асимптотически сокращается соответственно в 4,3 или 4,7 раза по сравнению с обычной явной схемой (A). Эта экономия достигается за счет погашения влияния так называемых паразитических собственных значений оператора $\Delta_h u$, что приводит к возможности увеличения шага τ.

Отмечается, что эти результаты имеют силу во всех случаях, рассматриваемых в статье Л. А. Люстерника (Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1947, 20, 49), а также в случае общего самосопряженного оператора, причем подчеркивается, что сходимость схем I_1 и I_2 доказана для $n = 1, 2, 3, 4, 5$, где n — размерность многообразия пространственных координат. А. Д. Горбунов

7185. Простые решения уравнения диффузии (или теплопроводности). Джайн (Simple solutions of the partial differential equation for diffusion (or heat conduction. Jain S. C.), Proc. Roy. Soc., 1958, **A 243**, № 1234, 359—374 (англ.)

Рассматриваются приближенные решения уравнения диффузии

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{A}{D} = 0 \quad (A \text{ и } D \text{ — константы}) \quad (1)$$

с постоянной начальной концентрацией и нулевой концентрацией на границе.

Случай, когда $A = 0$, а начальные и граничные условия вида

$$c = c_i,\quad \text{для } a > x > 0 \text{ и } t = 0;$$

$$c = 0,\quad \text{для } x = 0,\ x = a \text{ и } t > 0,$$

изучается детально. Пусть $v = 1 - c/c_i$, а v_1 и v_2 — решения уравнения (1) для полубесконечных стержней $0 \leqslant x < \infty$ и $a \geqslant x > -\infty$, обращающиеся в нуль при $t = 0$ и принимающие значение единицы на их концах ($x = 0$ и $x = a$). Тогда

$$v_1 = \operatorname{erfc}\frac{1}{2\sqrt{\tau_x}},\quad v_2 = \operatorname{erfc}\frac{1}{2\sqrt{\tau_{a-x}}},$$

где

$$\operatorname{erfc} u = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-\xi^2}d\xi \text{ и } \tau_r = \frac{Dt}{r^2}.$$

Решение $v = v_1 + v_2$ при $t = 0$ равно нулю. Если же $x = 0$ или $x = a$, то $v = 1 + \operatorname{erfc}\frac{1}{2\sqrt{\tau_a}}$. При $\operatorname{erfc}\frac{1}{2\sqrt{\tau_a}} \ll 1$, $c = c_i(1 - v)$ будет приближенным решением поставленной задачи. Указывается точность v в зависимости от параметра τ_a. Л. А. Янович

7186. Использование электронных вычислительных машин для решения задачи распространения тепла в нестационарном режиме. Браун (Utilisation de calculateurs électroniques pour résoudre les problèmes de transmission de la chaleur en régime variable. Brown Göst a), Chauff.-ventil.-condit., 1957, **33**, № 10, 11—16 (франц.)

Приводится конечно-разностная схема для решения задачи распространения тепла в наружной стене здания, когда внешняя температура изменяется периодически и, кроме того, стена подвергается солнечной радиации. Вычисление было полностью осуществлено на электронной вычислительной машине БЭСК.

Л. М. Голубева

7187. О соотношении между устойчивостью и сходимостью при численном решении линейных параболических и гиперболических дифференциальных уравнений. Дуглас (On the relation between stability and convergence in the numerical solution of linear parabolic and hyperbolic differential equations. Douglas Jim, Jr), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1956, 4, № 1, 20—37 (англ.)

Используется понятие устойчивости разностного уравнения, введенное Нейманом. Рассматриваются ранее известные разностные аналоги линейных параболических и гиперболических дифференциальных уравнений с коэффициентами, не зависящими от времени. Исследуется вопрос о взаимосвязи устойчивости и сходимости численного решения и показывается, что устойчивость подразумевает сходимость в среднем.

Н. К. Чухрукидзе

7188. О разностном методе решения нелинейной задачи Гурса. Будак Б. М., Горбунов А. Д., Докл. АН СССР, 1957, 117, № 4, 559—562

Рассматривается решение методом конечных разностей задачи Гурса $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$; $u(x, 0) = \varphi(x)$; $0 \leqslant x \leqslant l_x$; $u(0, y) = \psi(y)$; $0 \leqslant y \leqslant l_y$; $\varphi(0) = \psi(0)$ при произвольной правой части $f(x, y, u, u_x, u_y)$, непрерывной по совокупности всех аргументов в области задания $D: 0 \leqslant x \leqslant l_x$; $0 \leqslant y \leqslant l_x$; $|u - u^0| \leqslant l_u$; $|u_x - u_x^0| \leqslant l_{u_x}$; $|u_y - u_y^0| \leqslant l_{u_y}$ и достаточно гладкой по u, u_x, u_y при произвольных непрерывно дифференцируемых граничных функциях $\varphi(x)$, $\psi(y)$.

Устанавливается существование непрерывно дифференцируемого решения в случае, когда f удовлетворяет условию Липшица по u_x и u_y. Существование и единственность решения устанавливаются в случае, когда условие Липшица выполнено и по u. Дается априорная оценка погрешности через шаги по x и y и через максимумы модулей заданных функций, их производных первого порядка и константы Липшица при условии, что f, $\varphi'(x)$ и $\psi'(y)$ удовлетворяют условию Липшица по всем их аргументам.

Все полученные результаты распространяются на систему уравнений в m-мерном пространстве.

Н. А. Гречина

7189. Метод сеток для уравнений типа С. Л. Соболева. Лебедев В. И., Докл. АН СССР, 1957, 114, № 6, 1166—1169

В цилиндрической области $Q = \Omega \times [0, l]$ пространства (x, t), где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} L_0 u + \frac{\partial}{\partial t} L_1 u + L_2 u = f(x, t) \qquad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad u|_S = 0, \qquad (2)$$

где S — граница области Ω пространства x-ов, L_1, L_2 — линейные дифференциальные операторы (относительно $x_1, \ldots, x_n$) второго порядка с коэффициентами, зависящими от x,

$$L_0 u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ii} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0 u,$$

причем $-\sum_{i,j} A_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j \geqslant \alpha \sum_i \varepsilon_i^2$, $\alpha = \text{const} > 0$, $a_0 \geqslant 0$.

Доказывается сходимость решения разностного аналога задачи (1), (2) к обобщенному решению этой задачи и исследуются дифференциальные свойства обобщенного решения. Использованный метод во многом совпадает с методом гл. III книги О. А. Ладыженской (РЖМат, 1955, 3774 К).

А. Ф. Филиппов

7190. Предвычисление карты АТ-700 на электронной цифровой машине «Стрела». Биркган А. Ю., Любимов А. Н., Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1958, № 1, 93—104

Описан опыт программирования и оперативного решения на универсальной счетной машине «Стрела» одной из задач динамической метеорологии — задачи о предвычислении давления на некотором избранном, «среднем» уровне атмосферы. Основное уравнение задачи — нелинейное уравнение переноса вихря — имеет вид:

$$\Delta \partial z/\partial t = -A; \qquad (1)$$

здесь $z(x, y, t)$ — искомая функция, начальное значение которой $z(x, y, 0)$ задано в прямоугольной области;

$$A = \frac{g}{l}(z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{g}{l}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \Delta z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \Delta z}{\partial x}\right) + \beta \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

x, y, t — независимые переменные; параметры g, l, β считаются постоянными. На границах области принято условие: $\partial z/\partial t = 0$.

При построении расчетного алгоритма авторы использовали один из известных вариантов численного решения задачи. Именно: интервал интегрирования по времени t (т. е. срок прогноза) был разбит на ряд промежутков (шагов) δt. Значение искомой функции $z(x, y, t)$ в конце каждого шага определяется по формуле

$$z^{(t+\delta t)} = z^{(t)} + (\partial z/\partial t)^{(t)} \delta t, \qquad (2)$$

причем величина $(\partial z/\partial t^{(t)}$ в начале соответствующего шага находится как решение уравнения Пуассона (1), правая часть которого является нелинейной комбинацией функции z и ее производных по x и y, относящихся к тому же моменту t. Для того чтобы при расчете величины $A(x, y)$ на каждом шаге обойти вычисление производных высокого порядка численным дифференцированием, вводится вспомогательная функция $B(x, y, t) = \Delta z + kz$, так что $A = g/l(z, B) + \beta \partial z/\partial x$. Начальное значение функции B находится по ее определению, а значение B в последующие моменты — по формуле типа (2), причем

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \Delta \frac{\partial z}{\partial t} + k \frac{\partial z}{\partial t} = -A + k \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Рассмотрены особенности программирования решения этой задачи на машине «Стрела» в целях ежедневного составления прогноза (в частности, представление чисел, обеспечивающее экономию времени при перфорации начальных данных и при выдаче результатов). Приводится составленная авторами программа, а также даны основные сведения по программированию и

решению задач на машине «Стрела». Эти сведения облегчают понимание программы. Приводится один из примеров прогноза, рассчитанных по этой программе.
С. Л. Белоусов

7191. Приближенный метод интегрирования уравнений нестационарного ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Розин Л. А., Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 5, 615—623

Дано приближенное решение уравнений плоского нестационарного ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости при отсутствии объемных сил; в решении используется известное интегральное соотношение (уравнение импульсов). Предполагается, что профили скоростей в сечениях пограничного слоя представляют однопараметрические семейства линий. Найденное решение уравнений обобщает решение аналогичной задачи в случае стационарного пограничного слоя. Приведены примеры, иллюстрирующие применение предложенного метода. В. П. Пилатовский

7192. Расчет некоторых звуковых течений газа. Чушкин П. И., Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 3, 353—360

Излагается способ приближенного решения задачи обтекания эллипса плоскопараллельным потоком газа со скоростью звука на бесконечности и приводятся численные результаты. Вычисления основаны на методе, предложенном А. А. Дородницыным (РЖМат, 1956, 9104).

В отличие от цитируемой автором работы референта и других работ, ставится прямая задача, т. е. рассматривается обтекание заданного криволинейного контура. Задача ставится в связи с этим не в плоскости годографа, а в физической плоскости. При этом применяются ортогональные координатные линии такие, что одной из них является обтекаемый контур. В данном случае это ортогональные друг другу эллипсы и гиперболы $\varepsilon=\text{const}$ и $\eta=\text{const}$. Выбираются N линии $\eta=\eta_n(\varepsilon)$, причем $\eta=\eta_1(\varepsilon)$ есть предельная линия возмущений, а на них ищутся компоненты скорости u_n, v_n в данной ортогональной системе. Получается система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, которые решаются численно. Вычисления были выполнены на электронной счетной машине БЭСМ АН СССР. Начальные условия для v_n на обтекаемом контуре подбирались по краевым условиям на бесконечности ($v_n=0$). Результаты получены удовлетворительные.

Указаны также способы решения задачи в случае обтекания произвольных контуров плоскопараллельным потоком и в случае обтекания эллипсоида вращения.
Ф. И. Франкль

7193. Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений. Соболев (Citeva observaţii asupra rezolvării numerice a ecuatiilor integrale. Sobolev S. L.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.— fiz., 1957, 11, № 4, 6—30 (рум.)

Перевод с русского (РЖМат, 1957, 6694).

7194. О методе Бейтмана для решения линейных интегральных уравнений. Томпсон (On Bateman's method for solving linear integral equations. Thompson Gene Thomas), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, 4, № 3, 315—328 (англ.)

Дается описание известного метода Бейтмана для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$x(s)-\lambda\int_0^1 K(s,\ t)\,x(t)\,dt=y(s)\ \ (0\leqslant s\leqslant 1).$$

Автор выводит оценку погрешности, которая возникает при аппроксимации ядра $K(s,\ t)$ вырожденным ядром по методу Бейтмана, и улучшает полученный результат для случая, когда ядро интегрального уравнения есть функция Грина для однородного самосопряженного дифференциального оператора

$$L(u)=(pu')'-qu,$$

где p, p', q — непрерывные функции и $p(s)>0$. Приводится числовой пример. А. Е. Божанова

7195. О формулировке и анализе численных методов для нестационарных уравнений переноса. Келлер, Уэндрофф (On the formulation and analysis of numerical methods for time dependent transport equations. Keller H. B., Wendroff B.), Communs Pure and Appl. Math., 1957, 10, № 4, 567—582 (англ.)

Приводится ряд схем численного решения стационарного уравнения переноса для сферы радиуса R в предположении, что скорость частиц v постоянна. Математическая задача сводится к линейному интегро-дифференциальному уравнению вида

$$\left\{\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}+\mu\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1-\mu^2}{r}\frac{\partial}{\partial\mu}+\sigma(r)\right\}\Phi(t,r,\mu)=$$
$$=\int_{-1}^{1}A(r;\ \mu,\mu')\,\Phi(t,r,\mu')\,d\mu'+g(t,r,\mu)\qquad(1)$$

с граничными условиями:

$$\Phi(t,\ R,\ \mu)=0,\ -1\leqslant\mu\leqslant 0;\ \Phi(t,\ 0,\ \mu)=\Phi(t,0,-\mu);\ -1\leqslant\mu\leqslant 1$$

и начальным условием

$$\Phi(0,\ r,\ \mu)=\Phi^0(r,\mu).$$

Интервал изменения μ, $-1\leqslant\mu\leqslant 1$, делится на I интервалов равной длины $\Delta\mu=2I^{-1}$ точками $\mu_j=-1+j\Delta\mu$, $0\leqslant j\leqslant I$. Аппроксимируя тем или иным способом искомую функцию $\Phi(t,\ r,\ \mu)$ в (1) на элементарном интервале изменения μ, авторы, следуя Карлсону (см., например, обзорный доклад Окрент Д., Эвери Р., Хуммел Х. Обзор теоретических и экспериментальных основ физики реакторов на быстрых нейтронах. Экспериментальные реакторы и физика реакторов, Гостехиздат, 1956, стр. 323—364), получают различные системы уравнений гиперболического типа относительно функций $\Phi_j(t,\ r)=\Phi(t,\ r,\ \mu_j)$. Простейшая из них (но не самая точная имеет вид:

$$\left\{\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}+a_j\right\}(\Phi_j+\Phi_{j-1})+\left(\sigma+\frac{b_j}{r}\right)\Phi_j+$$
$$+\left(\sigma-\frac{b_j}{r}\right)\Phi_{j-1}=S_j+S_{j-1},\ 1\leqslant j\leqslant I,\qquad(2)$$

где

$$a_j=\frac{1}{2}(\mu_j+\mu_{j-1}),\ \ b_j=\frac{2}{\Delta\mu}\left[1-\left(\frac{\mu_j+\mu_{j-1}}{2}\right)^2\right],$$
$$S_j(t,\ r)=g_j(t,\ r)+\sum_{i=0}^{I}\alpha_{ji}(r)\,\Phi_j(t,\ r).$$

К системе (2) присоединяются соответствующие граничные и начальное условия.

Система уравнений (2) приближенно интегрируется по характеристикам. Для этого интервалы изменения r, $[0,\ R]$, и t, $[0,\ T]$ разбиваются соответственно точками

$$r_k=k\Delta r,\ 0\leqslant k\leqslant K\ \text{и}\ t_n=n\Delta t,\qquad \Delta t=T/N.$$

Значения функций Φ_j снесятся с узлов сетки на соот-

ветствующие (ближайшие) точки на характеристиках с помощью простейших интерполяционных формул.

Для решения полученной системы разностных уравнений предлагается метод последовательных приближений. В основе применения этого метода лежит тот факт, что в случае $A \equiv 0$ эта система может быть приведена к треугольному виду. Сходимость последовательных приближений доказана при следующих соотношениях шагов:

$$\Delta t < \frac{2}{A(v-x)}\left[\left(\frac{2v}{x}-1\right)^{I+1}-1\right]^{-1},\quad 0<\frac{x}{v}\leqslant I^{-1}.$$

$$\Delta t < \frac{2}{IA(v-x)}\left[\left(\frac{2v}{x}-1\right)^{I+1}-1\right]^{-1},\quad I^{-1}\leqslant\frac{x}{v}\leqslant I^{-1/2},$$

$$\Delta t < \frac{2}{A(Ix-v)}\left[\left(I\frac{2x}{v}-1\right)^{I+1}-1\right]^{-1},\quad I^{-1/2}\leqslant\frac{x}{v},$$

где $x = \dfrac{\Delta r}{\Delta t}$, $A = \max A(r; \mu, \mu')$.

Доказывается, что при фиксированном I и при $\Delta t \to 0$ и $\Delta r \to 0$ (независимо от x) решение системы разностных уравнений равномерно стремится к решению системы (2) со скоростью $O(\Delta r) + O(\Delta t)$ в предположении, что функции Φ_j имеют вторые непрерывные производные. Доказательство проводится не для сферы, а для сферического кольца $\varepsilon \leqslant r \leqslant R$.

Указывается, что при фиксированном I схема устойчива по отношению к ошибкам округления.

В. С. Владимиров

7196. Метод наискорейшего спуска. Розенблум (The method of steepest descent. Rosenbloom P. C.), Proc. Sympos. Appl. Math., 6, New York — Toronto — London, 1956, 127—176 (англ.)

Известно, что решение функционального уравнения $Bu = z$ с положительным оператором B может быть найдено путем минимизации функционала $F(u) = (Bu, u) - 2(u, z)$, в частности путем построения минимизирующей последовательности для этого функционала. Одним из методов построения минимизирующей последовательности является метод наискорейшего спуска, который сводится к нахождению в каждой точке функционального пространства единственного направления, в котором функционал убывает наиболее быстро.

Пусть $f(x)$ принадлежит классу C^2 в вещественном гильбертовом пространстве H. Путь наискорейшего спуска определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)),\quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $\nabla f(x)$ — градиент f. Решение этого уравнения $x(t) = T_t x_0$ есть результат применения к x_0 некоторых преобразований, образующих полугруппу $\{T_t\}$, $t \geqslant 0$. Доказывается теорема, дающая достаточные условия существования минимальной точки x_∞ в H для f, и получены оценки $\| x(t) - x_\infty \| \leqslant \| \nabla f(x_0) \| e^{-At} / A$, $0 \leqslant f(x(t)) - f(x_\infty) \leqslant \| \nabla f(x_0) \|^2 e^{-2At}/2A$. Упомянутое достаточное условие имеет вид $(H_f(x)\, y,\ y) \geqslant A \| y \|^2$ для всех $x \in H$, удовлетворяющих для $t > 0$ уравнению (1), $A > 0$, $Hf(x)$ — эрмитов оператор.

Приводятся достаточные условия для ряда конкретных задач. В частности, рассматривается функционал $f(y) = \int_0^1 F(x, y, y')\, dx$, где $y(x)$ — множество функций класса C^2 таких, что $y(0) = y(1) = 0$, $F(x, y, y') \in C^2$ для $x \in [0, 1]$, $y, y' \in (-\infty, \infty)$. Если скалярное произведение определяется формулой $(y, z) = \int_0^1 y'z'dx$, то путь наискорейшего спуска определяется некоторым интегро-дифференциальным уравнением, а достаточное условие существования минимального элемента имеет вид

$$\int_0^1 \{F_{yy}(x, y(x), y'(x))\, z^2 + 2F_{yy'}(x, y(x), y'(x))\, zz' +$$

$$+ F_{y'y'}(x, y(x), y'(x))\, (z')^2\}\, dx \geqslant A\int_0^1 (z')^2\, dx,\quad A > 0.$$

Если скалярное произведение берется в виде $(y, z) = \int_0^1 yzdx$, то путь наискорейшего спуска удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных параболического типа с начальными и граничными условиями. Достаточное условие имеет вид

$$\int_0^1 \{F_{yy}z^2 + 2F_{yy'}\, zz' + F_{y'y'}(z')^2\}dx \geqslant A\int_0^1 z^2dx,\quad A > 0.$$

В качестве второго примера взят функционал $f(u) = \int_D F(x, y, u, u_x, u_y)\, dxdy$, где D — ограниченная область в плоскости x, y с границей C, имеющей непрерывно меняющуюся касательную; $\{u(x, y)\}$ — последовательность функций класса C^2, определенных в $\bar{D}$. Если $(u, v) = \int_D \{uv + u_x v_x + u_y v_y\}\, dA$, то уравнение наискорейшего спуска есть интегро-дифференциальное уравнение, а достаточное условие имеет вид

$$\int_D \{F_{uu}v^2 + 2F_{up}vv_x + 2F_{uq}vv_y + F_{pp}v_x^2 + 2F_{pq}v_x v_y +$$

$$+ F_{qq}v_y^2\}\, dA \geqslant A \| v \|^2,\quad A > 0,\quad u_x = p,\ u_y = q. \tag{2}$$

Рассматривается также функционал $f(u)$, где последовательность $\{u\}$ такая, что $u = 0$, на C. Скалярное произведение определяется при этом формулой

$$(u, v) = \int_D (u_x v_x + u_y v_y)\, dA, \tag{3}$$

а достаточное условие имеет вид (2), где норма v определяется интегралом Дирихле. Если $(u, v) = \int_D uv\ dA$, то путь наискорейшего спуска определяется квазилинейным уравнением параболического типа $u_t = \dfrac{\partial}{\partial x}F_p + \dfrac{\partial}{\partial y}F_q - F_u$ ($u = 0$ на C), а достаточное условие имеет вид (2) с нормой, определяемой согласно (3), причем $A = (C - M)\lambda_1 - 2M > 0$, где $F_{uu} \geqslant -M$, $|F_{up}|, |F_{uq}| \leqslant M$, $C > 5M/\lambda_1$, λ_1 — наименьшее собственное значение оператора Лапласа.

Рассматривается также вопрос о существовании решения уравнения (1) для $t \geqslant 0$. Если ∇f удовлетворяет условию Липшица на сфере $\| y - y_0 \| \leqslant \nabla f(y_0) \| / A$, то применима известная теорема существования для обыкновенных дифференциальных уравнений. Если $2f(y) = (By, y) - 2(z, y)$, где $z \in H$ и B — эрмитов оператор, то уравнение (1) принимает вид $dy/dt = z - By$, и решение его существует для неотрицательного B.

Исследуется детально так называемый параметрический метод для построения полугрупп преобразований

$\{T_t\}$, который приводит обычно к интегральным уравнениям типа Фредгольма с сингулярным ядром. Дается применение этого метода к решению линейных задач и к широкому классу квазилинейных параболических уравнений.

Рассматривается также применение метода наискорейшего спуска к изопериметрическим задачам. В этом случае путь наискорейшего спуска определяется уравнением $du/dt = -\nabla f + \lambda \nabla g$, где $f,\ g \in C^2$, $\lambda = \lambda(u) = (\nabla f, \nabla g)/\|\nabla g\|^2$. Устанавливается теорема, дающая достаточное условие существования минимального элемента, которое в этом случае имеет вид $((H_f(u) - \lambda(u) H_g(u))v, v) \geqslant A\|v\|^2$, $A>0$, для u и v таких, что $g(u) = 0$, $(\nabla g(u), v) = 0$, $g(u_0) = 0$, где $u_0 = u(0)$.

Г. И. Бирюк

7197. Формулы механических кубатур с неотрицательными коэффициентами. Чакалов (Formules de cubatures mécaniques á coefficients non négatifs. Tchakaloff Vladimir), Bull. sci. math., 1957, **81**, № 3, 123—134 (франц.)

Рассматриваются кубатурные формулы

$$\iint_F x(u_1, u_2, \ldots, u_p)\, d\omega = \sum_{k=1}^{N} a_k x(u_{1k}, u_{2k}, \ldots, u_{pk}) \quad (1)$$

с неотрицательными коэффициентами a_k, точные для полиномов

$$x(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \sum_{i+j+\ldots+k \leqslant n} A_{i,j,\ldots,k}\, u_1^i u_2^j \ldots u_p^k,$$

где F — ограниченное, замкнутое множество точек p-мерного евклидова пространства положительной меры, содержащее узлы $(u_{1k}, u_{2k}, \ldots, u_{pk})$, а $N = \binom{n+p}{p}$.

Для случая $p = 2$ дается доказательство существования формулы (1). Автор использует результаты, полученные М. Г. Крейном и П. Г. Рехтманом (РЖМат, 1956, 1256) для разложения линейного функционала $\iint_F x(u, v)\, d\omega$ на пространстве полиномов степени не выше n от переменных u и v в сумму вида (1). Показано, что в формуле (1) число членов суммы не может быть, вообще говоря, уменьшенно. Нет указаний на способ нахождения узлов (u_k, v_k).

Л. А. Янович

7198. Численное интегрирование по плоскому кольцу. Пирс (Numerical integration over the planar annulus. Peirce William H.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1957, 5, № 2, 66—73 (англ.)

Для получения квадратурных формул вида

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy \simeq \sum_i \sum_j D_{ij} f(x_i, y_j) \quad (1)$$

по плоскому кольцу с внешним радиусом единица и внутренним R, точности k, автор преобразует интеграл к полярным координатам. Тогда ищется квадратурная формула для интеграла

$$\int_R^1 \int_0^{2\pi} rF(r, \theta)\, d\theta dr \simeq \sum_i \sum_j D_{ij} F(r_j, \theta_i), \quad (2)$$

где $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Если узлы квадратурной формулы располагать на концентрических окружностях радиусов r_j и лучах, выходящих из начала θ_i, и потребовать, чтобы формула (2) имела точность $k = 4m + 3$ при минимальном количестве узлов, то необходимым и достаточным условием для этого, как доказывает автор, является следующее: 1) $\theta = 2\pi i/(k+1)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, k+1$; 2) r^2 является $m+1$ нулем полинома Лежандра $P_{m+1}(r^2)$ (степени $m+1$ относительно r^2) из системы полиномов Лежандра, ортогональных на отрезке $R^2 \leqslant r^2 \leqslant 1$. При этом веса D_{ij} определяются единственным образом и равны $D_{ij} = A_i B_j$, где

$$A_i = \frac{2\pi}{k+1},\quad B_j = \frac{1}{2P'_{m+1}(r_j^2)} \int_{R^2}^{1} \frac{P_{m+1}(r^2)}{r^2 - r_j^2}\, dr^2. \quad (3)$$

Из формул (3) следует, что все веса положительные. Так определенная формула содержит $4(m+1)^2$ узлов. Так как узлы располагаются специальным образом, формула не является, вообще говоря, наилучшей.

В заключение приводятся формулы для $k = 7$ и $k = 15$, содержащие 16 и 64 точки соответственно. Погрешность квадратурных формул иллюстрируется сравнением значений интегралов, вычисленных по этим двум формулам для девяти различных функций.

А. Н. Иванова

7199. Расчет электромагнитного поля осциллятора над двухслойной средой. Козулин Ю. Н., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1957, **29**, 175—181

При помощи квадратурных формул (в частности, формулы Гаусса) вычисляются интегралы вида

$$T_\mu(p,\tau) = \int_0^{\infty e^{-i\arg p}} J_0(p\lambda) \frac{(\sqrt{1+\lambda^2} - \lambda)^\mu}{\sqrt{1+\lambda^2}} e^{-z\lambda}\, d\lambda.$$

В. К. Саульев

7200. Решение системы линейных алгебраических уравнений посредством последовательных приращений неизвестных. Новый метод вычислений. Ди Берардино (Risolizione dei sistemi di equazioni algebriche lineari per incrementi successivi delle incognite. Nuovo metodo di calcolo. Di Berardino Vincenzo), Riv. catasto e serv. tecn. erariali, 1956, **11**, № 5—6, 334—338 (итал.)

Излагаемый метод представляет собою дальнейшее развитие известного метода Зейделя решения системы линейных алгебраических уравнений методом итераций.

М. С. Горнштейн

7201. Новый способ решения частного вида систем линейных алгебраических уравнений — «цепочных» систем. Ди-Берардино, Джирарделли (Nuovo metodo di risoluzione di particolari sistemi di equazioni algebriche lineari. Sistemi a catena. Di Berardino Vincenzo, Girardelli Lamberto), Riv. catasto e serv. tecn. erariali, 1957, **12**, № 1, 46—50 (итал.)

Выводятся формулы, дающие точное решение системы $X = AX + N$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение получается в 2 этапа: а) прямой ход, дающий промежуточные значения неизвестных:

$$x'_m = n_m(N_m - a_{mm-1} x'_{m-1}),\quad n_m = \frac{1}{1 + a_{mm-1} r_{m-1}},$$

$$r_m = -n_m a_{mm+1},\quad r_0 = 0,$$

и б) обратный ход, дающий точное решение:

$$x_m = x'_m + r_m x_{m+1},\quad x_n = x'_n.$$

В. Н. Кублановская

7202. Вычисление собственных значений полиномной матрицы. Натанзон В. Я., Прикл. матем. и механ. 1957, 21, № 3, 445—448

Известный метод определения корней полинома, основанный на определении полюсов обратной функции, автор применяет к определению корней векового уравнения $D(\lambda) \equiv |A(\lambda)| = 0$ полиномной матрицы $A = E - \lambda A_1 - \lambda^2 A_2 - \ldots - \lambda^\nu A_\nu$.

Из уравнения

$$AX = Y \qquad (1)$$

($X = \{x_i\}$ — неизвестный вектор, Y — произвольно выбранный вектор) имеем:

$$x_i(\lambda) = \frac{D_i(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{k=0}^{\infty} q_{ik}\lambda^k . \qquad (2)$$

Тогда $\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} q_{in}/q_{in+1}$ при любом i, где λ_1^{-1} — наибольшее по модулю вещественное собственное число A. Для определения коэффициентов q_{ik} автор выводит из (1) и (2) рекуррентные соотношения.

В. Н. Кублановская

7203. Случайные округления и сходимость линейного метода итераций (Зейделя). Фабиан (Zufälliges Abrunden und die Konvergenz des linearen (Seidelschen) Iterationsverfahrens. Fabian Vaclav), Math. Nachr., 1957, 16, № 5-6, 265—270 (нем.)

При решении системы линейных алгебраических уравнений

$$x = Ax + y \qquad (1)$$

($A^k \to 0$ при $k \to \infty$) методом итераций вместо k-й итерации x_k фактически, в силу погрешностей округлений, получается несколько отличная величина ξ_k. Если использовать округления по закону: число y с вероятностью $1-(y-[y])$ (предполагается, что округление совершается до целых чисел) округляется до $[y]$ и с вероятностью $y-[y]$ — до $[y]+1$, то, как доказывает автор, последовательность $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\xi_k$ сходится к решению системы (1). Можно построить такой пример, когда при обычном округлении последовательность $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k}\xi_k$ не сходится к решению системы (1).

В. К. Саульев

7204. Решение системы линейных уравнений методом наименьших квадратов в случае, когда коэффициенты подвержены ошибкам специального вида. Маккензи (A least squares solution of linear equations with coefficients subject to a special type of error. Mackenzie J. K.), Austral. J. Phys., 1957, 10, № 1, 103—109 (англ.)

Для решения системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{s}(a_{rk} + e_r b_{rk})\,x_k = e_r \qquad (r = 1, \ldots, n \geqslant s),$$

где a_{rk}, b_{rk} — постоянные, а e_r — наблюденные значения, подверженные случайным ошибкам, автор применяет метод наименьших квадратов, известный для случая $b_{rk} = 0$. Решение дается в виде ряда по последовательным моментам совместного распределения e_r, сходящегося при некоторых предположениях почти для всех последовательностей e_r при $n \to \infty$. В разложении отбрасываются члены, содержащие моменты распределения выше второго. В таком приближении отмечается известная аналогия с классическим случаем. В отличие от случая $b_{rk} = 0$ не показано, что предлагаемая автором весовая матрица является наилучшей в каком-либо смысле, а также не выяснена связь между полученным решением и решением по методу максимального правдоподобия, например для случая нормально распределенных ошибок наблюдений.

А. П. Хусу

7205. Применение матрицы коэффициентов веса и корреляции в решении задач непрямых наблюдений. Джери (Limpiego della matrice dei coefficienti di peso e correlazione nella soluzione del problema delle osservazioni indirette con l'aggiunta di nuove equazioni generate. Geri Gero), Boll. geod. e sci. affini, 1956, 15, № 3, 277—286 (итал.; рез. англ., франц.)

Классическое решение задачи непрямых наблюдений сводится к решению системы n линейных уравнений

$$Az + P = v \qquad (1)$$

(A — матрица $n \times g$, P и v — векторы из n компонент, z — неизвестный вектор из g компонент), где неизвестные z связаны q условиями:

$$Mz + M_0 = 0 \qquad (2)$$

(M — матрица $q \times g$, M_0 — вектор из q компонент).

Записывая задачу (1), (2) в матричной форме и используя при обращении матриц клеточное разбиение (метод Больца), в частности метод окаймления, автор показывает, как применить результаты решения исходной задачи к решению задачи, полученной присоединением к (1) и (2) новых уравнений условия и связей.

В. Н. Кублановская

7206. Видоизменение релаксационного метода. Панц (Upravená relaxační methoda. Panc Vladimír), Aplikace mat., 1957, 2, № 3, 184—201 (чешск.; рез. русск., нем.)

В релаксационный процесс Саусвелла вносятся некоторые табличные видоизменения, сокращающие число вычислительных операций и промежуточных записей. Для ускорения релаксационного процесса дается описание двух приемов. Приведены иллюстрирующие примеры и таблицы.

В. Н. Кублановская

7207. Применение матричного исчисления к экономическим расчетам. Часть 1. Пихлер (Anwendung der Matrizenrechnung im industriellen Rechnungswesen. Teil 1. Pichler O.), MTW-Mitt., 1957, 4, № 6, 362—370 (нем.)

Первая из серии статей, в которых показывается возможность использования элементов матричного исчисления (в данной статье — самого понятия матрицы) для исследования (в статье — для записи) экономических результатов деятельности предприятия.

М. Л. Бродский

7208. О приближенном решении линейных однородных систем. Островский (Über näherungsweise Auflösung von Systemen homogener linearer Gleichungen. Ostrowski Alexander), Z. angew. Math. und Phys., 1957, 8, № 4, 280—285 (нем.; рез. англ.)

Трудности решения однородных линейных систем практически связаны с тем, что определитель системы не чистый нуль. Автор намечает общий метод получения таких приближенных решений и дает оценку произведенной ошибки. Вместо решения уравнения

$$S\zeta' = 0 \qquad (1)$$

с особенной матрицей $(n \times n)\,S$, ранга $n-k$, где $1 \leqslant k \leqslant n-1$, рассматривается решение

$$(A+S)\,\zeta' = \eta', \qquad (2)$$

где $|A+S| \neq 0$, $A = (a_{\mu\nu})$ — матрица $n \times n$ с элементами, стремящимися к 0, η' — постоянный вектор такой, что $S\zeta' = \eta'$ не имеет решения.

Доказывается: 1) Для вектора ζ — решения (2) — существует некоторый (переменный) вектор π — решение

уравнения (1) — такой, что

$$\zeta / |\zeta| = \pi + O\left(\sqrt{\Sigma_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu}|^2}\right);$$

2) Если $a_{\mu\nu}$ — аналитические функции параметра t, регулярные в $t=0$, то $\left(\frac{t}{|t|}\right)^j \pi = \tau + O(t)$, где j — натуральное число, τ — постоянный вектор решения уравнения (1) длины 1. В частности, если матрица A является скалярной относительно t, где t — ошибка рассматриваемого собственного значения, то ошибка определяемого собственного вектора будет того же порядка, что и ошибка собственного значения.

В. Н. Кублановская

7209. Методы решения общих уравнений стационарного режима электрической системы с учетом статических характеристик нагрузок и генераторов при автоматическом регулировании частоты, напряжения и мощности. К р у м м Л. А., Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1957, А, № 124, 20 стр. (рез. англ.)

Параметры стационарного режима электрической системы являются неизвестными системы нелинейных уравнений. Автор приходит к выводу, что для решения этих уравнений наиболее подходит метод Ньютона — Рафсона. Тот же метод можно применить и для определения изменений стационарного режима при любых возмущениях симметричного характера. При больших возмущениях рекомендуется пользоваться методом последовательных интервалов, сущность которого состоит в том, что данное большое возмущение заменяется рядом небольших возмущений, следующих одно за другим, таких, что при каждом из них сходимость процесса последовательных приближений Ньютона — Рафсона обеспечивается практически одним приближением. Метод последовательных интервалов можно применять и к определению параметров стационарного режима, если процесс последовательных приближений Ньютона — Рафсона сходится недостаточно быстро.

Л. М. Голубева

7210. Численное решение алгебраических уравнений методом Бернулли-Уиттекера. Ф и д л е р (Numerické řešení algebraických rovnic Bernoulli-Whittakerovou methodou. F i e d l e r M i r o s l a v), Aplikace mat., 1957, **2**, № 4, 321—326 (чешск.)

Рассматривается алгебраическое уравнение n-й степени, которое записывается в виде

$$x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n. \qquad (1)$$

При помощи реккурентной формулы

$$u_m = a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2} + \ldots + a_n u_{m-n}$$
$$(u_0 = 1,\ u_{-1} = u_{-2} = \ldots = u_{n+1} = 0)$$

определяются числа u_m $(m \geqslant 1)$.

Случай 1. Уравнение (1) имеет один корень с наибольшей абсолютной величиной; тогда его приближенное значение найдется из уравнения $\begin{vmatrix} x & 1 \\ u_r & u_{r-1} \end{vmatrix} = 0$ при достаточно большом r.

Случай 2. Уравнение (1) имеет два корня с наибольшей абсолютной величиной. Их приближенные значения найдутся из уравнения

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ u_{r+1} & u_r & u_{r-1} \\ u_{r+2} & u_{r+1} & u_r \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Чтобы узнать, какой случай имеет место, вычисляем u_k до $k=20$ и находим частные $q_r = \frac{u_r}{u_{r-1}}$ для $r=16,\ldots,20$. Если числа $q_{16},\ldots,q_{20}$ мало отличаются друг от друга (2—3%), то это свидетельствует о том, что наступил случай 1, и принимаем q_{20} за приближенное значение корня. Если же числа $q_{16},\ldots,q_{20}$ сильно разнятся друг от друга (до 10%), то вычисляем для $r=15,\ldots,19$ определители $\Delta_r = \begin{vmatrix} u_r & u_{r-1} \\ u_{r+1} & u_r \end{vmatrix}$ и для $r=16,\ldots,19$ частные $Q_r = \Delta_r : \Delta_{r-1}$. Если числа $Q_{16},\ldots,Q_{19}$ близки друг к другу, то из этого следует, что уравнение (1) имеет два корня с наибольшей абсолютной величиной, и приближенные значения этих корней найдутся из уравнения (2) при $r=18$.

Чтобы найти остальные корни, мы делим левую часть уравнения (1) на $x - q_{20}$ в первом случае и на левую часть уравнения (2) во втором случае, причем пренебрегаем остатками. Получим уравнение $(n-1)$-й степени или $(n-2)$-й степени, с которым поступаем так же, как с первоначальным уравнением (если степень его больше двух).

Возможно, конечно, что и числа $Q_{16},\ldots,Q_{19}$ сильно разнятся друг от друга. Это означает, что уравнение (1) имеет больше двух корней с одинаковой абсолютной величиной. Чтобы найти их приближенные значения, придется решить уравнение степени >2.

Приводится пример уравнения 4-й степени, которое имеет один корень с наибольшей абсолютной величиной, а уравнение 3-й степени, которое получается для вычисления остальных корней, имеет два корня с наибольшей абсолютной величиной.

М. С. Горнштейн

7211. Извлечение квадратного корня при помощи вычислительной машины. З а н д е н (Quadratwurzel mit der Rechenmaschine. S a n d e n H. v.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, **38**, № 1—2, 71 (англ.)

Обсуждаются некоторые вопросы вычисления $x = \sqrt{a}$ при помощи итерационной формулы $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ на вычислительной машине.

7212. Об одном способе приближенного решения алгебраического уравнения. Л а р и о н о в Б. А., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 21, 71—74

Уравнение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k x^{n-k} = 0 \qquad (1)$$

подстановкой $x = (a + bv)/(1 + v)$ приводится к уравнению

$$f(v) = \sum_{k=0}^{n} Q_k v^{n-k} = 0, \qquad (2)$$

причем Q_k не зависят от v. Изучаются свойства подстановки, устанавливается связь между корнями первого уравнения и второго. Далее указывается процесс приближенного вычисления действительных положительных корней второго уравнения, где в подстановке положено $a=0$ и b — верхний предел положительных корней первого уравнения. Так, если v_1 есть верхний предел положительных корней уравнения (2), то новый верхний предел положительных корней уравнения (1) будет $b_1 = bv_1/(1+v_1)$ и этот новый предел можно использовать так же, как b, чтобы найти v_2. После повторения этого процесса m раз, получается приближение b_m к наибольшему корню x уравнения (1) в виде $b_m = b \prod_{k=1}^{m} v_k (1 + v_k)$. Устанавливается сходимость,

дана оценка; указано, что формула Ньютона является частным случаем данного процесса. Я. И. Алихашкин

7213. О точках расходимости метода Ньютона для вычисления корней алгебраических уравнений. Барна (Bizonyos algebrai eggenletekre alkalmazott Newton-fele gyökközelitö eljáras divergenciapontjairól. Barna Béla. Kand. ertekezés tézisei. Tud. Minosito Bizottság. Budapest, 1955, 3 L.), Magyar nemzeti bibliogr., 1955, № 4, 118—(венг.)

Подробный текст диссертации опубликован на немецком языке: (I. РЖМат, 1955, 1965; II. Publ. Math. 1956, 4, № 3-4, 384—397).

7214. О точности линейной интерполяции. Кампхаузен (Über die Genauigkeit der lineareni Interpolation. Camphausen E.), Fluchtstab, 1955, 6,, № 2, 24—27 (нем.)

Оценивается наибольшая ошибка линейной интерполяции при пользовании таблицами функций путем сравнения линейной интерполяции с квадратической. Л. П. Пеллинен

7215. Способ интерполяционного вычисления функции двух переменных (Четырехточечная интерполяция с поправками). Хаусбрандт (Pewien sposób interpolacyjnego — obliczania funkcji dwóch zmiennych. (Interpolacja czteropunktowa z poprawkami). Hausbrandt Stefan), Prace Inst. geod. i kartogr., 1955, 3, № 3, 321—381 (польск.; рез. русск., англ.)

Интерполяционная табличка для вычисления функции двух переменных имеет вид:

$$\begin{vmatrix} (1-k)(1-w) & (1-k)w \\ k(1-w) & kw \end{vmatrix} = I.$$

Здесь k — дробь интерполяции в столбцах, w — дробь интерполяции в строках. Дробь интерполяции — это отношение разности: «данное значение переменного минус ближайшее меньшее табличное значение того же переменного» к постоянной табличной разности значений переменного в соответствующих элементах основной, функциональной таблицы. Изменения аргументов функциональной таблицы должны быть такими, чтобы после интерполирования значение функции определялось с ошибкой, не превосходящей единицы последнего знака. Интерполяционную табличку легче всего составить по схеме

$$\begin{array}{c|c|c} & 1-w & w \\ \hline 1-k & \cdot & \cdot \\ \hline k & \cdot & \cdot \end{array} = I.$$

Элементы интерполяционной таблички должны иметь на один десятичный знак больше, чем значения функции. Сумма элементов таблички всегда должна равняться единице.

Часть основной таблицы, в пределах которой производится четырехточечная интерполяция, называется функциональной табличкой:

$$\begin{vmatrix} F_{00} & F_{10} \\ F_{01} & F_{11} \end{vmatrix} = T.$$

Сумма произведений соответствующих элементов функциональной и интерполяционной табличек является приближенным значением интерполяции: $F_0 = T \cdot I$.

Если данная функция представляет собою многочлен переменных U и V, не содержащий степеней, высших UV, т. е. $F = a_0 + a_u U + a_v V + a_{uv} UV$, то F_0 является окончательным результатом четырехточечного интерполирования: $F_0 = F$. Если же $F = a_0 + a_u U + a_v V + a_{uv} UV + a_{u^2} U^2 + a_{v^2} V^2$, то к F_0 надо прибавить поправки: p_k — интерполирования между столбцами и p_w — интерполирования между строками: $F = F_0 + p_k + p_w$. Здесь $p_k = k(1-k)\alpha$ и $p_w = w(1-w)\beta$, где

$$\alpha = \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ F_{02} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{Bmatrix}, \qquad \beta = \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{Bmatrix}$$

Фигурные скобки обозначают краковяны. Значения поправок p_k и p_w отыскиваются в соответствующих табличках, аналогичных табличкам пропорциональных частей линейной интерполяции в таблицах с одним независимым переменным. Если табличка поправок составлена с интервалами $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ величин α и β, то ошибки определения по ней поправок равны 0,125 соответствующего интервала.

Дано теоретическое обоснование предлагаемого способа интерполяции. Пользуясь описанным способом, институт геодезии и картографии в Варшаве составил таблицы для перевычисления координат Гаусса — Крюгера из одной зоны в другую, для вычисления координат Гаусса — Крюгера по географическим (эллипсоиды Бесселя и Красовского, шестиградусные зоны) и вычисления географических координат по координатам Гаусса — Крюгера (эллипсоид Бесселя, шестиградусные зоны). Н. И. Модринский

7216. Идеальная интерполяция и ее эффективное вычисление. Вернотт (L'interpolation idéale et son calcul numérique effectif. Vernotte Pierre. Publs scient. et techn. Ministère air, 1955, № 300, iii, 74 p.) (франц.)

Пусть дана последовательность значений

$$y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots \qquad (1)$$

для интерполируемой функции $y = f(x)$. Положим

$$Y = \varphi(y) = \varphi(f(x)), \qquad Y_i = \varphi(y_i).$$

Если к функции $Y = \varphi(y)$ применить ту же интерполяцию, что и для $y = f(x)$, и если при этом получим значение $\varphi(f(x))$, где $f(x)$ — проинтерполированное значение для $y = f(x)$, то такая интерполяция называется идеальной.

Утверждается, что для существования идеальной интерполяции необходима регулярность ряда (1), хотя нигде не дается определения регулярности. Многие введенные в работе понятия носят неопределенный характер, в силу чего утверждения автора непонятны. В. П. Ильин

7217. Практическое решение проблемы аппроксимации Чебышева — Золотарева. Амштуц (Solution pratique d'un problème d'approximation à la Čebyšev — Zolotarev. Amstutz Pierre), Ann. télécommuns, 1957, 12, № 10, 347—348 (франц.)

Излагается проблема Чебышева — Золотарева приближения рациональных дробей и доказывается, что она может быть решена с помощью эллиптических функций. Показано, что эта же самая задача может быть решена с удовлетворительной для практических целей точностью с помощью более простых трасцендентных функций $\mathrm{th}x$ и e^x. Л. М. Голубева

7218. Наилучшие рациональные представления числа π. Зибель (Verbesserte rationale π-Näherungen. Siebel A.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, 10, № 7, 314—317 (нем.)

Известное приближенное представление числа π:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{4nn_\nu}{n_\nu n_{\nu+1}}<\pi<\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{4n}{n_\nu},$$

где

$$n_\nu=n^2+\nu^2, \qquad n_\nu=n^2+\nu(\nu+1),$$

улучшается с помощью следующего процесса: если

$$T_n=\frac{3}{n}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{4n}{n_\nu}, \qquad H_n=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{16}{4n^2+(2\nu+1)^2},$$

причем $T_n<\pi<H_n$, то $T_n'=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$ и $H_n'=\frac{4}{3}H_{2n}-\frac{1}{3}H_n$ будут лучшими приближениями для π, чем T_n и H_n. Я. И. Алихашкин

7219. О вычислении функции $f_\lambda(M,\bar{\omega})$. Зартарян, Восс (On the evaluation of the function. Zartarian G., Voss H. M.), J. Aeronaut. Sci., 1953, 20, 781—782 (англ.)

Автор представляет $\int_0^1 e^{-i\omega u}J_0(\omega u/M)u^\lambda du$ в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{a_{2n}(M)}{\lambda+2n+1}-i\omega\frac{b_{2u}(M)}{\lambda+2n+2}\right)\omega^{2n}$$

и табулирует $a_0,\ldots,a_{12}$, $b_0,\ldots,b_{12}$ для $M=5/4$, 10/7, 3/2, 5/3, 2, 5/2. A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 5, 422

7220. Эмпирические формулы, встречающиеся в приложении к физико-химическим расчетам. Мичка, Шмидт (Empirické formule, vyskytující se ve fysikálně chemických aplikacích. Míčka Jiří, Schmidt Oskar), Aplikace mat., 1957, 2, № 6, 469—478 (чешск.; рез. русск., нем.)

Исследуются следующие эмпирические формулы:

1) $y=ax+b+cf(x)$, $a\neq0$, $c\neq0$, $f(x)=\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\lg x$;

2) $xy=ax+b+cf(x)$, $b\neq0$, $c\neq0$, $f(x)=x\lg x$;

3) $y=ax^2+bx+c+dg(x)$, $a\neq0$, $d\neq0$, $g(x)=x^3$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\lg x$;

4) $xy=ax^2+bx+c+dg(x)$, $a\neq0$, $c\neq0$, $d\neq0$, $g(x)=\frac{1}{x}$; $x\lg x$.

См. также РЖМат, 1957, 8955. В. К. Саульев

7221. Метод вращения для вычисления канонических корреляций. Хили (A rotation method for computing canonical correlations. Healy M. J. R.), Math. Tables and Other Aids Comput. 1957, 11, № 58, 83—86 (англ.)

Автор предлагает более простой, по сравнению с обычно применяемым, вычислительный метод при преобразовании переменных x_i ($i=1,2,\ldots,p$) и y_j ($j=1,2,\ldots,q$), $p\geqslant q$ к каноническим переменным u_i, v_j. Метод аналогичен известному методу вращения для отыскания собственных значений и векторов симметричной матрицы. Канонические переменные u_i, v_j получаются из x_i, y_j путем линейного преобразования и обладают тем свойством, что их дисперсии равны единице, а пары величин u_i, u_k; v_j, v_l; u_i, v_j некоррелированы при несовпадающих индексах. А. П. Хусу

7222. Замечания к методу Шмидта графического интегрирования уравнения теплопроводности. Хейнрих (Bemerkungen zum Verfahren von Ernst Schmidt zur graphischen Integration der Wärmeleitungsgleichung. Heinrich H.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, № 1-2, 70—71 (нем.)

Известный графический метод (см., например, РЖМат, 1956, 1685) приближенного решения первой краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности обобщается на случай общих краевых условий. При этом локальная погрешность в граничных узлах имеет тот же порядок малости, что и во внутренних узлах, т. е. $O((\Delta x)^2)$. В. К. Саульев

7223. Вопросы точности графического интегрирования функций. Устовольская Т. И., Тр. Ленингр. технол. ин-та им. Ленсовета, 1957, вып. 38, 47—61.

Целью работы является получение рабочих формул для оценки погрешностей, возникающих при графическом построении интегральных кривых методом средних прямоугольников.

Предлагается определять суммарную ошибку по формуле

$$\Delta=\Delta_{\text{ан}}+(\pm\Delta_{\text{гр}}),$$

в которой $\Delta_{\text{ан}}$ — погрешность аппроксимации, называемая ошибкой аналогии, $\Delta_{\text{гр}}$ — ошибки графических построений. Фактически исследуются только последние в предположении, что первое слагаемое определяется по остаточному члену формулы средних прямоугольников, содержащему вторую производную интегрируемой функции и поэтому применимому только в случае аналитического задания и дифференцируемости последней. Для определения $\Delta_{\text{гр}}$ выводятся формулы, основанные на исследованиях Д. И. Каргина (Точность графических расчетов, Докторская диссертация, 1937). Составлены графики, облегчающие применение выведенных формул, и таблицы сравнения среднеквадратических ошибок, определенных экспериментально и по предложенным формулам.

В качестве примера рассматривается задача построения профиля кулачка по данному графику скоростей или ускорений толкателя. А. Б. Штыкан

7224. Графическое интегрирование. Волак (Graphical integration. Wolak J.), Mach. Design., 1957, 29, № 21, 157—160 (англ.)

Описан способ вычисления интегралов вида

$$\int f(x)\cdot g(x)\cdot dx \qquad (1)$$

по данным функциям $f(x)$ и $g(x)$, первая из которых по предположению непрерывна, однозначно определена и может быть проинтегрирована. Функция $g(x)$ задается графиком.

Заранее заготовляется таблица с вычерченной на ней в прямоугольной координатной системе интегральной кривой $z(x)=\int f(x)dx$. Кривая $g(x)$ наносится на кальке. Накладывая последнюю на таблицу с кривой $z(x)$, строят кривую $g(z)(x))$. Планиметрирование последней доставляет величину, пропорциональную значению интеграла вида $\oint g(x)\,dz(x)$, эквивалентного интегралу (1).

Приведены примеры различных задач, решение которых сводится к вычислению интеграла (1), но подробно рассмотрено лишь вычисление статического момента и момента инерции плоской фигуры относительно оси ординат. При этом кривые $z(x)$, соответственно, имеют вид $z(x)=\frac{1}{2}x^2$ и $z(x)=\frac{1}{3}x^3$. Даны подробные указания о технике выполнения и порядке всех построений и вычислений. А. Б. Штыкан

7225. Построение прямой линии методами наименьших квадратов. Шер (Two methods of obtaining least squares lines. Sher Irving H.), Science, 1956, 123, № 3186, 102—104 (англ.)

Описываются два метода построения прямой линии, наименее уклоняющейся (в некотором среднем смысле) от заданных графически точек. В. К. Саульев

7226. Подбор кривых. Гофман (Curve fitting. Hoffmann T. R.), Allis-Chalmers Electr. Rev., 1957, 22, № 3, 14—17 (англ.)

Рассматривается применение метода наименьших квадратов для подбора коэффициентов в уравнениях эмпирических кривых. Г. Е. Джемс-Леви

7227. Приближенная замена синусов и косинусов прямыми. Ульбрихт (Der angenäherte Ersatz der Sinus- und Cosinusfunktionen durch Geraden. Ulbricht Hans), Feinwerktechnik, 1956, 60, № 11, 413—418 (нем.)

Рассматриваются разные способы аппроксимации заданных в первом квадранте синусоидальных и косинусоидальных функций линейными зависимостями $\sin x \approx mx + y_{AL}$ (y_{AL} = const — ордината начальной точки), $\cos x \approx mx + y_{EL}$ (y_{EL} = const — ордината конечной точки).

Составлены графики и приводится сводка формул, облегчающие подбор постоянных m, y_{AL} и y_{EL} и области аппроксимации $x_A \leqslant x \leqslant x_E$, при которых наибольшая разность значений данной и аппроксимирующей функций не превосходит допускаемой. А.Б. Штыкан

7228. Приближенная замена арктангенса прямыми. Ульбрихт (Der angenäherte Ersatz der Arcustangens-Funktion durch Geraden. Ulbricht Hans), Feinwerktechnik, 1957, 61, № 11, 383—388 (нем.)

По примеру статьи автора (реф. 7227) рассматриваются способы аппроксимации функции $y = \operatorname{arctg} x$, $(0 \leqslant x < \pi/2)$ прямыми $y_L = mx + c$. Предложены графики, облегчающие подбор коэффициентов m и c.

Подробно рассмотрен пример замены неравномерной шкалы настольных рычажных весов шкалой с равномерными делениями. А. Б. Штыкан

7229. Номографическое решение кубических уравнений с комплексными коэффициентами. Аллик (Kompleksse kordajatega kuupvõrrandite nomograafiline lahendamine. Allik K.), ENSV Teaduste Akad. toimetised. Tehn. ja füüs.-matem. teaduste seer., Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ.-матем н., 1957, 6, № 1, 19—27 (эст.; рез. русск., нем.)

Уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ приводится к виду $z^3 + z^2 + L = 0$. Обозначая $z = X + Y_i$, $L = m + ni$, автор сводит данное уравнение к системе уравнений с действительными коэффициентами:

$$n^2(3X+1)^3 = [X^2(X+1)+m]\,[2X(2X+1)^2 - m]^2,$$

$$27I^3\left(m + \frac{2}{27}\right)^2 =$$

$$= \left[Y\left(Y^2 + \frac{1}{3}\right) - n\right]\left[2Y(4Y^2 + \frac{1}{3}) + n\right]^2.$$

Для каждого из этих уравнений строится сетчатая номограмма. Для удобства пользования каждая номограмма разделяется на три части, которые объединяются попарно так, что на каждом чертеже определяется действительная и мнимая части одного корня.

Г. Е. Джемс-Леви

7230. Методика построения номограмм с треугольным (гексагональным) транспарантом. Хованский Г. С., Вычисл. математика, сб. 2, 1957, 160—177

Излагается теория построения рабочих номограмм с треугольным транспарантом для уравнений вида

$$F_{1,2}(\alpha_1, \alpha_2) + F_{3,4}(\alpha_3, \alpha_1) = F_{5,6}(\alpha_5, \alpha_6). \quad (1)$$

Устанавливаются способы выбора произвольных функций и параметров преобразования, при которых номограммы указанного вида приобретают форму, отвечающую требованиям практики. Указывается, что в случае формул вида (1) такие номограммы более наглядны, чем соответствующие номограммы из выравненных точек. Построение номограмм с треугольным транспарантом сводится в этом случае к построению трех сетчатых номограмм для функций F_{ij} и размещению их на чертеже. Отмечается, что в отличие от существовавшего ранее мнения, такие номограммы обладают большой приспособляемостью (например, для уравнения третьего номографического порядка возможно построение шкал с любыми характеристиками, независимо от данного уравнения). Г. Е. Джемс-Леви

7231. Диаграммы и счетные линейки для комплексных чисел. Вакабаяси, Канамару (Wakabayashi T., Kanamaru T.), Яманаси дайгаку когакубу кэнкю хококу, Repts Fac. Engng Yamanashi Univ., 1956, № 7, 73—90 (японск.; рез. англ.)

Приводится большое количество номограмм из выравненных точек, а также схем различных транспарантных номограмм для вычисления часто встречающихся функций комплексного переменного. Г.Е. Джемс-Леви

7232. Вспомогательные номограммы высокой точности. Симокава, Морита (On the high precision concurrent charts. Simokawa Yakiti, Morita Katuhiko), Proc. 6th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1956, Tokyo, 1957, 521-525 (англ.)

Рассматривается проективное преобразование номограмм посредством умножения определителя Массо на числовой определитель. Г. Е. Джемс-Леви

7233. Точность вычислений при помощи номограмм с прямолинейными показателями. Суровяк (Dokładność obliczeń za pomocą nomogramów o wskaźniku prostoliniowym. Surowiak Wiktor), Pomiary, automat., kontrola, 1956, 2, № 4, 129—134 (польск.)

7234. О номографировании уравнений 4-го номографического порядка. Джемс-Леви Г. Е., Матем. сб., 1958, 44, № 1, 123—130

Излагается метод приведения уравнения

$$z = F(x, y) \quad (1)$$

к виду

$$\begin{vmatrix} p_{31}(x) & p_{32}(x) & 1 \\ T_{31}(z) & T_{32}(z) & 1 \\ \varphi_2(y) & f_2(y) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

в предположении, что уравнение (1) является уравнением 4-го номографического порядка, т. е. приводится либо к форме Коши $f_1(x) f_2(y) + f_3(z) + \varphi_2(y) = 0$, либо к форме Кларка $f_1(x) f_2(y) f_3(z) + \varphi_2(y)[f_1(x) + f_3(z)] + 1 = 0$.

Функции $p_{31}(x)$, $p_{32}(x)$, $T_{31}(z)$, $T_{32}(z)$. определяются из уравнения (1) следующим образом:

$$p_{31}(x) = p(x, y_3) / p(x, y_1),\ p_{32}(x) = p(x, y_3) / p(x, y_2),$$

$$T_{31}(z) = T(y_3, z)/T(y_1, z),\ T_{32}(z) = T(y_3, z) / T(y_1, z),$$

где

$$p(x, y) = F_x(x, y) / F_y(x, y),\ T(x, y) = \{F_y[\psi(y, z), y]\}^{-1}$$

$\psi(y, z)$ — есть результат разрешения уравнения (1) относительно x; y_1, y_2, y_3 — некоторые фиксированные значения y.

Найденные значения $p_{31}(x)$, $p_{32}(x)$, $T_{31}(z)$, $T_{32}(z)$ подставляются в соотношение (2), затем переменное z заменяется на $F(x, y)$ по формуле (1), после чего соотно-

шение (2) переходит в тождество. Из этого тождества при $x = x_1$ и $x = x_2$ определяются функции $\varphi_2(y)$ и $f_2(y)$.

В качестве примера рассмотрено приведение уравнения

$$z(x+y)/(xy^2+1) = F(x, y)$$

к виду (2). Дано геометрическое истолкование предлагаемого метода. Отмечена ошибка в статье М. Л. Франка «Об одном методе геометрической анаморфозы» (Тр. Ленингр. индустр. ин-та, 1936, **10**, № 3, 9—16). В статье имеется ряд опечаток: в уравнении (6) перепутаны индексы, на стр. 124 вместо $\partial y/\partial x$ написано dy/dx, в уравнении (18) у переменного x пропущен индекс 1, в уравнении (31) вместо функции f_3 записана функция f_2, в уравнении (32) у функции φ_2 пропущен индекс 2 и др. Г. С. Хованский

7235. Номограмма для неполной Г-функции и функции вероятности χ^2. Смирнов С. В., Потапов М. К., Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, № 4, 470—472 (рез. англ.)

Предлагается номограмма из выравненных точек для формулы вероятности

$$P(\chi^2, n) = \frac{1}{2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\chi}^{\infty} z^{n-1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \qquad (1)$$

Номограмма состоит из параллельных шкал P и n и криволинейных шкал χ и t, где t — вспомогательная величина, определяемая формулой

$$t = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n}. \qquad (2)$$

Для вычисления P при $1 \leqslant \chi^2 \leqslant 30$ и $1 \leqslant n \leqslant 30$ используют шкалы n, χ^2 и P. Для вычисления P при $30 \leqslant n < \infty$ и $30 \leqslant \chi^2 < \infty$ предварительно находят t по формуле (2), а затем используют шкалы t и n.

Пределы изменения переменных: $1 \leqslant n < \infty$, $|t| \leqslant 3{,}1$, $1 \leqslant \chi^2 \leqslant 30$; $0{,}001 \leqslant P \leqslant 0{,}999$. Абсолютная погрешность в средней части шкалы P при $0{,}01 \leqslant P \leqslant 0{,}99$ не превышает 0,005, в концевых частях абсолютная погрешность не более 0,0005.

Указан метод построения номограммы и приведены таблицы координат для построения шкал n, χ^2 и t. Библ. 7 названий. Г. С. Хованский

7236. Что такое номография? Краснодембский (Co to jest nomografia. Krasnodębski Ryszard), Matematyka, 1957, **10**, № 5, 1—13 (польск.)

Введение. — Краткое изложение элементов номографии. Г. Е. Джемс-Леви

7237. Мотивы для работы в области численного анализа. Тодд (Todd J.), Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 97—110

См. РЖМат, 1956, 5523, 1957, 921.

7238 К. Избранные геодезические сочинения. Т. I. Способ наименьших квадратов. Гаусс К. Ф. Ред. **Багратуни Г. В.,** Перев. с латинск. и нем. М., Геодезиздат, 1957, 152 стр., 8 р. 50 к.

Содержание книги по главам следующее: 1. Теория комбинаций наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам. 2. Теория движения небесных тел, вращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям. 3. Исследование об эллиптических элементах Паллады на основании противостояний 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809 гг. 4. Определение точности наблюдений. 5. Приложение теории вероятностей к одной задаче практической геометрии. 6. Определение долгот хронометрическими рейсами 7. Сообщения.

Имеется обширное (на 13 страницах) введение относительно работ Гаусса по методу наименьших квадратов, написанное редактором книги. В. К. Саульев

7239 Д. О сходимости одного видоизменения метода Галеркина. Жданов Г. А., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Пермск. ун-т, Пермь, 1957

7240 Д. Исследование некоторых вопросов решения граничных задач методом конечных разностей и полной автоматизации решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона. Алексидзе М. А., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т точной механ. и вычисл. техн. АН СССР, Матем. ин-т АН ГрузССР, М., 1958

7241 Д. Новый метод численного решения интегральных уравнений Фредгольма. Лим Рюн Чиль. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

7242 Д. Применение метода сопряженных градиентов и его видоизменений к решению линейной граничной задачи. Хохштрассер (Die Anwendung der Methode der conjugierten Gradienten und ihrer Modifikationen auf die Lösung linearer Randwertprobleme. Hochstrasser Urs.,) Diss., Zürich, Truninger, 1954, 46 S., ill. (нем.)

Диссертация состоит из введения и шести разделов. Во введении дан обзор развития вычислительных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Отмечается, что с созданием быстродействующих вычислительных машин изменилась точка зрения, с которой эти методы обсуждались ранее.

Проведенный анализ выявил целый ряд новых недостатков в известных методах (например, при реализации алгоритма Гаусса на вычислительных машинах не имеет места цикличность) и привел в последнее время к развитию новых методов, в частности метода ортогонализации. Хестинс и Штифель (РЖМат, 1956, 7645, см. также РЖМат, 1957, 2702) предложили процесс ортогонализации особого типа, приводящий к очень простой итерации. Развитый ими метод сопряженных градиентов представляет в известном смысле обобщение метода наискорейшего спуска, предложенного Темплом (Temple G., Proc. Roy. Soc., 1939, **A169**, 476—500). Родственным является способ минимизирующих итераций, развитый Ланцошом (Lanczos C., J. Res. Nat. Bur. Standards, 1952, 49, 33—53).

Обзору метода сопряженных градиентов посвящен первый раздел. Выясняется ряд существенных преимуществ метода сопряженных градиентов по сравнению с методом Темпла, например, с каждым шагом приближение улучшается, решение с большой ошибкой округления можно улучшить путем немногих дополнительных итераций, при помощи некоторой обработки исходных данных можно достигнуть устойчивости метода по отношению к распространению погрешности. При применении метода сеток для численного решения линейной граничной задачи встречаются системы разностных уравнений с матрицей коэффициентов, имеющей большое число нулей в качестве элементов вне главной диагонали. В этом случае вычисление в каждом шаге обоих параметров по методу сопряженных градиентов требует образования по крайней мере двух скалярных произведений. Франкель (Frankel S. P., Math. Tables and other Aids Comput., 1950, 4, 30, 65—75) предложил некоторое видоизменение этого метода с применением двух параметров. В указанной работе Франкела этот способ, названный автором методом Ричардсона второго порядка, не получил, однако, полного обоснования.

Обоснованию метода Франкела посвящен второй раздел. Пусть

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + l_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

или в векторном виде $Dx + l = 0$ система линейных уравнений с положительно определенной симметриче-

ской матрицей D. Исследуется сходимость итерационного процесса

$$r_k = (1 + \varepsilon) r_{k-1} - \lambda D r_{k-1} - \varepsilon r_{k-2},$$

где $r_k = Dx^{(k)} + l$, при различных значениях ε и λ. При $\varepsilon = 0$ получается метод, принадлежащий Ричардсону (РЖМат, 1954, 5782). По сравнению с методом Ричардсона, способ Франкела имеет преимущество в быстрой сходимости.

В третьем разделе путем аналогии между методом градиентов и известными задачами с начальными значениями выясняются некоторые особенности методов Ричардсона и Франкела.

В четвертом разделе дано решение задачи Дирихле для прямоугольника по методу сеток и сопоставляются результаты при применении указанных двух методов.

Метод Франкела предполагает, что известно некоторое приближение наименьшего и наибольшего собственного значения матрицы. В случае затруднения в их определении автор рекомендует сначала применить метод сопряженных градиентов, а затем перейти к способу Франкела; отмечаются технические преимущества такого перехода при пользовании вычислительными машинами. Анализу и иллюстрации этого обстоятельства посвящены пятый и шестой разделы, в которых решается основная плоская задача теории упругости для параллелограммовидной шайбы. Дается вариационная трактовка этой задачи, затем осуществляется переход к эквивалентной граничной задаче для дифференциального уравнения. Для приближенного решения задачи применяется треугольная сетка. Система 106 линейных уравнений была решена при помощи автоматической вычислительной машины Института прикладной математики Швейцарского высшего технического училища в Цюрихе (было выполнено 90 итераций).

Д. Б. Тополянский

См. также: 6621, 6628, 7311

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

7 243. УНИВАК-ЛАРК — шаг вперед в конструировании вычислительных машин. Эккерт (UNIVAC-LARC, the next step in computer design. Eckert J. P.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1957, № T-92, 16—19. Discuss. 20 (англ.)

Рассматриваются принципы построения и основные технические характеристики сверхбыстродействующей вычислительной машины УНИВАК-ЛАРК (UNIVAC-LARC, см. фото), разработанной и изготавливаемой

К реф. 7243

фирмой «Ремингтон Рэнд». Скорость вычислений на машине ЛАРК почти в 100 раз превышает скорость большинства современных больших вычислительных машин, составляя 100—150 тыс. операций в 1 сек. и более.

Такое быстродействие достигнуто благодаря использованию различных методов: применению параллельной десятичной арифметики (с возможностью работы как с плавающей, так и с постоянной запятой), возможности полного контроля без перерыва в вычислениях, включению большого числа быстродействующих регистров промежуточной памяти, перекрытию между работой входного и выходного оборудования, с одной стороны, и работой основных вычислительных и запоминающих узлов, с другой стороны. С этой же целью в машине УНИВАК-ЛАРК применены два арифметических устройства (а. у.): быстродействующее а. у. для вычисления и сравнительно медленное а. у. для обработки данных, и несколько оперативных запоминающих устройств (з. у.) на ферритовых сердечниках с возможностью одновременного обращения ко всем з. у. Предусмотрено перекрытие в работе всех вычислительных, запоминающих и вспомогательных цепей машины (например, во время цикла а. у. происходит обращение к з. у. с помещением туда результатов предыдущего цикла и выборкой исходных данных для следующего) и возможность подключения второй машины (основной вычислительной установки) к тем же устройствам входа и выхода. Такое подключение в некоторых случаях дает повышение скорости вычислений на 100% при увеличении количества и стоимости оборудования на 50%.

Машина УНИВАК-ЛАРК выполнена в принципе на старых элементах, разработанных ранее для других машин и испытанных в эксплуатации. При этом большинство элементов построены на полупроводниковых диодах и триодах; максимальная рабочая частота элементов 2 *мгц*. Применение новых, более быстродействующих элементов соответственно повысит скорость вычислений.

Машина УНИВАК-ЛАРК рассчитана в основном на применение автоматического программирования. Так, в состав команд входит 69 операций; логика многих из них настолько сложна и разветвлена, что при ручном программировании ими воспользоваться затруднительно. Кроме того, предусмотрена возможность еще большего увеличения состава команд машины.

Фирмой «Ремингтон Рэнд» разработано несколько систем автоматического программирования. Из них для машины ЛАРК была выбрана система «общее программирование» с использованием сначала псевдокода и постепенным (в несколько ступеней) переходом к машинному коду. Применение весьма сложных операций существенно повышает скорость вычислений.

З. у. машины по степени быстродействия делятся на 4 группы: 1) Промежуточные регистры памяти с циклом 1 *мксек*. Таких регистров несколько десятков, и связаны они в основном с быстродействующим а. у. 2) Оперативные запоминающие устройства на ферритовых сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса емкостью по 2 500 чисел каждое. Цикл обращения этих з. у. составляет 4 *мксек*, обычно их 8, но может быть до 39. 3) От 12 до 24 з. у. на магнитных барабанах емкостью по 250 тыс. 11-разрядных десятичных чи-

сел с их знаками. Высокая надежность магнитных з. у. обеспечивается особой «плавающей» конструкцией головок с воздушными подушками. 4) Медленно действующие з. у. на магнитных лентах или рулонах. Этими з. у. машина может быть снабжена практически в любом количестве. Объясняется методика, по которой оценивались оптимальные соотношения емкости и быстродействия з. у. различных ступеней.

В качестве устройств ввода и вывода в машине УНИВАК-ЛАРК применено большое число фото-, перфорационных (в основном, на ленте) и печатающих устройств, в том числе фотоустройство «Характрон». Скорость ввода и вывода для каждого устройства составляет в среднем 20 000 десятичных цифр или букв в 1 сек.

Стандартное время сложения в быстродействующем а. у. — 4 *мксек*; время умножения — 8 *мксек*. В цикл 4 *мксек* укладываются также такие операции, как перенос с любого регистра на любой, обращение к ферритовому з. у., сравнение чисел в двух регистрах, любой сдвиг и т. д. Операция сравнения с последующим условным переходом требует 8 *мксек*.

Приведена и блок-схема машины и блок-схема основного сумматора. Указывается, что возможности машины УНИВАК-ЛАРК на ближайшие несколько лет даже несколько превосходят требования, предъявляемые по решению большинства научно-технических задач. Изготовление и наладка машины УНИВАК-ЛАРК будут закончены в 1958 г. Наряду с этой машиной, фирма «Ремингтон Рэнд» разработала и изготавливает малую вычислительную машину УНИВАК-МАГНЕТИК с широким использованием магнитных элементов. А. А. Крупский

7244. Вычислительная машина ЛАРК для задач по ядерным реакторам в корабельном опытном бассейне. (LARC computer for reactor problems at Model Basin), Bur., Ships J., 1957, 6, № 6, 14 (англ.)

Судостроительное бюро (The Bureau of Ships) США сообщает об универсальной вычислительной машине ЛАРК (UNIVAC-LARC), которая будет установлена в лаборатории прикладной математики корабельного опытного бассейна (David Taylor Model Basin) к концу 1958 г. Машина предназначается для решения задач, связанных с ядерными реакторами и их установкой на корабли. Конструктивно машина оформлена в виде шкафов, в каждом из которых помещается законченное функциональное устройство, что позволяет в случае необходимости расширить возможности машины, добавляя новые функциональные блоки. ЛАРК состоит из двух частей. Одна из них предназначена для обработки и преобразования входных и выходных данных, а другая — для выполнения логических и арифметических операций. В схемах машины применены полупроводниковые триоды. Сообщается, что ЛАРК сможет производить более 100 000 умножений в 1 сек. Стоимость машины 3,5 млн. дол. А. Н. Чуйкин

7245. Работа вычислительной машины вдали от основного персонала. Бромберг (The operation of a computer away from a central staff. Bromberg Howard), Computers and Automat., 1956, 5, № 7, 12—13, 25—26 (англ.)

Описывается опыт использования для вычислений серийных цифровых вычислительных машин, находящихся в процессе испытания перед отправкой заказчикам.

Опытным корабельным бассейном (The David Taylor Model Basin, Bureau of Ships), по предложению фирмы «Ремингтон Рэнд», были использованы для расчетов вычислительные машины УНИВАК, строящиеся на ее фабрике в Филадельфии. Эта фабрика ежемесячно выпускает одну машину УНИВАК; одновременно находится в разных стадиях строительства 5 машин. Сборка машины занимает 2 недели, наладка и испытание — 3 месяца. Из них 1 месяц использовался для расчетов, после чего машина отправлялась заказчику, а расчеты переносились на следующую машину, прошедшую двухмесячные испытания. Полезное время за 1 месяц такого использования машины доходило до 85%. На машинах ставились три заранее запрограммированные задачи, входные данные которых изменялись. Первая задача (BETTIS 57) касалась конструирования ядерных реакторов для корабельных силовых установок; вторая (MUG) — цифрового моделирования ядерного реактора; третья (BETTIS 54) — тех же вопросов, что и BETTIS 57, но в более развернутом виде. Эти расчеты выполнялись опытным корабельным бассейном для лабораторий атомной энергии фирмы «Вестингауз» в г. Питсбурге и фирмы «Дженерал Электрик» в г. Скенектади. Таким образом, машины эксплуатировались вдали от основного персонала, обслуживаемого этими машинами. За 9 месяцев было использовано около 5 тыс. часов машинного времени и успешно решено свыше 3 тыс. задач в пределах указанных стандартных программ. Отмечаются особенности эксплуатации машин в описанных условиях, и указывается на неправильность распространенных мнений о том, что вычислительная машина не может эффективно работать вне места нахождения основного исследовательского персонала и без опытного обслуживающего персонала. Автор оспаривает также, что «программисты и программирование составляют сердце всей вычислительной установки». В. П. Кузнецова

7246. Вычислительная машина ТРАНЗАК S-1000. Маддокс, О'Тул, Ван (The Transac S-1000 computer. Maddox J. L., O'Toole J. B., Wong S. Y.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1957, № T-92, 13—16. Discuss., 16 (англ.)

Описана автоматическая цифровая вычислительная машина, использующая схемы на полупроводниковых триодах. Машина является двухадресной и работает с 36-разрядными двоичными числами. Быстродействующее запоминающее устройство емкостью в 4096 чисел выполнено на магнитных сердечниках. В качестве внешнего оборудования в машине можно использовать магнитный барабан, магнитную ленту, перфокарты и перфоленты. При монтаже машины широко используются печатные схемы. Полная мощность, потребляемая машиной, составляет 1,2 *квт*. Дается описание логического устройства машины и блок-схемы ее основных узлов. Приводится полный список инструкций и подробно разъясняется значение каждой инструкции в отдельности.

В конце статьи приводятся материалы дискуссии. В. М. Долкарт

7247. Использование вычислительных машин. Людвиг (The use of computing machines. Ludwig Claus B.), Industr. Math., 1956, 7, 25—45 (англ.)

Изложение современного состояния техники электронных вычислительных машин. Приводится краткое описание основных возможностей применения моделирующих установок и цифровых вычислительных машин. В качестве примера рассматривается машина ИБМ-702 и некоторые другие. Данные в эту машину вводятся как с магнитной ленты, так и с перфокарт. Результаты вычислений могут быть выведены на магнитную ленту, отпечатаны на бумаге, пробиты на перфокартах или показаны в виде кривых в электронно-лучевых трубках. Все математические операции совершаются в центральном устройстве, которое содержит запоминающее устройство на электростатических трубках, аккумулятор, а также арифметический и логический узлы. Машина имеет также дополнительное запоминающее устройство на магнитном барабане. Помимо четырех основных арифметических операций, машина ИВМ-702 может выполнять много логических операций, например модификацию инструкций, определение равенства двух чи-

сел, сравнение двух чисел по величине, определение знака числа и определение правильности результата. В машине предусмотрена возможность проверки внутренних операций с контролем точности результатов вычислений. Инструкция состоит из пяти частей. Первая является кодом операции, остальные четыре представляют адреса ячеек запоминающего устройства, где хранятся математические величины. В применении к 5-разрядным числам машина ИБМ-702 выполняет 237 000 сложений или вычитаний, или 50 000 умножений или 24 000 делений, или 434 000 логических операций в 1 мин.

Программирование задач заключается в приведении всех уравнений и формул к четырем основным арифметическим действиям и в составлении блок-схемы процесса решения, включающей в себя все шаги работы машины. Средняя задача требует около 1000 инструкций. Для подготовки такой задачи необходимо от двух до четырех недель. Важное значение имеют так называемые подпрограммы, которые составляются для наиболее часто встречающихся операций, например для извлечения корней, нахождения углов по заданным синусам, косинусам и наоборот и т. д. Приводятся также данные о других машинах фирмы ИБМ. Библ. 5 назв.

Г. Х. Новик

7248. **Поиск информации при помощи вычислительной машины ИБМ-701. Браккен, Тиллитт** (Information searching with the 701 calculator. Bracken R. H., Tillitt H. E.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, 4, № 2, 131—136 (англ.)

Рассматривается задача упрощения процедуры для библиотечного поиска технической информации. Используется вычислительная машина ИБМ-701, установленная на американской экспериментальной станции морской артиллерии в Калифорнии. Объектами поиска являются доклады, относящиеся к проблемам развития морской артиллерии и издающиеся рядом соответствующих агентов США. Однако авторы считают, что предлагаемая ими система машинного поиска может оказаться пригодной и за пределами литературы по морской артиллерии. Авторы критикуют существующую систему предметных рубрик, принятую в современных американских библиотеках (в том числе в библиотеке конгресса США), которая, по их мнению, приводит к тому, что многие важные стороны содержания индексируемых докладов остаются в тени. Например, доклад на тему «Равновесный состав и термодинамические свойства горючих газов» попадает при такой системе либо под рубрику «газы», либо под рубрику «горючие вещества», вследствие чего упускается основное содержание доклада, а именно разработка количественного метода оценки термодинамических свойств. Этот недостаток предлагается устранить, приняв координатную индексацию, при которой для составления каталога документов используется система единичных терминов (дескрипторов).

Как только документ поступает в библиотеку, ему приписывается определенный номер, который наносится на все карточки дескрипторов, действительно необходимых для полного распознания данного доклада (соответственно для отличения его от всех других докладов). Например, дескрипторами для вышеприведенного доклада будут слова: горючие вещества, газы, вычисление, топливо, импульс, давление, температура, энтропия, теплосодержание, адиабатичность. Если, например, этот доклад имеет номер 1234, то число 1234 должно стоять и на всех карточках для вышеперечисленных дескрипторов. Клиент, желающий получить информацию по определенному вопросу, предлагает список ключевых слов (дескрипторов), по которым и будет вестись поиск. Цель программирования поисков на машине ИБМ-701 состоит в механизации процедуры поисков и в разработке ежедневной программы библиотечных поисков.

Карточка для каждого дескриптора (имеющая собственный отличительный номер) делится на 10 колонок, нумеруемых цифрами от 0 до 9 включительно. На эту карточку наносятся номера всех тех докладов, в которых фигурирует данный дескриптор, причем номер доклада попадает в ту колонку, номер которой совпадает с его последней цифрой. Внутри каждой колонки дескрипторной карточки номера докладов располагаются столбцом в порядке возрастающих номеров. Грубая схема поиска доклада, содержащего n дескрипторов, сводится к сравнению чисел на n дескрипторных карточках для того, чтобы выявить числа, общие всем этим n карточкам. Процедура сравнения существенно облегчается упорядочением чисел номеров докладов на дескрипторных карточках. Дескрипторные карточки, заготовляемые в виде перфокарт, несущих собственный номер дескриптора вместе с номерами соответствующих ему докладов, переписываются на магнитной ленте в порядке роста собственных номеров дескрипторов. Предусмотрен ввод и стирание новых дескрипторов или новых номеров докладов для каждого дескриптора. Ежедневная программа, включающая до 75 независимых поисков, предусматривает, что заказчик представляет не более 8 дескрипторов, определяющих нужный ему доклад. Эта группа дескрипторов определяет независимый поиск. Дескрипторы поисков, входящих в ежедневную программу (исключая повторения), переносятся с общей ленты на рабочую ленту. Дальнейшая работа проходит только с рабочей лентой. При поиске сравниваются наборы первых двух дескрипторов и выбираются совпадающие номера докладов; затем эти номера сравниваются с набором третьего дескриптора и т. д.; программа может предусматривать выбор номеров, совпадающих в первых 2, 3, 4 и более дискипторах. Выбранные номера подаются на выход машины. Так же проводится вторая и дальнейшие поиски.

При сопоставлении поисковой программы авторы принимали во внимание средние объемы карточек с учетом их естественного прироста в течение нескольких ближайших лет. Для записей на ленте использовалось около 9600 дескрипторов и 14 000 номеров докладов. На 4/3 катушки ленты хранилось до 120 000 единиц информации. Ежемесячно присоединялось около 300 новых чисел докладов. Однако число новых дескрипторов, присоединяемых каждый месяц, было достаточно малым. Предлагаемая авторами библиотечная поисковая программа подразделяется на три следующих друг за другом независимых периода: 1) ввод; 2) поиск и 3) выпуск. Фаза 1) требует для своего осуществления около 6 мин. Время периода 2) варьируется в зависимости от числа дескрипторов в каждом поиске; средняя продолжительность его не превышает 4 мин. Фаза 3) продолжается 1 мин.

В заключение сообщается о предстоящем вводе в эксплуатацию вычислительной машины ИБМ-704 и перестройке библиотечной поисковой программы применительно к этому устройству.

Н. И. Стяжкин, В. К. Финн

7249. **Быстродействующее электронное арифметическое устройство для автоматических вычислительных машин. Надлер** (A high-speed electronic arithmetic unit for automatic computing machines. Nadler Morton), Acta techn. (Ceskosl.), 1956, 1, № 6, 464—478 (англ.; рез. русск.)

Предлагается проект арифметического устройства для работы с 64-разрядными двоичными числами с плавающей запятой. Устройство должно обеспечивать выполнение алгебраического сложения за 9 *мксек*, умножения, деления и извлечения корня — за 23 *мксек*

и содержать примерно 1500 ламп и 25 тыс. полупроводниковых диодов. В каждой операции предусматривается автоматический контроль; длительности операций фиксированы.

55 из 64 двоичных разрядов предполагается использовать для записи мантиссы числа с ее знаком, 7 разрядов — для записи порядка с его знаком, 1 разряд — для контроля по четности и 1 разряд — в качестве признака, отличающего числа от инструкции. Отрицательные числа представляются в виде дополнений.

Для получения высокой скорости сложения предлагается следующий метод. Сначала одновременно по всем разрядам производится суммирование цифр слагаемых без учета переносов из предыдущих разрядов; эти переносы запоминаются специальным регистром. Затем из этого регистра к полученной сумме добавляются цифры переноса в четных разрядах (2-м, 4-м, 6-м и т. д.). При этом цифры переноса в нечетных разрядах могут либо изменяться с 0 на 1, либо оставаться неизменными; случай, когда цифра переноса в нечетный разряд менялась бы с 1 на 0, невозможен. Затем в регистр суммы добавляются цифры переносов в 3-м, 7-м, 11-м и т. д. разрядах; эта операция захватывает только пары разрядов, так как в 5-м, 9-м, 13-м, и т. д. разрядах цифра переноса может либо остаться неизменной, либо измениться с 0 на 1, но не с 1 на 0. Затем к сумме добавляются оставшиеся цифры переносов в 5-м, 13-м и т. д. разрядах, так что сложение 64-разрядных чисел выполняется за 6 шагов. Для ускорения процесса выравнивания порядков слагаемых предполагается ввести цепи сдвига на 1, 2, 4, 8, 16 и 32 разряда, каждой из которых управляет свой разряд разности порядков.

Аналогичные цепи предлагается использовать для повышения скорости выполнения сдвига влево при нормализации результата вычитания. Нормализация начинается со сдвига результата влево на 32 разряда. Если при этом окажется, что за пределы регистра влево вышли значащие цифры числа, то производится сдвиг вправо на 16 разрядов; в противном случае будет выполняться сдвиг влево на 16 разрядов и т. д. Таким образом, нормализация результата, как и выравнивание порядков, укладывается в 6 шагов.

Для контроля правильности операции вслед за сложением (вычитанием) чисел выполняется сложение (вычитание) их дополнений, причем должно получиться дополнение от предыдущего результата.

Умножение предполагается начинать от старших разрядов множителя и выполнять путем чередующихся сдвигов суммы частичных произведений влево и добавлений или вычитаний множимого. В случаях, когда очередной разряд множителя совпадает со следующим, не производится ни добавления, ни вычитания; в случаях, когда очередной разряд множителя есть «0», а следующий разряд есть «1», выполняется вычитание; в случаях, когда очередной разряд есть «1», а следующий есть «0», производится добавление множимого. Такой метод позволяет производить умножение в дополнительных кодах без каких-либо добавочных операций. При сдвиге суммы частичных произведений влево ее старшие разряды возвращаются в освобождающиеся младшие разряды регистра частичных произведений; одновременно по одному уничтожаются младшие разряды множимого, а сигналы двоичного переноса из старшего разряда регистра передаются в младший разряд по цепи циклического переноса.

Для ускорения умножения предлагается в каждом шаге производить не полное сложение или вычитание, а поразрядную операцию (без переносов из разрядов в разряд); образующиеся при этом переносы запоминаются в специальном регистре. В следующем шаге цифры переноса, сохранившиеся от предыдущего шага, складываются поразрядно с цифрами слагаемых (множимого предыдущей суммы частичных произведений), причем цифры суммы выдаются в регистр частичных произведений, а цифры переносов — в вспомогательный регистр, где они хранятся до следующего шага и т. д.

Этот метод описан Берксом (1947 г.) и использован, хотя и с другим объяснением, в множительном устройстве вычислительной машины «МАРК-1» Манчестерского университета. Для контроля умножения операция повторяется, но множимое и множитель меняются местами и от одного из чисел берется дополнение. При этом должно получиться дополнение до предыдущего результата. Для ускорения выполнения операций деления и извлечения корня предполагается применить методы, аналогичные методу ускорения умножения.

В статье имеются опечатки. М. А. Карцев

7250. ЭДСАК-II. Ренуик (EDSAC II. Renwick W.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, **B103**, Suppl. № 2, 277—278. Discuss., 287—288 (англ.)

Краткое содержание доклада о разработке вычислительной машины ЭДСАК II, прочитанного на конференции по цифровой вычислительной технике в Обществе инженеров-электриков (Англия) 11 апреля 1956 г.

Машина — параллельная, работает с 40-разрядными двоичными числами с фиксированной или с плавающей запятой. Оперативная память машины емкостью в 1024 слова (в каждом слове имеется контрольный разряд) и постоянно закоммутированное запоминающее устройство емкостью также в 1024 слова выполнены на ферритовых сердечниках. Вспомогательное запоминающее устройство использует магнитную ленту шириной 12,7 *мм*, на которой имеется 5 рабочих и одна маркерная дорожка. Арифметическое устройство выполнено целиком на лампах и содержит 7 регистров. Устройство управления имеет вид матрицы с ферритовыми сердечниками. В машине используются съемные блоки, содержащие по 50 ламп. Высказывается мнение, что столь большое количество ламп в блоке увеличивает надежность как вследствие уменьшения числа разъемных контактов, так и вследствие уменьшения времени, необходимого для отыскания неисправного блока. Описывается порядок работы оперативной памяти и устройства управления. А. В. Шилейко

7251. ДЭЮКЕ — цифровая вычислительная машина для авиационной промышленности (DEUCE — the digital computer with unequalled aircraft industry «experience»), Interavia, 1955, **10**, № 9, 643 (англ.)

Сообщение фирмы «Инглиш Электрик» (Englisch Electric) о выпуске цифровой вычислительной машины ДЭЮКЕ (DEUCE; РЖМат, 1955, 4740), разработанной применительно к задачам самолетостроения. Работа ДЭЮКЕ характеризуется высокой скоростью, надежностью и простотой программирования. Имеется большая библиотека программ, составленных для решения ряда типовых задач. Машина может быть продана или предоставлена для обслуживания в вычислительных центрах компании. Е. М. Баскаков

7252. Вычислительная машина ДЭЮКЕ (The DEUCE computer), Electr. J., 1956, **156**, № 13, 1012 (англ.)

Сообщение о цифровой вычислительной машине ДЭЮКЕ (РЖМат, 1955, 4740), построенной фирмой «Инглиш Электрик» и установленной в 1956 г. в Лондонском вычислительном центре фирмы «Маркони Хауз» (Marconi House). Запоминающим устройством машины служит магнитный барабан емкостью 250 тыс. двоичных разрядов. Машина предназначена для решения различных задач в области механики и электричества, задач, касающихся транспорта, авиации, гражданского строительства и коммерческих расчетов. Стоимость машины — 45 тыс. фунтов стерлингов.

А. Н. Чуйкин

7253. Вычислительное устройство АКЕ. Ньюман, Клейден (The ACE. Newman E. A., Clayden D. O.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, **B103**, Suppl. № 2, 279. Discuss. 287—288 (англ.)

Сообщение о цифровом вычислительном устройстве типа АКЕ (ACE), строящемся в Национальной физической лаборатории (Англия).

АКЕ представляет собой вычислительное устройство последовательного действия, использующее в качестве запоминающих устройств ртутные линии задержки и накопитель с магнитным барабаном. Ожидается, что быстродействие АКЕ будет по крайней мере в 4 раза лучше, чем у вычислительного устройства ДЭЮКЕ (DEUCE), вследствие чего общая емкость «памяти» у АКЕ в 6 раз больше, чем у ДЭЮКЕ. Предполагается, что скорость работы устройства АКЕ будет сравнима со скоростью вычислительных устройств параллельного действия с запоминающими устройствами на магнитных барабанах.

Запоминающее устройство, состоящее из 24 линий задержки (каждая для 32 чисел), и основной функциональный блок АКЕ работают со скоростью 1,5 млн. двоичных цифр в 1 сек. Длина чисел — 48 двоичных разрядов, простейшие операции требуют 32 *мксек*. Применяется перекрытие операций, благодаря чему скорость выполнения операций может достигать 30 тыс. в 1 сек. Расчетная средняя скорость — от 10 до 15 тыс операций в 1 сек. Имеются независимые блоки умножения и деления. Время умножения 400 *мксек*, время деления 1,5—*мсек*. Перенос данных на магнитный барабан или выборка их с барабана требует 7 *мсек* для блока из 32 чисел и может производиться одновременно с выполнением вычислительных операций. Для ввода и выборки данных в устройстве АКЕ используются перфокарты и магнитные ленты. Приведена блок-схема АКЕ. См. также РЖМат, 1954, 2408, 2752; 1955, 3452.

В. С. Бородин

7254. Дармштадтский электронный вычислительный автомат ДЭРА. Дрейер (Der Darmstädter elektronische Rechenautomat DERA. Dreyer Hans-Joachim), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 51—55, 222 (нем.; рез. англ.)

Описывается электронная вычислительная машина ДЭРА (DERA — Darmstädter elektronische Rechenautomat) Института практической математики Дармштадтской высшей технической школы. Начало работ по созданию машины относится к 1943—1944 гг., когда разрабатывались проекты малых автоматических вычислительных машин с программным управлением. Машина ДЭРА предназначена для научных расчетов и занимает среднее место между машинами специального назначения и цифровыми универсальными быстродействующими машинами. При конструировании главное внимание было обращено не на быстродействие, а на объем обрабатываемых данных. Во многих чертах ДЭРА аналогична машинам Гарвардского университета (МАРК I÷МАРК IV). ДЭРА — одноадресная последовательная машина, работающая как с фиксированной запятой (стоящей слева от старшего разряда), так и с плавающей запятой. Вычисления ведутся с 14-значными десятичными числами кодом с избытком 3: каждая десятичная цифра изображается посредством 4-значного двоичного числа с избытком в 3 единицы. Команды занимают по 7 десятичных разрядов (подчисла). В главном запоминающем устройстве используется магнитный барабан. Скорость вращения барабана 3000 об/мин, диаметр барабана 400 *мм*, ширина 120 *мм*. На барабане имеется 60 главных дорожек (на каждой может быть записано по 50 чисел) для 3000 чисел или 6000 команд и 7 дорожек специального назначения. Записывающие и считывающие головки расположены спирально на поверхности барабана. Зазор головки 50 *мк*. Максимальная скорость считывания для ячейки памяти около 20 *мксек*. Оперативной памятью служит матрица из 5600 ферритовых сердечников для 100 чисел или 200 команд. 56 сердечников, изображающих одно число, составляют строку матрицы; на обеих сторонах монтажной платы 400 × 350 *мм* помещается 50 таких строк. Арифметическое устройство выполнено на германиевых диодах и сопротивлениях. Время сложения (вычитания) 0,8 *мсек*, время умножения 12÷16 *мсек*, время деления 25÷70 *мсек*. Частота основного такта около 200 *кгц*. Потребляемая мощность 8 *квт*. Машина размещена в отдельных стойках с индивидуальным кондиционированием воздуха. Для ввода исходных данных и вывода результатов вычислений применена перфокартная машина, работающая параллельно с ДЭРА. Скорость ввода составляет 80 десятичных разрядов в 0,4 сек, скорость вывода — 92 десятичных разряда в 0,4 сек. Результаты либо перфорируются, либо печатаются. Предусматривается конструирование построителя графиков. Ввод и вывод информации может быть сделан также вручную с помощью электромеханического устройства, работающего со скоростью 7 знаков в 1 сек.

И. Ф. Шелихова

7255. Вычислительные автоматы с программным управлением. Гёцке (Programmgesteuerte Rechenautomaten. Götzke G.), Wiss. und Fortschr., 1957, **7**, № 9, 329—332 (нем.)

Дается обзор современных вычислительных автоматов с программным управлением и последовательной и параллельной передачей сигналов. В частности, рассказывается о матричном запоминающем устройстве в машине ДЭРА (DERA, ФРГ). Устройство выполнено на проволочной сетке, содержащей 2500 ячеек, в узлах которых расположены ферритовые сердечники. Параллельным включением нескольких матричных устройств, получается емкость памяти в 4000 десятичных чисел. Рассматриваются также другие устройства быстрой памяти на электроннолучевых трубках и с магнитной записью. Высказываются соображения о целесообразности замены в вычислительных автоматах электронных ламп на реле и полупроводниковые диоды и триоды.

Ю. И. Ивличев

7256. Система дуального кодирования. Шлезинер (Dual coding system. Schlesinger Stewart I. U. S. Atomic Energy Comm. Repts, [1953], NLA — 1573, 25 pp.) (англ.)

Описывается система дуального кодирования, разработанная для электронной вычислительной машины ИБМ-701 (машины с фиксированной запятой), позволяющая выполнять большое количество вычислений с плавающей запятой. Вся программа интерпретации команд при работе с плавающей запятой занимает 1069 полуячеек памяти. Отличительными особенностями системы дуального кодирования являются: 1) большая легкость перехода от счета с фиксированной запятой к плавающей и обратно в процессе программирования; 2) большое сходство структуры команд с плавающей запятой и стандартных одноадресных команд машины. Операции с плавающей запятой, как и операции с фиксированной запятой, выполняются с 36-разрядными числами. Распределение разрядов следующее: старший разряд — знак значимой части числа; следующие 7 разрядов — положительная экспонента числа (степень десятки); остальные 28 разрядов — значимая часть числа. Нуль в системе записывается нулями в экспоненте и значимой части.

При работе программы интерпретации регистр аккумулятора и регистр MQ рассматриваются как один сдвоенный регистр. В этот сдвоенный регистр поступают числа из памяти; в нем содержатся результаты

всех арифметических и трансцендентных операций; для ряда приказов он является источником данных; в нем запасаются множитель и делитель перед соответствующими операциями. Из него число в форме с плавающей запятой запасается в двух ячейках электростатической памяти h_x (экспонента) и h_a (значимая часть). Знак числа является знаком h_a. При пересылке результата в память в форме с плавающей запятой содержимое этих двух ячеек объединяется.

Выход на программу интерпретации осуществляется совокупностью двух приказов. После этих приказов все операции будут осуществляться с плавающей запятой до тех пор, пока положительный приказ передачи не выведет машину из программы интерпретации к ее обычному состоянию работы с фиксированной запятой. В приказе передачи знаковый (старший) разряд указывает, с какой запятой (плавающей или фиксированной) будут производиться вычисления в следующих за ним по программе операциях. Арифметика адресов приказов всегда идет вне программы интерпретации — для увеличения скорости счета и из-за трудностей, связанных с обработкой адресов при использовании плавающей запятой. Программирование в системе дуального кодирования ничем не отличается от обычного программирования на ИБМ-701.

Ввод данных в форме десятичных чисел с плавающей запятой может быть осуществлен любой стандартной программой ввода, рассчитанной на 10 десятичных знаков числа и позволяющей изменять положение двоичной и десятичной запятой. В числах с плавающей запятой 2 знака занимает экспонента числа (чистая экспонента плюс 50), остальные 8 — значимая часть числа.

Для вывода данных составлена специальная программа, выход на которую осуществляется последовательностью четырех определенных команд.

В ходе вычислений с плавающей запятой значимая часть чисел проверяется на максимальное количество разрядов, экспонента—на минимальную отрицательную и максимальную положительную. В случае нарушения любого из этих ограничений происходит автоматическая остановка. Автоматическая остановка происходит также при извлечении квадратного корня из отрицательного числа и при вычислении обратного гиперболического тангенса числа, большего единицы.

Арифметические операции с плавающей запятой: сложение, вычитание абсолютных величин, умножение и деление — исполняются приблизительно за 2 *мсек*. На передачу числа из памяти в сдвоенный регистр в форме с плавающей запятой требуется около 1 *мсек*. Условные и безусловные переходы исполняются также за время около 1 *мсек*. Указывается, что вычисления с плавающей запятой идут со скоростью, приблизительно в 15 раз меньшей скорости вычислений с фиксированной запятой.

В целях облегчения отладки программ и контроля за ходом решения при работе с плавающей запятой во всех приказах, кроме приказов передачи, используется знаковый разряд. Знаковый разряд в сочетании с положением специального переключателя на пульте управления позволяет либо печатать контрольные данные (приказ, адрес, результат и др.), либо вести вычисления с нормальной скоростью. Кроме того, создана следящая программа на 170 полуячеек памяти. В сочетании с двумя переключателями на пульте управления она дает возможность следить за отдельными приказами с плавающей или фиксированной запятой; при этом также печатаются контрольные данные, относящиеся к контролируемым приказам. З. Д. Доброхотова

7257. Операторные схемы. Свобода, Валах (Operátorové obvody. Svoboda Antonín, Valach Miroslav), Stroje zpracov. inform., 1955, № 3, 247—295 (чешск.; рез. русск., англ.)

Гл. 1 статьи посвящена системам счисления: полиадической, расширенной полиадической и системе классов вычетов. В системе счисления классов вычетов дается определение отрицательных чисел и действий с дробными величинами. В гл. 2 исследуются методы преобразования чисел из системы классов вычетов в полиадическую систему (десятичную и двоичную): преобразование при помощи единичных ортогональных компонент, преобразование при помощи расширенной полиадической системы и преобразование посредством так называемой оценки величины. Принцип последнего метода заключается в переводе оценки данного числа в вспомогательную систему классов вычетов с меньшим, надлежащим образом подобранным периодом. Методы подвергнуты критическому обсуждению с точки зрения математических машин. В гл. 3 определяются основные арифметические действия в системе классов вычетов (сложение, умножение и деление). В гл. 4 вводятся операторы $(+a)$, $(.a)$, $(:a)$, и исследуются их свойства. Оператор $(+a)$ называется «прибавлением a по модулю P». Уравнение (операторное) $x.(+a) = y$ означает $x + a \equiv y \pmod{P}$ при соблюдении условий $x_i + a_i = y_i \pmod{p_i}$ для всех $i = 0,1, \ldots, w$. В гл. 5 рассматриваются операторные схемы и их схемная реализация. Приводится релейная схема для преобразования чисел при помощи оценки. Z. Koutský

7258. Меры к получению более коротких и более наглядных программ для сложных автоматов. Замельсон, Бауэр (Massnahmen zur Erzielung kurzer und übersichtlicher Programme für Rechenautomaten. Samelson Klaus, Bauer Friedrich L.), Z. angew Math. und. Mech., 1954, 34, № 7, 262-272 (нем.; рез.англ., франц.,русск.)

Исследуется структура вычислительных программ для счетных автоматов, сокращение и упрощение которых достигается путем исключения избытка информаций. Показывается, что некоторые систематические процессы для изменения подпрограмм можно выполнять автоматически. Кроме того, приспособляемость командного кода существенно повышается посредством разбиения его на элементарные команды, которые непосредственно могут быть комбинированы. Дается пример командного кода, создаваемого такими элементарными командами. В приложении подробно обсуждается применение методов, служащих для автоматизации процессов изменения. Резюме автора

7259. Система сортировки на магнитном барабане. Кокс, Голдберг (A magnetic-drum sorting system. Cox B., Goldberg J.), IRE Convent. Rec., 1956, 4, № 4, 101—104 (англ.)

Описывается система сортировки электронной вычислительной машины ЭРМА. Входные данные (счета), поступающие беспорядочно, записываются в промежуточный накопитель на магнитном барабане. После прохождения через специальное сортировочное устройство данные в упорядоченном виде переписываются в соответствующее место магнитной ленты. При передаче данных из барабана на ленту различают два этапа: определение наименьшего номера непереданного счета и извлечение из барабана информации, принадлежащей этому счету. Ввод и вывод информации происходит одновременно в различных частях барабана. Приводится блок-схема сортировки и разбирается пример определения наименьшего номера счета.

В. М. Тарасевич

7260. Вычислительные автоматы для официальной геодезической службы. Зейферс (Rechenautomaten für den geodätischen Behördendienst. Seifers), Vermessungstechn. Rundschau, 1956, 18, № 1, 2—9 (нем.)

Высказывается мнение, что для решения задач низшей геодезии (топографии) предпочтительнее применять релейные вычислительные машины, поскольку специфика топографических расчетов (наличие большого числа готовых стандартных программ, обилие вводимых данных и относительная простота вычислений) делает нерентабельным применение автоматических электронных вычислительных машин; механические же вычислительные устройства медленны и дороги. Сообщается о постройке специализированной релейной вычислительной машины СМ-I (SM-I), установленной в Управлении упорядочения земельных наделов в Мюнхене. Второй машиной этого типа является Ц-II (Z-II), построенная в апреле 1956 г. и имеющая по сравнению с первой в 3 раза бо́льшую скорость работы. Указывается, что Ц-II снабжена автоматическим электромеханическим печатающим устройством, приспособленным также и для ввода исходных данных. Приводятся краткие сведения о принципах устройства и работы релейных вычислительных машин. Г. М. Грязнов

7261. **Механическое осуществление моделей мозговой структуры. Уолтер** (Réalisation mécanique de modèles de structure cérébrale. Walter W. Grey), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, 37, 407—420. Discuss, 421 (франц.)

Обсуждается вопрос о возможности моделирования мозговых структур животных или человека. Отмечается, что современное состояние науки не дает возможности предложить достаточно правдоподобное описание строения и работы мозга. Принцип «все или ничего», используемый в двоичной арифметике, только поверхностно напоминает принцип «все или ничего» нервной активности. Высказывается мнение, что отдельные нейроны центральной нервной системы могут иметь такое же отношение к функциональным элементам мозга, как электроны в электронной лампе к процессам усиления или генерирования колебаний. Плодотворным в этой связи оказывается путь построения простых моделей и изучения с их помощью элементов мозговой деятельности.

Рассматривается два типа таких моделей. Простейшей моделью первого типа будет устройство, содержащее два чувствительных органа, реагирующих, например, на свет и на механический контакт, два центральных «нервных» органа (усилители на лампах или реле) и два двигателя, один из которых приводит модель в движение, а другой изменяет направление движения. Модель будет способна выполнять такие действия, как поиск источника света, движение по направлению к источнику и отыскание оптимума. В последнем случае при достижении зоны определенной интенсивности света модель будет двигаться по кругу вокруг источника. При наличии двух одинаково расположенных источников света одинаковой интенсивности модель будет двигаться поочередно от одного источника света к другому. Встречая препятствие, модель обходит его, причем в этом случае все остальные операции невозможны. Когда внутренний источник энергии почти исчерпан, модель приближается вплотную к источнику света и пополняет запас энергии. При этом опять никакие другие операции не выполняются. Рассматриваются также случаи, когда модель «видит» в зеркале отражение источника света, укрепленного на ней самой, и когда имеются две аналогичные модели с двумя укрепленными на них источниками света.

К другому типу относятся «обучаемые модели». Обучаемая модель имеет два чувствительных органа, один из которых реагирует на свет, а второй — на звук. Случаи совпадения светового и звукового сигналов, а также случаи следования одного за другим через короткие промежутки времени отбираются специальной схемой и накапливаются. Если таких случаев оказывается достаточно много, запускается специальная схема, которая в течение некоторого времени делает модель чувствительной к одному только звуковому сигналу. Приводится принципиальная схема такого устройства. А. В. Шилейко

7262. **Обобщение опознания конфигураций в самоорганизующей системе. Кларк, Фарли** (Generalization of pattern recognition in a self-organizing system. Clark W. A., Farley B. G.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 86—91 (англ.)

После краткого описания предложенной ранее (Farley B. G., Clark W. A., Trans. IRE, 1954, PGII-4, Sept., 76—84) самоорганизующей системы рассматривается два опыта над ней. Первый показывает, что самоорганизация имеет место даже в том случае, когда конфигурации входных сигналов подвержены значительным случайным изменениям. Второй опыт показывает, что после самоорганизации системы при помощи фиксированных конфигураций система классифицирует прочие конфигурации входных сигналов статистически, согласно простому критерию предпочтительности. Обсуждается значение этого результата как обобщения опознания конфигураций. По резюме автора

7263. **Программирование опознания конфигураций. Диннин** (Programming pattern recognition. Dinneen G. P.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 94—100 (англ.)

Сообщается об опытах по программированию опознания конфигураций на машине МТК (МТС — Memory Test Computer) Линкольновской лаборатории Массачусетского технологического института.

7264. **Опознание конфигураций и современные вычислительные машины. Селфридж** (Pattern recognition and modern computers. Selfridge O. G.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 91—93 (англ.)

Под опознанием конфигураций понимается отделение существенных особенностей данных от фона несущественных деталей. Обсуждается моделирование процессов опознания конфигураций, в частности опознания букв на цифровых вычислительных машинах. Г. И. Поваров

7265. **Ежегодная перепись вычислительных машин** (Annual computer census), Computers and Automat., 1958, 7, № 5, 8—9; Repr.— Automat. Data Process. Serv. Newsletter, 1958, 3 March (англ.)

Даны результаты переписи цифровых машин США, находящихся в эксплуатации и изготовлении на февраль 1958 г.

1. Большие универсальные цифровые машины

Изготовитель	Тип машины	Изготовлено	Находятся в изготовлении
ИБМ	701	9	0
	702	11	10
	704	72	200*
	705	73	
	709	0	
Ремингтон Рэнд	1101, 1102	10*	0
	1103, 1103A	25*	15
	УНИВАК I	36*	12*
	УНИВАК II	1*	30*
RCA	Бизмак I	3**	0**
	Бизмак II	0	2
Датаматик Корп.	Датаматик 1000	1	7
Филко Корп.	Транзак S-2000	0	4
Берроуз Корп.	Дататрон 220	0	9
	Итого:	241	279

2. Средние универсальные цифровые машины

Изготовитель	Тип машины	Изготовлено	Находятся в изготовлении
ИБМ	650	750	1200
Бендикс Компьютер Дивижн	G-15	104	неизв.
Берроуз Корп.	Дататрон 205	81	70*
Олвак Корп.	Олвак II	2	0
	Олвак III	6	0
	Олвак III-E	29	15
Нэшнел Кэш Раджистер	102	30	0
	303	1	0
	304	0	6
Ремингтон Рэнд	Юнивак Файл Компьютер 0	12*	29*
	Юнивак Файл Компьютер 1	3*	неизв.
Ундервуд Корп.	Элеком 100, 120, 120A, 125, 200	13	0
Риэ Компани	Ридикс	3	1
Монроу Калкьюлейтинг Мэшин Компани	Монробот VII, VIII	2	0
	Итого:	1036	1321

3. Малые универсальные цифровые машины

Изготовитель	Тип машины	Изготовлено	Находятся в изготовлении
ИБМ	604	3500	
	607	350	
	608	1	
	610	0	1500*
	CRC	60*	
	Рамак 305	20	
	Рамак 650	0	
Ремингтон Рэнд	УНИВАК 60 и 120	500*	100*
Берроуз Корп.	E-101	164	30*
Ройял Пресижн Корп.	LGP-30	102	15
Ундервуд Корп.	Электроник Бизнес Компьютер (Элеком-50)	12	10
Монроу Калкьюлейтинг Мэшин Компани	Монробот III, V	2	0
	Монробот VI	9	0
	Монробот IX	0	12
	Итого:	4720	1667
Всего машин всех размеров:		5997	3267

Звездочкой отмечены сведения, полученные по неофициальным подсчетам; двумя звездочками — число вычислительных установок, а не машин.

Эти данные являются частью фактического числа цифровых машин США, так как сюда не включены: а) «один из типов» универсальных цифровых машин для научных и инженерных исследований. Число этих машин около 60 (преимущественно больших); б) все специализированные цифровые машины; в) специальные машины для военных целей, такие, как гигантская вычислительная машина «Сэйдж» (известно о существовании довольно большого количества таких машин); г) машины иностранного производства. И. К. Волков

7266. Запоминающее устройство на магнитных сердечниках (Magnetic core storage unit), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, 3, № 3, 257—260 (Digital Computer Newsletter, 1956, 8, № 3) (англ.)

Фирма «Телеметр Магнетикс» (Telemeter Magnetics Inc.) объявила о разработке буферного запоминающего устройства типа 1092 BU-7 на магнитных сердечниках. Запоминающее устройство имеет емкость, равную 1092 двоичных 7-разрядных кода. Выборка производится параллельно за 14 *мксек*. Информация загружается блоками (блок может быть любого размера от 1 до 1092 чисел).

Информация подается в запоминающее устройство и из него по 7 каналам в виде уровней. Кроме записи и выборки информации, блоками предусмотрен режим работы, позволяющий производить запись кодов или считывание в произвольном порядка. Несколько блоков 1092 BU-7 могут быть объединены при помощи специальных управляющих блоков CU-7, увеличивая тем самым емкость буферного запоминающего устройства.

Устройство потребляет мощность, равную 250 *вт*.

В. Д. Князев

7267. Запоминающее устройство на миллионы двоичных знаков. Трейси (Megabit memory. Trac y R. A.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1957, № T-92, 104—106. Discuss. 106 (англ.)

Описывается новый элемент памяти фирмы «Берроуз» (Burroughs Corp), который, по мнению автора, облегчит создние оперативных запоминающих устройств повышенной емкости (на миллионы двоичных знаков). Новый элемент изготавливается из сверхтонкой ленты магнитного материала с прямоугольной петлей гистерезиса. Ленточные магнитные сердечники имеют следующие преимущества перед ферритовыми:

К реф. 7267 Рис. 1

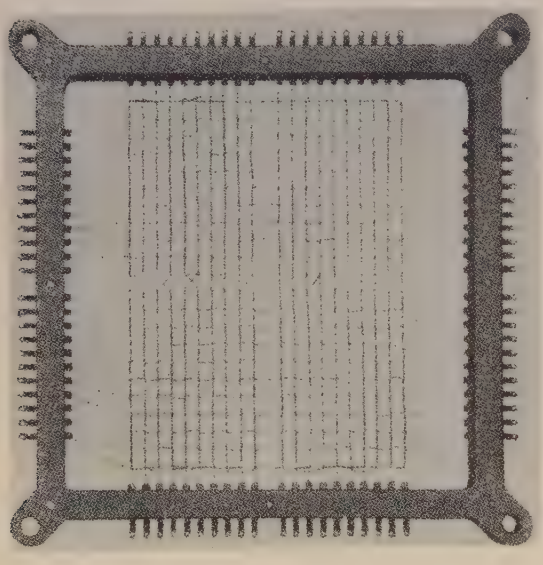
1. Большая прямоугольность и постоянство относительной коэрцитивной силы при переходе от предельного гистерезисного цикла к частным. Работа на частных циклах выгоднее, так как они всегда значительно прямоугольнее предельного. Однако для ферритовых сердечников, по мере перехода на более частные циклы, уменьшается не только их высота (по оси B), но и ширина (по оси H), и работа на более прямоугольных циклах связана с меньшими допустимыми отклонениями канальных токов. 2. Большая температурная стабильность (точка Кюри у ферритов лежит около 200°, у ленточных материалов — не ниже 430°). 3. Меньшая чувствительность к механическим напряжениям (например, к растяжению координатными проводами). 4. Меньший разброс параметров в пределах партии.

Однако сложность и дороговизна намотки сверхтонкой ленты на керамические и тому подобные кар-

касы, а также значительный диаметр сердечника при этом (и большие ампервитки перемагничения) ограничивали возможности применения ленточных сердечников в устройствах, где их требуются тысячи и миллионы, в частности в устройствах памяти.

Новый элемент изготавливался непосредственной намоткой ленты толщиной порядка 3 *мк* (из молибденового пермаллоя 4 — 79) на провода (рис. 1). Лента потом заклеивалась; стабильность диаметра такого «сердечника» обеспечивалась количеством проводов и способом намотки и лежала в пределах нескольких процентов. Такой элемент сохранял все преимущества ленточных сердечников. Так, температурная стабильность была на 70% выше, чем у феррита, отношение сигнал/помеха (для оптимального режима) было вдвое выше; чувствительность к механическому напряжению практически отсутствовала.

Была построена и испытана экспериментальная плоская матрица емкостью 20 × 20 (рис. 2). Производство



К реф. 7267 Рис. 2

таких матриц легко может быть автоматизировано: после укладки (по шаблонам) проводов автоматическое устройство может наматывать в нужных местах сердечники. При необходимости (маловероятной) тот или иной сердечник легко может быть заменен. Благодаря нечувствительности к механическим воздействиям матрица может быть залита какой-либо смолой или составом.

При испытании матрицы в схеме совпадающих токов ставилась задача заменить аналогичную матрицу на ферритах S - 3 (внешний диаметр около 2 *мм*). Канальные токи составляли 150÷170 *ма* (суммарный ток 300÷350 *ма*); время перемагничения 4÷5 *мксек*. Устойчивость к изменениям канальных токов и отношение сигнал/помеха оказалось выше, чем у ферритовой матрицы при таком же выходном сигнале 30÷40 *мв*.

Была использована лента производства Армко (Armco). Внутри партии наблюдался разброс по толщине ленты (т. е. по остаточному потоку) в пределах 10%, разброса по коэрцитивной силе не наблюдалось. Разброс от партии к партии не имеет существенного значения, поскольку партия ленты в 20 *кг* дает до 2 млн. сердечников.

Перед намоткой лента разрезалась на куски по 12,7 *мм*. Число витков не лимитировалось, но получалось порядка 7, при внешнем диаметре 0,5 *мм*. Стоимость материала на каждый элемент составляла 3 цента. Предварительных испытаний элементов не производилось, испытывалась сразу матрица. Указываается, что новый элемент может быть использован не только в самой матрице, но и в токовых формирователях, усилителях считывания и т. д. А. А. Крупский

7268. Использование электромагнитных линий задержки в цифровой вычислительной машине МАРК-2 Манчестерского университета. Томас (The use of electromagnetic delay lines in the Manchester University Mark 2 digital computing machine. Thomas G. E.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, **B 103**, Suppl. № 3, 483—490. Discuss. 535—536 (англ.)

7269. Запоминающие колебательные цепи и ввод-вывод данных в электронной вычислительной машине ГАММА-3. Махери (Speicherschwingkreise und Datenein-und-ausgabe beim BULL-Elektronenrechner «GAMMA 3». Machery R.), Elektron. Rundschau, 1955, **9**, № 10, 369—370 (нем.; рез. англ., русск.)

7270. Запоминающие устройства, используемые в электронных вычислительных машинах. Мотоока, Ямасита, Дэнки цусин гаккай дзасси, J. Inst. Electr. Commun. Engrs Japan, 1956, **39**, № 5, 519—525 (японск.)

7271. Запоминающее устройство на акустических линиях задержки для цифровой вычислительной машины. Фэрклаф (A sonic delay-line storage unit for a digital computer. Fairclough J. W.), Proc. Instn Electr. Engr's, 1956, **B103**, Suppl. № 3, 491—496. Discuss. 535—536 (англ.)

7272. Требование к германиевым диодам для электронных вычислительных машин. Бюлер (Anforderungen an Germaniumdioden für elektronische Rechenmaschinen. Bühler W.), Elektron. Rundschau, 1955, **9**, № 10, 381—382 (нем.; рез. англ., русск.)

7273. Американское устройство вывода для вычислительных машин (American «computer read-out»), Instrum. Practice, 1957, **11**, № 10, 1066—1067 (англ.)

Научными сотрудниками лаборатории «Стромберг — Карлсон» фирмы «Дженерал — Динамик» (США) разработана новая высокоскоростная записывающая установка «Модель-100», в которой в качестве записывающего элемента применена 7-дюймовая трубка «Характрон» типа C_7C_{11}, разработанная этой фирмой. Трубка проектирует на экран цифры и буквы высотой 0,762 *мм*, которые могут фотографироваться со скоростью до 10 тыс. знаков в 1 сек. На экране трубки может быть размещено одновременно до 6500 знаков и букв. За промежуток времени в 2 сек. экран трубки заполняется три раза. При такой скорости за 30 сек. можно воспроизвести 300 страниц текста, содержащих 50 тыс. слов, т. е. около 300 тыс. знаков.

Трубка «Характрон» были названа «электронной пишущей машиной», так как в ней используется поток электронов, проходящий через миниатюрные металлические шаблоны — трафареты для образования контуров знаков, цифр и букв. Поток проектируется на экран, покрытй фосфором, подобный телевизионной трубке. С экрана трубки воспроизводимые буквы и цифры фотографируются специальной камерой на 35-миллиметровую пленку. Фотокамера может производить до 10 снимков в 1 сек.

Высокая скорость работы этой установки в ряде случаев обеспечивает запись, равную скорости вычисления, производимой электронной вычислительной машиной. В. Н. Рязанкин

7274. Магнитное воспроизводящее и печатающее устройство. Симс (Magnetic reproducer and printer. Sims John C., Jr), Proceedings of the

Western Computer Conference (Febr. 1953), New York, N. Y., 160—166 (англ.)

Рассматриваются метод и устройство для печатания данных на бумагу с использованием эффекта притяжения ферромагнитных частиц на поверхность, намагничивающуюся в соответствии с видом печатаемого сигнала.

Метод предназначен для применения в вычислительной технике и назван автором «феррографией». Данные, подлежащие печатанию, подаются в виде напряжения или тока на многоканальную систему магнитных головок, все щели которых касаются одной плоскости. Эта плоскость затем посыпается порошком или поливается эмульсией из специальных «чернил», содержащих мельчайшие частицы ферромагнитного порошка. Частицы «чернил» притягиваются к местам с наибольшей интенсивностью магнитного поля, выявляя находящийся в скрытом виде магнитный рисунок печатаемого сигнала. Затем при помощи одной из трех описанных разновидностей контактного способа рисунок сигнала переносится на обычную бумагу.

Достоинства феррографического способа печатания данных:

1) Значительная простота конструкции всего печатающего устройства по сравнению с обычно используемыми механическими устройствами для печатания данных на перфокарты или специальную углеродную бумагу.

2) Блок головок нового печатающего устройства имеет небольшие габариты. Так, на площади в 1 кв. дюйм (645 *мм*²) размещаются около 100 магнитных головок.

3) Достигается большое быстродействие печатающего устройства — около 10 000 знаков в 1 сек.

4) Печатание производится на обычную бумагу.

5) Гарантируется высокая степень идентичности отпечатков одного и того же сигнала. В. С. Бородин

7275. Совещание по магнитным лентам. Входные, выходные и вспомогательные запоминающие устройства. Уилкс (Session on magnetic tape: input, output and auxiliary storage. Wilkes M. V.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, B 103, Suppl. № 2, 331—332. Discuss. 354—356 (англ.)

Общее рассмотрение возможностей и преимуществ магнитных лент. Сравниваются методы записи звука и методы записи цифровой информации. При записи цифровой информации не обязательно иметь линейную характеристику воспроизводящего оборудования, что облегчает конструирование аппаратуры. К поверхности ленты предъявляются повышенные требования; на ней не должно быть никаких посторонних включений, иначе может получиться ложный сигнал. Уровень сигнала по всей ленте не должен изменяться более чем на 1—2*дб*. В отношении лентопротяжного механизма делается упор не на равномерность хода, а на уменьшение времени разгона или остановки ленты. Оптимальным можно считать время разгона или остановки, равное 10 *мксек*. Обычной скоростью протяжки ленты в настоящее время считается 2,5 *м/сек*. Большое количество информации, выводимой на ленту, требует установления контроля. Наилучшим можно считать программный метод контроля, когда информация, выведенная на ленту, вводится обратно в машину и сверяется с информацией в оперативном запоминающем устройстве. Большинство устройств с магнитной лентой может быть использовано как устройства ввода или вывода данных. В. Д. Князев

7276. Новое устройство перезаписи перфокарт для автоматических вычислительных машин (New «punched card transscriber» for automatic computers), Instrum. Practice, 1957, **11**, № 5, 494, 501 (англ.)

Национальное бюро стандартов США разработало устройство (см. фото), преобразующее числа и команды, записанные на перфокартах, в двоичный последовательный код. Устройство работает в 150 раз быстрее, чем считывающие устройства с бумажной ленты и может обрабатывать до 600 карт в 1 мин. Новый механизм может быть использован для подготовки и ввода данных в вычислительные машины или для перезаписи информации с перфокарт на магнитную ленту. Устройство последовательно воспринимает 80-колонные карты с помощью фотоэлементов и преобразует данные

К реф. 7276

по одной колонке в 4- или 6-значный двоичный код со скоростью 200 карт в 1 мин. Оно состоит из электронного блока и перфоратора. Электронные схемы перфоратора преобразуют данные с карты в напряжения по 14 различным каналам (два канала используются для контроля). Информация с 12 фотоэлементов через вентили поступает в матрицу, которая выдает 6-значный двоичный код в регистр. Данные из регистра можно напечатать или перезаписать прежде, чем будет считываться колонка следующей карты. В электронном блоке используются трансформаторы, усилители с диодными вентилями и линии задержки. Синхронизирующие схемы управляются строб-импульсом, который возбуждается ведущим краем каждой пробитой колонки. Это значит, что поток карт не обязательно должен быть синхронным, а поток данных не обязательно должен быть непрерывным. Устройство имеет запрещающие схемы, позволяющие воспринимать часть данных с карты и перфорировать данные из машины на ту же самую карту. М. С. Саплин

7277. Самописец с преобразованием информации из непрерывной формы в дискретную и снова в непрерывную. Геттингс (Analogue-digital-analogue recording. Gettings H. W.), Automat. Control, 1957, 4, № 4, 20—21 (англ.)

При конструировании самописцев желательно совместить наглядность метода регистрации непрерывно протекающих процессов в виде кривой с точностью дискретного метода регистрации. Такое совмещение достигнуто у самописца типа ADAR, впервые демонстрировавшегося на выставке Института радиоинженеров в Нью-Йорке. Мгновенные значения сигнала, подлежащего регистрации, первоначально преобразуют в восьмиразрядный двоичный код. Затем при помощи специальной диодной матрицы код преобразуется таким образом, что каждому из 256 его значений соот-

ветствует возбуждение одного из 256 каналов. Каждый канал оканчивается пером, фиксирующим точку на электрохимической бумаге. Записывающая головка имеет 260 перьев диаметром 0,125 *мм*, расположенных с плотностью 22 пера на 1 *см*. Опрос входного сигнала и регистрация точки производится с частотой 24 *кгц*, однако система допускает режимы опроса двух сигналов с частотой 12 *кгц* каждого, четырех — с частотой 6 *кгц* и т. д. Каждое десятое перо питается непрерывно и чертит опорную сетку. Конструкция самописца использует печатные схемы и взаимозаменяемые блоки. Точность регистрации получается порядка $\pm$ 0,2%.
А. В. Шилейко

7278. **Система преобразования данных** (Data link system), Automat. Control, 1957, 7, № 2, 42—43 (англ.)

Сообщается о разработке фирмой «Fairchild Camera» устройства для превращения в обычную речь команд, вырабатываемых электронными вычислительными машинами при управлении воздушным движением. Устройство преобразует команды (аналоговые, цифровые или ручные) в последовательность слов, составляющих послание. Слова выбираются из запоминающего устройства, куда они были заранее записаны средствами звукозаписи. Последовательность слов передается на самолет по обычным радиоканалам. Г. И. Поваров

7279. **Кодовые диски** (Code discs), Automat. Control, 1957, 7, № 2, 43 (англ.)

Сообщение фирмы «Болдуин Пиано» (Baldwin Piano Co.) об автоматизированном производстве прецизионных кодовых дисков для преобразователей непрерывных угловых величин в цифровые. На дисках с высокой степенью точности могут быть нанесены двоичные и двоично-десятичные коды синусоидальных, логарифмических и других линейных и нелинейных функций, поддающихся набивке на перфокартах фирмы ИБМ.
Е. М. Баскаков

7280. **Дискретный сервомеханизм. Осима, Томинари** (A digital servomechanism. Oshima Yasuziro, Tominari Noboru), Proc. 6th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1956, Tokyo, 1957, 425—435 (англ.)

Описан сервомеханизм, преобразующий дискретный входной сигнал в угловое перемещение вала двигателя. Входные импульсы вместе с импульсами обратной связи поступают на суммирующий регистр, построенный на двух декатронах. Полученная разность преобразуется в постоянное напряжение и управляет серводвигателем. Импульсы обратной связи вырабатываются фотоэлектронным датчиком, расположенным на выходном валу двигателя. И. К. Волков

7281. **Некоторые направления разработки математических, вычислительных и управляющих машин непрерывного действия. Ушаков В. Б.** Сессия АН СССР по научн.пробл. автоматиз. произ-ва, 1956. Т. 2, М., АН СССР, 1957, 317—333. Дискусс., 344

Представлена классификация математических машин непрерывного действия и кратко описаны электромоделирующие установки общего применения типа МН-7, МН-М и МН-10. Приведены схемы блока перемножения и блока нелинейной зависимости от одной переменной, использующих полупроводниковые диоды и входящих в состав электрической модели МН-М. Приведена блок-схема и кратко описываются основные характеристики и принцип работы машины МН-11, предназначенной для автоматического отыскания заданного решения системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений за счет быстрого «просмотра» ряда решений и выбора среди них решения, удовлетворяющего некоторой сумме поставленных условий. Указывается возможность использования машины МН-11 в качестве анализирующей вычислительной машины, работающей параллельно с процессом или объектом и управляющей им в соответствии с результатами отыскания наилучшего режима. Кратко отмечены основные характеристики электрической модели МН-12, предназначенной для исследования динамики многоклетьевых прокатных станов.

Отмечается большое значение вычислительных устройств, предназначенных для вычисления или контроля комплексных, интегральных или статистических параметров, характеризующих работу объекта или определяющих некоторый заданный режим. К устройствам этого типа относится вычислительное устройство непрерывного действия для определения удельного расхода углерода и характеристики производительности домны. Это устройство решает два нелинейных соотношения, в которые входят независимые переменные, снимаемые с приборов, установленных на доменной печи. Другие примеры — прибор для определения режимов резания, который учитывает до 20 характеристик (в том числе диаметр детали, усилие и скорость резания и т. п.) и специализированные вычислительные машины АТР-1 и АТР-2, предназначенные для выполнения тяговых расчетов на транспорте. Приведены системы уравнений, принципиальная электрическая схема и общий вид прибора для определения режимов резания.

Представлена возможная классификация управляющих вычислительных машин и указано, что автоматическое управление с обратной связью может быть разделено на управление с «последействием», управление с упреждением и управление с оптимизацией. К вычислительным машинам, работающим в схеме управления с последействием, относится аппаратура для автоматического получения постоянного номера холста на трепальной машине и устройство для управления замедлителями вагонов на сортировочной станции. К вычислительным устройствам второго типа относится «автомашинист», обеспечивающий непрерывное решение уравнений движения поезда с учетом реальных условий. Примером системы третьего типа является установка для автоматического управления работой многоклетьевого стана холодной прокатки. И. М. Витенберг

7282. **Состояние и основные направления развития электронного моделирования и автоматики. Трапезников В. А., Коган Б. Я.** Сессия АН СССР по научн. пробл. автоматиз. произ-ва, 1956, Т. 2, М., АН СССР, 1957, 285—316

Указывается на существование двух направлений в применении электромоделирующих устройств: 1) применение электрических моделей для исследования и разработки систем автоматического регулирования; 2) применение средств электрического моделирования в качестве элементов автоматических систем. Приведена классификация систем автоматического регулирования, для исследования которых применяются электрические модели. Отмечается и иллюстрируется примерами возможность использования электрических моделей для определения параметров и структуры систем автоматического регулирования, для проверки и настройки регуляторов в лабораторных условиях и для решения «обратных» задач, заключающихся, например, в отыскании возмущений, действующих на систему, по характеру переходного процесса при известной системе дифференциальных уравнений в начальных условиях.

Представлены основные этапы разработки электрических моделей в СССР и приведены краткие технические характеристики электрических моделей, работающих на постоянном токе и разработанных в МПСА (ИПТ-5, ИПТ-4, МПТ-9, МПТ-11, МН-1, МН-2, МН-7 и МН-8), и ИАТ АН СССР (ЭМУ-1, ЭМУ-2, ЭМУ-3, ЭМУ-4, ЭМУ-5 и ЭМУ-6), в ЭНИН АН СССР (ЭДА)

и ИТМ и ВТ АН СССР совместно с МПСА (ЭЛИ-6). Отмечается отсутствие ясности в выборе состава элементов электрических моделей, в связи с резкими колебаниями числа нелинейных блоков на один интегрирующий блок (0,15 в ЭМУ-6, 0,35 в МН-7 и МН-8, 1,65 в МН-1). Более подробно рассматриваются характеристики электрической модели ЭМУ-8, разработанной в ИАТ АН СССР.

Приведены сравнительные характеристики время-импульсной схемы, электромеханической системы и схемы перемножения, использующей диодные квадраторы, а также характеристики наиболее часто используемых схем для образования функциональных зависимостей и усилителей постоянного тока. Рассматриваются два возможных способа построения усилителей, не требующих стабилизированных источников питания: а) построение усилителей с усилением на несущей частоте; б) построение усилителей с параллельными каналами. Приведена принципиальная схема решающего усилителя 2-го типа и указаны его основные технические характеристики. Отмечаются преимущества замены вакуумных диодов полупроводниковыми, приведены схемы диодных элементов для случаев применения кремниевых или германиевых диодов и вариант общей схемы диодного преобразователя. Представлены основные характеристики тиритового элемента и два варианта схем перемножения, использующих тиритовые квадраторы. Отмечается малая надежность электрических моделей из-за наличия вибраторов в усилителях.

Приведены примеры применения элементов электромоделирующих устройств в системах автоматического регулирования в системе автоматического регулирования скорости поворота экскаватора с целью поддержания постоянной производительности и в системе для изменения установки нажимных валков прокатного стана в зависимости от температуры металла и результатов измерений толщины ленты на выходе прокатного стана. В заключение указываются перспективные направления разработки электромоделирующих устройств. Библ. 17 назв. И. М. Витенберг

7283. Новый вариант электроинтегратора ЭЛИ-12. Нетребенко К. А., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1957, 80. Зап. Матем. отд. физ.-матем. фак. и Харьковск. матем. о-ва, 25, 175—178

Предлагается новая принципиальная схема основного моделирующего блока электроинтегратора ЭЛИ-12, разработанная и испытанная автором в лаборатории электромоделирования ИТМ и ВТ АН СССР. В схеме сохранен прежний принцип интегрирования, но в цепи компенсации применен отдельный усилитель с маломощным выходом, имеющий коэффициент усиления порядка 300—400, благодаря этому второе звено основного блока может быть использовано не только в качестве инвертора, но и как суммирующее устройство. Предусмотрена возможность отключения периодизатора и емкости на входе первого усилителя основного блока, снята емкость связи во втором звене. Указывается, что после модернизации ЭЛИ-12 можно использовать в трех режимах работы: 1) в обычном режиме работы ЭЛИ-12, причем в схеме периодизации могут работать электронные ключи, повышающие надежность схемы, а во втором звене может производиться добавочное суммирование, что приближает возможность ЭЛИ-12 к возможностям моделей структурного типа, не нарушая матричной схемы прибора; 2) в режиме, когда интегратор при закороченной входной емкости работает как устройство на усилителях постоянного тока (при увеличении RC интегрирующих звеньев возможно увеличение масштаба времени и, следовательно, сочетание с реальными объектами); 3) в режиме без периодизации, который позволяет моделировать установившиеся периодические процессы.

Отмечается, что благодаря увеличению коэффициента усиления усилителей существенно улучшилась линейность всех звеньев, в 5—6 раз повысилась стабильность их коэффициентов передачи, увеличилась точность интегрирования и облегчилось подключение к интегратору нелинейных функциональных блоков. Указывается, что затраты на переоборудование прибора ЭЛИ-12 по предлагаемой схеме составят не более 3—5% от его полной стоимости. Г. М. Грязнов

7284. Моделирующее устройство для исследований по ядерной энергии. Мак-Ласки (An analogue computer for nuclear power studies. MacLusky G. J. R.), J. Brit. Nuclear Energy Conf., 1957, 2, № 4, 351—360 (англ.)

Описывается новое моделирующее устройство, построенное в атомном исследовательском центре в Харвеле. Оно должно использоваться для исследования по ядерной энергии и содержит три главные секции: секцию кинетики реактора, секцию системы управления и секцию термической системы. Подробно описывается проект этих секций и их взаимосвязь, и кратко упомянуты некоторые задачи, которые будут изучаться на этом новом устройстве. По резюме автора

7285. Моделирующее устройство для интерполяции при автоматическом регулировании. Мошос (Analog interpolation for automatic control. Moshos George J.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1955, 2, № 2, 83—91 (англ.)

Описывается прибор, который позволяет получить гладкую непрерывную функцию независимой переменной по заданной на перфорированных картах таблице значений функции для равноотстоящих значений независимой переменной. Применяется интерполяция по четырем точкам на основе формулы Ньютона — Бесселя. Используются стандартные вычислительные элементы. Прибор применялся в автоматической системе, управляющей станком для обработки лопаток турбины. А. М. Егоров

7286. Подогрев крыльев самолета горячим воздухом для предотвращения обледенения. Хогер (Intermittent heating of airfoils for ice protection, utilizing hot air. Hauger H. H.), Trans. ASME, 1954, 76, № 2, 287—298 (англ.)

Описывается моделирование процесса теплопередачи крыла самолета, у которого ведущая кромка имеет двойные стенки, при циклическом подогреве его горячим воздухом. Предлагается специальное моделирующее устройство, в состав которого входят электрическая схема, достаточно точно представляющая тепловой баланс при прохождении горячего воздуха вдоль хорды крыла через двойную кромку, а также схема, учитывающая теплоемкость и тепловое сопротивление растущих слоев льда. А. М. Егоров

7287. Моделирующее устройство для вычисления тангенса угла. Престон (An analog computer for the solution of tangents. Preston F. S.), IRE Trans. Electronic Comput., 1955, 4, № 3, 101—106 (англ.)

Дается схема электрического счетно-решающего устройства для вычисления с высокой точностью тангенсов угла от 0 до 90° или углов по данным тангенса. В устройстве используется видоизмененный мост Уинстона с линейными элементами и автоматическое балансирное устройство, сервомотор которого, питаемый от усилителя, перемещает ползунки, непрерывно поддерживая баланс в плечах моста. Элементы вычислительного устройства конструктивно могут быть оформлены в виде отдельных вставных узлов.

А. М. Егоров

7288. Введение в математические машины непрерывного действия (Introduction to analog computers), Nucleonics, 1957, **15**, № 5, 70—71 (англ.)

Дается общее понятие о математических машинах непрерывного действия. Показано, как при помощи операционных усилителей и потенциометров осуществляется сложение, умножение на постоянный коэффициент и интегрирование. Описан способ умножения двух переменных величин при помощи следящей системы. Показана возможность решения дифференциальных уравнений. Кратко описано управление математической машиной непрерывного действия.

А. Н. Чуйкин

7289. Математические моделирующие устройства. Кабеш (Analogové matematické stroje. Kabeš Karel), Slaboproudý obzor, 1956, **17**, № 6, 317—322 (чешск.)

Обзорная статья. Излагаются принципы работы аналоговых машин и методы моделирования основных математических операций.

7290. Общие принципы электронных математических операторов. Ремон (Conceptions générales d'opérateurs mathématiques électroniques. Raymond F. H.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, **37**, 185—208. Discuss. 208—210, 347—354 (франц.)

Излагаются общие принципы, положенные в основу двух электронных аналоговых машин — дифференциальных анализаторов OME-112 и OME-30, французской компании SEA (Société d'Électronique et d'Automatisme). Машины этого типа автор называет «электронными математическими операторами».

Г. И. Поваров

7291. Электрические модели с резистивной бумагой для задач о кручении балки. Накадзава (Electrical analogies with resistive paper for the torsion problems of bar. Nakazawa Hazime), Proc. 6th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1956, Tokyo, 1957, 99—102 (англ.)

Метод расчета напряжений при кручении балок различных профилей моделированием уравнения Лапласа на резистивной бумаге. Точность не менее 3%.

И. К. Волков

7292. Прямое измерение электрического градиента в реографической ванне. Жермен (Mesure directe du gradient électrique dans une cuve rhéographique. Germain P.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 333—340. Discuss. 340 (франц.; рез. англ.)

Предлагается метод прямого измерения электрического радиента в рассматриваемой точке с помощью сдвоенных платиновых электродов. Напряжение порядка нескольких милливольт может быть определено с точностью ±1%. Для градиентов порядка 0,1 *в/см* обеспечивается чувствительность не менее 10 *мкв* и воспроизводимость не хуже ±0,3%. Оборудование работает на частоте 425 *гц* и имеет фон менее 3 *мкв*. Рассмотрены погрешности от различных причин.

И. К. Волков

7293. Электронные вычислительные машины без таблицы умножения. Хершель (Elektronische Rechenmaschinen ohne Einmaleins. Herschel R.), Funkschau, 1957, **29**, № 10, 261—262 (нем.)

Популярная иллюстрированная статья об электронных моделирующих устройствах.

7294. Электромагнитное вычислительное устройство. (Electro - magnetic computer), Process. Control and Automat., 1957, **4**, № 8, 311—312 (англ.)

Предлагается надежное множительное устройство для работы в тяжелых условиях с погрешностью не более 0,5%. Устройство представляет собой тахогенератор переменного тока, выходное напряжение которого пропорционально произведению числа оборотов ротора на аксиальное смещение ротора относительно обмотки статора. Дан ряд возможных технических применений устройства.

И. К. Волков

7295. Моделирующие вычислительные устройства и имитирование. Инджуджян (Calculatrices analogiques et simulation. Indjoudjian D.), Electronique, 1955, № 107, 39—42 (франц.)

7296. Трехполюсник и его использование для прямого решения некоторых тригонометрических задач. Гонсалес-дель-Валье, Кинтас-Кастаньес (Le tripole: son emploi pour la résolution immédiate de quelques problèmes trigonométriques. González del Valle A., Quintas Castañs V.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, **37**, 119—133. Discuss. 208—210, 347—354 (франц.)

7297. Использование электронных моделирующих устройств с моделями на сетках сопротивлений. Карплус (The use electronic analogue computers with resistance network analogues. Karplus W. J.), Brit. J. Appl. Phys., 1955, **6**, № 10, 356—357 (англ.)

7298. Идеальные трансформаторы при синтезе цепей моделирующих устройств. Мак-Нил, Мак-Канн (Ideal transformers in the synthesis of analog computer circuits. MacNeal R. H., McCann G. D.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 16—23 (англ.)

7299. Вычислительная машина для решения задач по флаттеру, построенная на усилителях с малым усилением. Вуд, Хансфорд (A flutter computer with low gain amplifiers. Wood K. E., Hansford I. V.), Electronic Engng, 1955, **27**, № 333, 477—481 (англ.)

7300. Электрическое интегрирование и дифференцирование некоторых обыкновенных функций. Лопиш-да-Силва (A integração e a diferenciação eléctricas de algumas funções usuais. Lopes da Silva Manuel José), Técnica, 1954, **29**, № 241, 413—419 (порт.)

7301. Решение на электрических моделях некоторых нелинейных задач по вибрациям и упругой устойчивости. Берри (Electrical analog solution of certain non-linear problems in vibrations and elastic stability. Berry F. R., Jr. Proc. Soc. Exper. Stress Anal., 1955, **13**, № 1, 1—12) (англ.)

7302. Строение и способ работы интегрирующих установок. Гофман (Aufbau und Wirkungsweise neuzeitlicher Integrieranlagen. I. Hoffmann Hans), Elektrotechn. Z., 1956, **77**, 41—52 (нем.)

7303. Моделирующее вычислительное устройство для ядерных реакций. Шайр (An analogue computer for nuclear reactions. Shire E. S.), J. Scient. Instrum., 1955, **32**, № 10, 391—392 (англ.)

7304. Изограф — электронный прибор для нахождения корней. Чаудхури (The isograph — an electronic root finder. Choudhury A. K.), Indian J. Phys., 1955, **29**, 468—743 (англ.)

7305. Прибор для нахождения линии пересечения двух кривых поверхностей. Бонфильоли (An instrument for finding the line of intersection of two curved surfaces. Bonfiglioli L.) Technion. Israel Inst. Tech. Sci. Publ., 1954/55, **6**, 14—33 (англ.; рез. евр.)

7306. Электрические способы, применяемые для несложных математических операций. Шаламон (Elektrické způsoby prováděni jednoduchých matematických operací. Šalamon Miroslav), Slaboproudý obzor, 1955, **16**, № 3, 126—131 (чешск.; рез. русск., нем., англ., франц.)

В статье приведены простые, менее известные методы получения произведения, степени, частного и извлечения корня измеряемых величин, переведенных на пропорциональные электрические напряжения. При переводе на пропорциональные сопротивления необходимо применение автоматически выравниваемых мостиков при переводе на пропорциональные напряжения — термопар крестообразной формы в соединении с усилителями постоянного тока или кольцевых модуляторов с усилителями переменного тока.

Резюме автора

7307. Логарифмический делитель напряжения. Дыкаст (Logaritmický dělič napětí. Dykast Karel), Slaboproudý obzor, 1956, **17**, № 7, 411—416 (чешск.; рез. русск., нем., англ., франц.)

Во введении приведены вкратце возможные способы расчета четырехполюсника с логарифмическим коэффициентом передачи. Далее автор рассматривает расчет логарифмического делителя для измерения глубины модуляции независимо от напряжения несущей. Для получения постоянства логарифмической передачи был использован делитель на сопротивлениях с последовательно подключаемыми сопротивлениями. Логарифмическая зависимость при этом аппроксимируется ломаной линией. Расчет проверен экспериментально.

Резюме автора

7308. Как избежать применения блоков деления в электронных дифференциальных анализаторах. Фишер (Avoiding the need for dividing units in setting up electronic differential analysers. Fisher M. E.), J. Scient. Instrum., 1957, **34**, № 8, 334—335 (англ.)

Приводится метод, позволяющий в некоторых случаях при решении уравнений на электронном дифференциальном анализаторе избежать операции деления путем введения вспомогательной переменной. Например, при решении уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

вместо производной $\frac{dy}{dx}$ рассматриваются две новые производные $\frac{dy}{dt} = kf(x, y)$ и $\frac{dx}{dt} = kg(x, y)$, где t — время, а k — постоянная величина. После интегрирования получают кривые $y(t)$ и $x(t)$, сопоставляя которые находят решение $y(x)$.

А. Н. Чуйкин

7309. Широкодиапазонный блок умножения для моделирующих устройств, использующий полупроводниковые диоды, и его применение для исследования нелинейных дифференциальных уравнений. Фишер (A wide band analogue multiplier using crystal diodes and its application to the study of a non-linear differential equation. Fisher Michael E.), Electronic Engng, 1957, **29**, № 358, 580—585 (англ.)

Описывается схема электронного аналогового блока умножения средней стоимости, работающего в диапазоне частот до 50 *кгц* с фазовой погрешностью, меньшей 1°. В блоке используются два квадратора, представляющих собой операционные усилители, в цепи обратной связи которых включены функциональные преобразователи на 12 германиевых диодах каждый. Частотная характеристика квадраторов корректируется при помощи подстроечных воздушных конденсаторов.

На вход первого квадратора подаются через посредство суммирующих сопротивлений входные величины x и y и постоянное смещение c. На вход второго квадратора подаются: входная величина x, величина — y, образуемая из входной величины y при помощи усилителя-инвертера, и постоянное смещение c. Настройка ф[illegible]нальных преобразователей обеспечивает получение на выходе первого квадратора напряжения

$$v_1 = a(x + y)^2 + b(x + y) + c,$$

а на выходе второго квадратора — напряжения

$$v_2 = a(x - y)^2 + b(x - y) + c.$$

Значения коэффициентов a и b определяются выбором суммирующих сопротивлений, включенных на входах квадраторов.

На входе блока включен суммирующий усилитель, на входы которого подаются v_2, $-y$ и величина $-v_1$, получаемая из v_1 при помощи усилителя-инвертера. При правильном выборе всех суммирующих сопротивлений выходное напряжение схемы будет пропорционально произведению входных напряжений. В блоке используется пять однотипных операционных усилителей, выполненных на двух лампах типа EF 50 (один каскад усиления и выходной катодный повторитель). Усилители имеют коэффициент усиления 70, полосу пропускания при включении по схеме сумматора более 7 *мгц* и выходное напряжение 13 *в* при выходном импедансе меньше 20 *ом*.

Для проверки линейности блока умножения рекомендуется подавать на один из его входов линейно меняющееся напряжение, а второй вход закорачивать на землю. Измеренная ошибка имеет порядок 0,25%, ее теоретическая величина 0,6%. Для проверки частотной ошибки на один из входов при закороченном втором подают синусоидально меняющееся напряжение. Уход нуля на частоте 50 *кгц* составляет 1,5%.

Подробно описывается методика настройки блока умножения и приводится пример его использования для решения нелинейного дифференциального уравнения. Библ. 10 назв.

А. В. Шилейко

7310. Электронный блок умножения для моделирующих устройств. Калбфелл (An electronic analog multiplier. Kalbfell David C.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, **6**, № 2, 100—103, 125 (англ.)

Приводится описание электронного устройства для умножения двух сигналов, имеющих вид электрических напряжений. Напряжение X воздействует в этом устройстве на частоту мультивибратора, который, в свою очередь, запускает одновибратор. Длительность выходных импульсов одновибратора определяется линией задержки и равна 5 *мксек*. Выходные импульсы одновибратора подаются на емкость, на которой выделяется постоянная составляющая, пропорциональная скважности. Напряжение, управляющее частотой мультивибратора, представляет собой разность этой постоянной составляющей и входного напряжения X. Таким образом, генерируется последовательность импульсов постоянной амплитуды и длительности, скважность которых точно пропорциональна величине входного напряжения X; при $X = 0$ частота следования импульсов равна 100 *кгц*.

Эти импульсы подаются на балансный модулятор и с выхода балансного модулятора — на выход устройства и на пик-детектор. На другой вход балансного модулятора подается напряжение, представляющее собой разность выходного напряжения пик-детектора, пропорционального амплитуде импульсов на выходе модулятора, и входного напряжения Y. Таким образом, на выходе балансного модулятора получается последовательность импульсов, скважность которых точно пропорциональна величине напряжения X, а амплитуда точно пропорциональна величине напряжения Y. Постоянная составляющая их пропорциональна произведению XY и используется в качестве выходного сигнала.

Рассматривается принципиальная схема варианта такого устройства, в которой предусмотрены специальные средства, обеспечивающие удовлетворительную работу во всех четырех квадрантах. Точность работы схемы обеспечивается тем, что напряжение, необходимое для управления частотой модулятора, достаточно мало, а на выходе балансного модулятора имеется усилитель. А. В. Шилейко

7311. Моделирующее устройство для решения алгебраических уравнений высших степеней взвешиванием. Вурцфельд (Analogový stroj na řešení algebraických rovnic vyšších stupňu vážením. Vurcfeld Vaclav), Stroje zpracov., inform., 1955, № 3, 89—100 (чешск.; рез. русск., англ.)

Логический принцип описываемой машины состоит в моделировании вспомогательного уравнения (полученного из исходного уравнения $\sum_{i=0}^{n} A_i x^i = 0$ посредством подстановки $x = k\cos\varphi$, $k > 0$) на материальной системе. Достигая экспериментальным путем (вращением связанных друг с другом дисков) равновесия этой системы, получают решение уравнения. В статье дается описание модели и работы на ней. Z. Koutsky

7312. Использование моделирования для испытания систем. Брэдли (Use process analogs to prove a system. Bradley R. G.), Control Engng, 1956, 3, № 3, 109 (англ.)

Обсуждаются некоторые возможности моделирования. Если известны постоянные времени процесса, то можно построить простой электронный аналог запаздывания, вносимого элементами, не моделируя систему в целом. Приведена схема, являющаяся аналогом некоторых цепей электронного регулятора. В ней имеется независимая регулировка двух запаздываний и учет влияния нагрузки. И. К. Волков

7313. Решение задач линейного планирования с помощью электромоделирующих устройств. Пайн (Linear programming on an electronic analogue computer. Pyne Insley B.), Commun. and Electronics, 1956, № 24, 139—142. Discuss. 142—143 (англ.)

Рассматривается возможность использования электрической модели для отыскания условий максимума действительной функции n переменных вида $Z = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\alpha_k}$ при $x_k \geqslant 0$ и наличии m ограничений вида $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_{jk}} \leqslant 1$, где α_k и a_{jk} — постоянные коэффициенты, $k = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Показано, что эта задача может быть сведена к подстановке на электрической модели системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида $\frac{dx_k}{dt} = \gamma\left(\frac{k}{\alpha_k} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\delta_j}{a_{jk}}\right)$, где γ и k произвольные постоянные, а $\delta_j = 0$, если

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_{jk}} \leqslant 1 \text{ и } \delta_j = 1, \text{ если } \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_{jk}} > 1.$$

В состав электрической модели должны входить интегрирующие усилители, на входы суммирования которых поступают постоянное напряжение, пропорциональное k, и напряжения, пропорциональные δ_j. Усилители снабжены диодами в цепи обратной связи, обеспечивающими выполнение условия $x_k \geqslant 0$. Суммирование членов $\frac{x_k}{a_{jk}}$ производится с помощью суммирующих усилителей, число которых равно числу ограничивающих условий, а напряжения, пропорциональных δ_j образуются с помощью такого же числа усилителей, в цепи обратной связи которых установлены диоды или диод последовательно с источником напряжения. Показана схема соединений n интегрирующих усилителей, m суммирующих усилителей и m усилителей с ограничением, решающая задачу для n переменных при m ограничениях. Приведены соображения по подбору масштабов переменных и выбору величин элементов схемы. Величина k определяет скорость итеративного процесса, причем при больших k система может быть неустойчивой; величина γ определяет скорость движения точки с координатами x_k. В заключении и дискуссии указано преимущество электрических моделей при решении задач с малым числом переменных. И. М. Витенберг

7314. О моделировании задач обтекания со срывом струй. Фильчаков (Про моделювання задач обтікання зі зривом струмин. Фільчаков П. Ф.), Доповіді АН УРСР, 1955, № 5, 440—443 (укр.; рез. русск.)

Излагается методика моделирования плоских задач обтекания со срывом струй на интеграторе ЭГДА с использованием в качестве проводящей среды электропроводной бумаги. Форма свободных струй находится путем последовательных приближений.

Изложение иллюстрировано примером, имеющим теоретическое решение, в котором относительная ошибка при определении силы сопротивления R составила 3,7%. Резюме автора

7315. Применение методов моделирования к расчету и предсказанию ксенонового отравления в ядерном реакторе с большой плотностью потока нейтронов в активной зоне. Мак-Ласки (The application of analogue methods to compute and predict xenon poisoning in a high-flux nuclear reactor. MacLusky G. J. R.), J. Brit. Nuclear Energy Conf., 1957, 2, № 4, 361—365. Discuss., 365—370 (англ.)

Обсуждается процесс ксенонового отравления и его отношение к работе ядерного реактора с большой плотностью потока нейтронов в активной зоне. Описывается моделирующее устройство, которое дает текущее значение ксенонового отравления, и связанное с этим устройством упреждающее устройство, которое может использоваться для планирования будущей работы реактора. Из резюме автора

7316. О применении матриц трансформаторов при исследованиях на модели сети. Эдельман (Über die Anwendung von Übertragermatrizen in Untersuchungen auf dem Netzmodell. Edelmann Hans), Arch. elektr. Übertrag., 1957, 11, № 4, 149—158 (нем.; рез. англ.)

7317. Решение одного дифференциального уравнения. Муллен (The solution of a certain differential equation. Moullin E. B.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1954, 101, Part 1, № 130, 204—206 (англ.)

Рассматривается решение уравнения $\int ay^3\,dx + By = \sin \omega x$ на электрической модели с нелинейными карборундовыми сопротивлениями. Библ. 5 назв. Г. Н. Поваров

7318. Ассоциация по вычислительной технике. Карр III (Association for computing machinery. Carr John W., III), Science, 1957, 125, № 3261, 1306—1307 (англ.)

Заметка об итогах 10-летней деятельности Ассоциации по вычислительной технике в США. Ассоциация, организованная в 1947 г., выросла в международное общество, насчитывающее около 2500 членов. Вместе с Институтом радиоинженеров и Американским институтом инженеров-электриков Ассоциация образует объединенный комитет по вычислительным машинам (Joint Computer Committee). Ассоциация созывает дважды в год конференции в масштабе страны и из-

дает журнал «Journal of the Association for Computing Machinery». Г. Н. Поваров

7319. Вступительная речь [на симпозиуме по цифровым вычислительным машинам]. Хартри (Opening address. Hartree D. R.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 1—4 (англ.)

Отмечается необходимость созыва в Англии новой конференции по вопросам эксплуатации цифровых вычислительных машин и обсуждение быстроты внедрения вычислительных машин для решения математических задач, для промышленного производства и для коммерческих целей. Приводятся рассуждения о путях развития устройств вычислительных машин и программирования. Выдвигается вопрос о необходимости установления твердой терминологии для конструкторов вычислительных машин и для эксплуатационников. А. А. Красилов

7320. Новая электронная машина размером с конторский стол (Nieuwe elektronische rekenmachine van bureauformaat), Chem. weekbl., 1957, 53, № 43, 575—576 (гол.)

В Амстердаме поступила в продажу американская электронная вычислительная машина ИБМ-610, предназначенная для широкого применения. Машина универсальна, малогабаритна, транспортабельна и удобна в обслуживании. Положение запятой устанавливается оператором на пульте и может быть изменено в процессе решения задачи. Машина делает в 1 мин. 214 сложений или вычитаний или 52 умножения или деления. На ней можно отлаживать программы для больших быстродействующих машин. Цена машины 55 тыс. долл., арендная плата 1150 долл. в месяц. А. Д. Закревский

7321. Вычислительные машины — моделирующие и цифровые (Computers — analogue and digital), Power and Works Engng, 1957, 52, № 617, 412 (англ.)

В общих чертах определяется место вычислительной техники в автоматизации производственных процессов и сборочных операций. Приводятся краткая характеристика моделирующих устройств, необходимые условия их применения и дается элементарное понятие о функциях основных устройств электронных цифровых вычислительных машин. Е. М. Баскаков

7322. Новые области применения цифровых вычислительных машин (Digital computers seek new fields), Electronics, 1955, 28, № 11, 10 (англ.)

Краткая заметка о разных применениях цифровых вычислительных машин в США. Упоминается об электронной машине ЭРМА (ERMA — Electronic Recording Machine Accounting) для банковских расчетов, о машине УНИВАК - ЛАРК (UNIVAC - LARC) для комиссии по атомной энергии и об электронных вычислительных машинах для военно-воздушных сил и для железной дороги.

7323. Вычислительные машины. Ваулс (Computers. Vowels R. E.), Electrical Engr and Merchandiser, 1955, 32, № 3, 82—84 (англ.)

Популярная статья. После кратких исторических замечаний характеризуются основные типы электронных вычислительных машин и с помощью наглядных аналогий объясняются принципы их работы.

7324. Проект и конструкция быстродействующего электронного дифференциального анализатора. Бисвас, Чиплункар, Райдаут (The design and construction of a high-speed electronic differential analyzer. Biswas N. N., Chiplunkar V. N., Rideout V. C.), J. Indian Inst. Sci., 1955, 37, № 3, B186—B199 (англ.)

7325. «Языки» цифровых вычислительных машин. Хортон («Languages» of digital computers. Horton A. W., Jr), Bell Labs Rec., 1957, 35, № 9, 338—341 (англ.)

Популярная статья о системах кодирования, применяемых в цифровых вычислительных машинах.

7326. УНИВАК «накалывает» погоду. Крик (UNIVAC pinpoints the weather. Krick Irving P.), Computers and Automat., 1957, 6, № 9, 8—9, 30 (англ.)

Популярная статья о подготовке прогнозов погоды при помощи вычислительной машины УНИВАК-120 фирмы «Ремингтон Рэнд». Сообщается о предстоящем использовании в этой области машины УНИВАК-Файл-Компьютер. Г. Н. Поваров

7327. Передайте Ваши задачи вычислительной машине. Ходж (Give your problems to the computer. Hodge Bartow), Petrol. Refiner, 1957, 36, № 2, 102—105 (англ.)

Рассматривается вопрос о применении цифровых вычислительных машин. Показано, что цифровые вычислительные машины можно использовать для решения задач 5 типов: 1) чисто математических задач (решение алгебраических или дифференциальных уравнений и пр.); 2) учетно-плановых вычислений; 3) задач по математическому моделированию; 4) задач по автоматизации механического труда; 5) задач управления процессами в натуральном масштабе времени. Рассматривается процесс подготовки задачи для ввода ее в машину. Описываются возможные принципы организации группы по проектированию и применению вычислительных машин. А. Н. Чуйкин

7328. По поводу одной столетней годовщины. Человек, который изобрел записывающую счетную машину, — Уильям С. Берроуз (A propos d'un centenaire: l'homme qui inventa la machine comptable enregistreuse: William S. Burroughs), Vie et productiv., 1957, 4, № 10, 29—30 (франц.)

Юбилейная заметка об американском изобретателе счетных машин Уильяме Сьюарде Берроузе (род. 28 января 1857 г.).

7329. Электронные цифровые вычислительные машины. Шпейзер (Die elektronische Zifferrechenmaschine. Speiser A. P.), Techn. Rundschau, 1957, 49, № 20, 5, 7 (нем.)

Популярное изложение основных принципов устройства и работы цифровых вычислительных машин. Приводятся также некоторые схемы машины ЭРМЕТХ.

7330. Электронные машины 6-й пятилетки. Александров В., Радио, 1956, № 11, 3—5

Рассматривается значение современной быстродействующей вычислительной техники (моделирующих устройств и цифровых машин) в научных и инженерных исследованиях и расчетах. Даются фотографии советских универсальных цифровых машин «Стрела» и «Урал», а также электромоделирующих устройств «МН-8», «МН-1» и приводятся основные характеристики этих машин. Г. К. Кузьминок

7331. Электронные вычислительные машины. Майоров Ф. В., Радио, 1955, № 11, 46—49

7332. Последние достижения в области электронных вычислительных машин. Пинкертон (Neuere Entwicklungen elektronischer Rechenmaschinen. Pinkerton J. M. M.), Elektron (Österr.), 1957, № 4, 100—102 (нем.)

7333. Современные цифровые вычислительные машины. Наур (Moderne cifferregnemaskiner. Naur Peter), Ingr-og bygningsvaesen, 1955, 50, № 18, 243—253 (дат.)

7334. Современные цифровые электронные вычислительные машины. Пинолини (Le calcolatrici elettroniche numeriche moderne. Pinolini Franco), Elettronica, 1955, 4, № 4, 159—168 (итал.)

7335. Быстродействующая машина для подсчета рядов Фурье. Драшнар, Линек (Rychlý stroj

pro sčítání Fourierových řad. Drašnar Jan, Línek Allan), Českosl. časop. fys., 1957, 7, № 5, 606 (чешск.)

7336. Электронные вычислители. Англо-американская терминология. Тондорф (Elektronische Rechner. Angloamerikanische Fachwörter. Tonndorf R.), Elektron. Rundschau, 1957, **11**, № 10, 310—313 (нем.; рез. англ., франц.)

7337. Комплексное использование моделирующих устройств и цифровых вычислительных машин в задачах по динамической нагрузке самолетов. Мазельский, О'Коннелл (The integrated use of analog and digital computing machines for aircraft dynamic load problems. Mazelsky B., O'Connell R. F.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 66—72 (англ.)

7338. Принципы устройства электронной цифровой вычислительной машины. Уэрти (Fundamentals of an electronic digital computer. Worthy W. D.), Aircraft Engng, 1955, **27**, № 319, 306—310 (англ.)

7339. Применение электронной вычислительной машины ГАММА-3 к решению сложных математических задач. Песлер (Die Anwendung des Elektronenrechners «GAMMA 3» zur Lösung komplizierter mathematischer Probleme. Pässler H.), Elektron. Rundschau, 1955, **9**, № 10, 362—365 (нем.; рез. англ., русск.)

7340. Требование вычислительной техники к техническому оборудованию. Линдвалл (Computers challenge engineering education. Lindvall F. C.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 41—43 (англ.)

7341. Автоматический перевод печатного кода в импульсы, принимаемые вычислительными устройствами. Дейвидсон, Форчьюн (Automatic translation of printed code to impulses acceptable to computing equipment. Davidson J. T., Fortune R. L.), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 29—33 (англ.)

7342. От счетно перфорационной к электронной информационной машине. Шрётер (Von der Lochkarten — Rechenmaschine zur EDPM — Anlage. Schröter O.), Elektron. Rundschau, 1955, **9**, № 10, 344—348 (нем.; рез. англ., русск.)

7343. Использование цифровых вычислительных машин для получения решений задач по электрическим схемам с переключательными операциями. Денисон, Тейлор (The use of digital computers in obtaining solutions to electric circuit problems involving switching operations. Denison S. J. M., Taylor D. G.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, **B 103**, Suppl. № 1, 35—46. Discuss. 77—83 (англ.)

7344. Расчет трансформаторов с помощью цифровых вычислительных машин. Олдфилд, Мак-Доналд, Дейвис (Transformer design with digital computers. Oldfield J. V., Mcdonald D., Davies M. W. Humphrey), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, **B 103**, Suppl. № 1, 54—58 (англ.)

7345. Применение цифровой электронной машины для расчета силовых трансформаторов по заданным техническим условиям. Мур, Дьюбок, Зафир (Application of a digital computer to the design of power transformers to specification. Moore C. L., Duboc W. T., Zaphyr P. A.), Commun. and Electronics, 1956, № 24, 134—137. Discuss, 137—138 (англ.)

Причинами для перехода к расчету силовых трансформаторов с помощью электронной цифровой машины послужили: 1) необходимость сокращения времени расчета силовых трансформаторов от 1000 *квт* и больше, вытекающая из того, что технические требования к подобным трансформаторам равно, как и требование сокращения цикла производства, становились все более жесткими, а расчет усложнялся и удлинялся; 2) стремление в возможно более короткие сроки использовать улучшение стали, изоляции, что требовало быстрых всесторонних, исчерпывающих исследований, которые могли быть лучше всего выполнены с помощью расчетов на машине. Для расчета трансформаторов авторами был выбран метод «проб и ошибок», как наиболее простой и широко распространенный в инженерной практике. Начальные значения рассчитываемых параметров, от реальности которых зависит число последующих итераций, необходимых для получения приемлемых параметров, определялись по эмпирическим уравнениям, основанным на исследовании современных конструкций трансформаторов. Ввиду большого количества итераций возможны колебания, обусловленные перекомпенсацией рассчитываемого параметра. Чтобы устранить такую возможность, разработанная программа предусматривает сравнение с предыдущими условиями и переход к другому методу компенсации.

Для расчетов использовалась электронная цифровая машина ИБМ-701. Программа, содержащая 3600 инструкций и 1000 отдельных данных, разделена на 16 подпрограмм, которые вводятся в электростатическую память одиночно и автоматически по ходу расчета. Деление на подпрограммы выполнено в тех точках, в которых процесс может вернуться к повторению (итерации).

В электростатической памяти машины, кроме выполняемой подпрограммы, содержатся наиболее часто встречающиеся константы, запоминается число итераций, содержатся команды, необходимые для предотвращения колебаний. На магнитных барабанах записываются различные таблицы и промежуточные результаты. На магнитной ленте записаны целиком все 16 подпрограмм.

Для вычисления элементарных функций применялись стандартные подпрограммы. Ввод исходных данных (согласно техническим условиям на трансформатор) осуществляется с помощью 6 перфокарт, набиваемых оператором. После их нагрузки расчет производится автоматически.

Управление машиной может осуществляться дистанционно. В этом случае расчетное учреждение и машина связаны с помощью приемопередатчика через телефонную сеть. Информация принимается и выдается при этом на перфокартах.

В статье приведена блок-схема программы. По мнению авторов, с помощью этой программы могут быть рассчитаны 62% трансформаторов, предусмотренных американскими стандартами. Рассчитываются двухобмоточные трансформаторы от 750 до 20000 *квт*, с импульсной прочностью до 350 *кв* включительно. Авторы утверждают, что некоторые дополнения к программе позволят рассчитывать трехобмоточные трансформаторы, автотрансформаторы, трансформаторы меньших и больших мощностей. Время расчета на машине ИБМ-701 составляет 3÷12 мин. Выигрыш в скорости по сравнению с «ручным» методом расчета в 100 раз. В. А. Редько

7346. Вычислительные машины решают производственные задачи. Рубинфин, Льюис (Computers solve production problems. Rubinfien David, Lewis Ralph F.), World Oil, 1957, **144**, № 4, 70—72, 77 (англ.)

Популярная статья. Указывается ряд учетно-плановых и бухгалтерских задач, которые могли бы быть решены при помощи вычислительных машин: распределение прибылей, управление материальным снабжением, распределение капиталовложений, составление отчетов и т. д. Указывается также ряд технических задач, связанных непосредственно с нефтяной промышленностью: анализ сейсмических данных, изучение состояния резервуаров, решение задач геологи-

ческой съемки и т. д. Приводятся ориентировочные цены на системы обработки данных или величина месячной арендной платы. Большие системы могут быть приобретены примерно за 1,5 млн. долл. или арендованы за 20—35 тыс. долл. в месяц. Для средних систем эти цифры составляют соответственно 300 тыс. и 3,5—12 тыс. долл., для малых — 60 тыс. и 300—2000 долл. В. Д. Князев

7347. Вычислительные машины ускоряют проектирование шоссе. Гудж (Digital computers speed highway design. Goudge Michael), Engng and Contract Rec., 1957, 70, № 6, 76—80 (англ.)

Проектирование шоссе сопровождается трудоемкими вычислениями, особенно на стадии земляных работ. При разбивке шоссе незначительные изменения в ширине обочин дороги резко сказываются на объеме земляных работ. Исследование различных вариантов ширины обочин ограничивается стоимостью и временем ручного вычисления. Использование вычислительных машин для проектирования дорог в Канаде было незначительным, хотя некоторые дорожные отделы изучали такие возможности. В США при проектировании автострады использовалась вычислительная машина Bendix G - 15, при помощи которой произведен расчет профиля дороги на 3-мильном участке за один час. При ручных расчетах на это требовалось 320 чел.-час. Расчет на машине дает 15-кратную экономию средств при проектировании. В. М. Тарасевич

7348. Автоматическое вычисление постоянных уравнения Антуана для капроновой и каприловой кислот и сложных метиловых эфиров. Роз, Аччарди, Джонсон, Сандерс (Automatic computation of Antoine equation constants.Caproic and caprylic acids and methyl esters. Rose Arthur, Acciarri Jerry A., Johnson R. Curtis, Sanders W. W.), Industr. and Engng Chem., 1957, 49, № 1, 104—109 (англ.)

Сообщается о применении вычислительной машины КПК (CPC) фирмы ИБМ к вычислению постоянных уравнений Антуана для различных веществ по экспериментальным кривым (упругость—температура их паров).

7349. Применение цифровых вычислительных машин в автомобильной промышленности. Нимс (Digital computer applications in the automative industry. Nims Paul T.), Proc. Sympos. Industr. Applic. Automat. Comput. Equipm. Jan. 1953, Kansas City, Mo., Midwest Res. Inst., 1953, 146—161. Discuss. 161—162 (англ.)

Описывается опыт применения цифровой вычислительной машины КПК (CPC) фирмой «Крейслер» (Chrysler Corp.). В первое время после получения вычислительной машины фирма проводила на ней уже известные, хорошо проверенные расчеты: расчет формы кулачков распределительных валиков, гармонический анализ вибраций двигателя и т. п. После освоения работы на машине фирма стала ставить более серьезные задачи: был разработан способ вычисления критических скоростей участков вала, начато изучение проблемы движения автомобиля по каменистой дороге и т. д. Приводится список задач и время, затрачиваемое на их решение: конструирование кулачков заняло 4 часа, расчет данных для конструирования валов — 8 час., анализ термодинамики двигателя — 3 часа, таблицы для конструирования зубчатых передач — 200 час. Даются примеры машинного решения некоторых задач. В. Д. Князев

7350. Станки с цифровым управлением в Англии. Колс (Les machines à commande numérique en Grande — Bretagne. Coales M.), Automatisme, 1957, 2, № 9, 326—330 (франц.)

Обзор применения в Англии станков с цифровым управлением. Отмечаются основные области применения: 1) изготовление макетов при конструировании 2) изготовление малых серий сложных деталей, например трехмерных кулачков; 3) изготовление калибров и шаблонов (в том числе трехмерных) для копировальных станков; 4) изготовление матриц. Ставится вопрос о том, что изготовление деталей массового производства, например лопаток газовых турбин, было бы экономичнее проводить на копировальных станках, а шаблоны для них изготовлять на станках с цифровым управлением. При всех условиях автор считает наиболее важным использование станков с цифровым управлением на малых предприятиях, которые при этом получают возможность изготовлять малые серии калибров, шаблонов и т. п. для больших предприятий.

Описывается система цифрового управления станком фирмы «Ферранти». Она включает в себя электронную цифровую вычислительную машину, получающую данные с перфоленты и выдающую рассчитанные координаты профилей в форме цифровых записей на магнитной ленте. Машина может обеспечить данными большое количество станков. Измерительные элементы станка используют линейки с дифракционными решетками, имеющими 20, 100 или 200 линий на 1 *мм*. А. В. Шилейко

7351. «Центральный оперативный диспетчер» — электрический мозг конечной железнодорожной станции. Д'Аванцо (D. C. O.: cervello elettrico, dell' ultimo capostazione. D'Avanzo Giuseppe), Sci. e vita, 1957, 9, № 103, 25—29, 77 (итал.)

Описано полноавтоматическое оборудование крупного железнодорожного узла, получившее название «Центрального оперативного диспетчера» (Dirigente Centrale Operativo). Устройство, установленное на станции Болонья, обслуживает 600 поездов в день. А. В. Шилейко

7352. Современная техника регулирования как структурная задача. Оппельт (Die moderne Regelungstechnik als ein Strukturproblem. Oppelt W.), MTW-Mitt., 1957, 4, № 4, 212—218 (нем.)

Указывается, что в современной теории автоматического регулирования получил широкое распространение метод структурного анализа и синтеза систем автоматики. Кратко рассматриваются свойства отдельных звеньев систем регулирования, дается понятие о структурных схемах, функциях передачи, временных переходных функциях и частотных характеристиках отдельных звеньев и синтезируемых из них систем. Отмечается, что для решения задач динамики наиболее перспективно использование моделирующих устройств структурного типа. Указывается, что структурный подход к проблемам регулирования может быть распространен и на процессы в живом организме (поддержание постоянства температуры тела, давления крови и т. п.), в экономике и других областях. Утверждается, что теория регулирования вырастает из узкотехнических рамок и приобретает более общее значение, как один из разделов кибернетики. Г. М. Грязнов

7353. Методы экстремального регулирования. Моросанов И. С., Автоматика и телемеханика, 1957, 18, № 11, 1029—1044 (рез. англ.)

Рассматриваются основные методы экстремального регулирования. Приводится классификация систем по способу поиска экстремума. На примере релейных экстремальных систем показываются особенности расчета автоколебательных режимов.

Даются краткие рекомендации по практическому использованию систем. Резюме автора

7354. Основные направления разработки вычислительных устройств для автоматических систем. Фельдбаум А. А., Сессия АН СССР по научн., пробл. автоматиз. произ-ва, 1956, Т.2. М., АН СССР, 1957, 169—184. Дискус., 184—189, 190—209

Доклад на сессии АН СССР. Изложены общие вопросы автоматических систем с вычислительными устройствами: направления разработки, классификация, задачи теории и методика разработки.

Предлагается следующая классификация автоматических систем: системы без обратной связи, системы с обратной связью обычного типа (системы автоматического регулирования), самонастраивающиеся системы. Последние определены как системы, в которых анализируется характер процесса на выходе объекта и в случае отклонения от заданных требований производится поиск воздействий, параметров или структуры системы, обеспечивающих желаемый характер процесса. Подчеркивается, что принцип обратной связи является основным в автоматическом управлении, поэтому классификация автоматических систем должна отражать степень усложнения реализации этого основного понятия.

Вычислительные устройства для автоматических систем подразделяются на командные, обработки информации, компенсирующие и регулирующие. Командные вычислительные устройства используются в качестве задающих элементов автоматических систем, например при автоматизации металлообрабатывающих станков. Вычислительные устройства обработки информации предназначаются для анализа работы системы и выдачи человеку-оператору сведений о необходимом управляющем воздействии. Компенсирующие вычислительные устройства служат для выработки сложных сигналов компенсации возмущений объекта управления. Регулирующие вычислительные устройства определяют управляющее воздействие на основании результатов предшествовавшего поведения объекта и заданного закона управления.

На основании предложенной классификации автоматических систем рассмотрено применение вычислительных устройств в системах автоматического регулирования и в самонастраивающихся системах.

В системах автоматического регулирования вычислительные устройства предназначаются для обеспечения надлежащих задающих воздействий, установившихся процессов, переходных процессов. Особо выделяется класс оптимальных систем автоматического регулирования, в которых некоторый критерий качества — оптимизируемая величина — принимает экстремальное (в условиях существующих ограничений) значение. Оптимальные системы автоматического регулирования характеризуются оптимальным регулированием установок либо оптимальными процессами (установившимися или переходными). В качестве примера кратко рассмотрен вопрос оптимизации систем по быстродействию. Различаются оптимизируемые величины 1-го рода, где оптимизируемая величина есть непрерывная функция времени и в любой момент требуется обеспечить ее экстремальное значение, и оптимизируемые величины 2-го рода, где значение оптимизируемой величины зависит от протекания единичного процесса в целом (например, время регулирования, энергия, затраченная за время плавки в печи). Аналогично классифицируются два рода возможных ограничений. Задачу оптимизации в оптимальных системах автоматического регулирования решают вычислительные устройства.

В самонастраивающихся системах особенности применения вычислительных устройств определены тем, что здесь, в отличие от систем автоматического регулирования, анализ состояния системы в данный момент времени не позволяет судить, в каком направлении следует производить изменение воздействий, чтобы получить требуемые результаты управления. В связи с этим автоматический поиск соотношений, удовлетворяющих определенным условиям, определен как отличительный признак самонастраивающихся систем.

Как важнейший класс самонастраивающихся систем выделены системы автоматической оптимизации — системы, в которых некоторая величина автоматически приводится к экстремуму (при наличии ограничений), причем функциональная связь между этой величиной и входными переменными системы в точности неизвестна, но может быть измерена. Простейшим примером систем автоматической оптимизации являются системы экстремального регулирования, например система регулирования двигателя, в которой автоматически обеспечивается максимум мощности на валу.

Утверждается, что системы автоматической оптимизации можно рассматривать как автоматы, решающие вариационные задачи. Указано, что системы автоматической оптимизации, как и оптимальные системы автоматического регулирования, могут быть классифицированы по типу оптимизируемых величин и ограничений. Кратко рассмотрены возможные методы автоматического поиска в системах автоматической оптимизации: слепой, с анализом промежуточных результатов, поиск при наличии дополнительных указаний либо приближенной теории, поиск при наличии точной теории. Сравнение отдельных методов не приводится, обращается только внимание на ограниченность и быстроту поиска как на предмет сравнения. Указано, что самонастраивающаяся система может являться блоком оптимальной системы автоматического регулирования. Работая в убыстренном темпе, она будет находить оптимальные управляющие воздействия.

Основные задачи теории, по мысли автора, состоят в разработке методов синтеза оптимальных систем автоматического регулирования и разработке методов анализа и синтеза самонастраивающихся систем, в первую очередь систем автоматической оптимизации. Результаты, полученные при решении первой из указанных задач, не исчерпывают рассматриваемой области. Решение второй задачи отсутствует. Из числа проблем, связанных с ее решением, указываются: обеспечение сходимости поиска. задача построения системы автоматической оптимизации с расчетом получить наибыстрейший процесс оптимизации (величины 1-го рода) либо получить оптимизацию на наименьшее число шагов — проб (величины 2-го рода) — задача оптимизации поиска, учет влияния случайных помех.

К числу теорий или концепций, которые могут образовать фундамент единой теории, пригодной для исследования самонастраивающихся систем, автор, в частности, относит: понятие степени организации системы, построенное на теоретико-информационной основе, теорию «обучаемых» моделей для автоматов, методы исследования операций и связанное с ними линейное программирование, теорию игр. В основе разработки вычислительных устройств для автоматических систем различаются задача синтеза схемы вычислительного устройства и разработка удовлетворяющей эксплуатационным требованиям аппаратуры. Рассмотрены вопросы, связанные с решением первой задачи. Методы разработки схем вычислительных устройств сведены в три группы: теоретические; основанные на применении электронных вычислительных машин и электронных моделей; основанные на построении и применении спациальных вычислительных устройств для расчета и синтеза проектируемых систем.

В дискуссии автор подчеркивает, что даже простейшая самонастраивающаяся система обнаруживает черты, которые на соответствуют самой сложной системе автоматического регулирования. Структура первой из них отлична от структуры второй и принципиально более сложна. По мысли автора, поиск требует принципиально иного математического аппарата для

рассмотрения автоматических систем. Высказывается предположение, что даже в самых простых случаях самонастраивающихся систем придется иметь дело с уравнениями в частных производных.

М. М. Симкин

7355. Некоторые принципы построения и вопросы теории самонастраивающихся систем автоматического управления. Солодовников В. В., Сессия АН СССР по научн. пробл. автоматиз. произ-ва. 1956. Т. 2, М., АН СССР, 1957, 143—167. Дискус. 167—169, 190—209

Изложены принципы построения и некоторые вопросы теории самонастраивающихся систем с рассмотрением конкретных осуществленных систем. Определив самонастраивающую систему как систему автоматического управления, обладающую свойством самостоятельно отыскивать в процессе своей эксплуатации и приобретаемого при этом опыта оптимальный или требуемый режим работы и изменять свои внутренние динамические свойства таким образом, чтобы оставаться вблизи этого режима при изменяющейся окружающей обстановке и других возмущающих факторах, автор подразделяет самонастраивающиеся системы на два класса: 1) с заранее заданной структурой, не изменяющейся в процессе работы; 2) со случайными (в той или иной степени) структурой и параметрами, приходящими в соответствие с окружающей обстановкой по мере приобретаемого системой опыта.

Из систем 1-го класса рассмотрена система, самонастраивающаяся в зависимости от мгновенных значений входного сигнала и случайной помехи. Дан метод вычисления оптимальных характеристик этой системы (т. е. характеристик, обеспечивающих наилучшее воспроизведение входного сигнала при наличии помех). Рассмотрена самонастраивающаяся система с регулятором, основанным на принципе моделирования объекта. В системе применяются быстродействующие корреляторы для определения «текущей» импульсной переходной функции, в соответствии с которой изменяются динамические свойства модели при помощи следящих систем.

В качестве примера самонастраивающихся систем 2-го класса рассмотрены гомеостат Эшби и одна самонастраивающаяся система со случайной структурой.

Гомеостат Эшби является системой со многими обратными связями, которую не нужно рассчитывать на устойчивость, ибо она всегда с течением времени на основе своего собственного опыта достигнет устойчивости. Система работает на принципе генерирования всех возможных ответов и отбора из них правильного ответа. Самонастраивающаяся система со случайной структурой мыслится как устройство, включающее в себя ряд первичных, вторичных и т. д. систем для изучения входного сигнала с точки зрения его регулярности и выработки программы управления. Первичная система приспосабливается к входу, регулярности которого проявляются в виде регулярностей в реакции и, следовательно, в управляющем действии первичной системы. Вторичная система отыскивает программу, соответствующую регулярной составляющей в управляющем действии в первичной системе, и берет на себя управление, как только ее программа оказывается в успешном соответствии с регулярной составляющей. Регулярные изменения в программах управления вторичной системы сами проявляются как регулярности в управляющем действии третичной системы, которая отыскивает программу, соответствующую регулярной составляющей в управляющем действии вторичной системы, и т. д. Библ. 14 назв.

П. В. Тихонов

7356. Какой должна быть машина для перевода с одного языка на другой. Бут (The nature of a translating machine. Engineering papers at the British Association Meeting. Booth Andrew D.), Engineering, 1956, 182, № 4722, 302—304 (англ.)

Излагается содержание доклада, прочитанного автором 4 сентября 1956 г. на ежегодном собрании Британской ассоциации. Рассматриваются проблемы, возникающие при автоматическом выполнении цифровой вычислительной машиной перевода с иностранного языка.

Основной проблемой является емкость внутренней памяти, необходимой для хранения словаря, которая у существующих типов машин недостаточна для адэкватного перевода. Одним из путей решения этой проблемы служит метод деления слова на «основу» и «окончание». «Основой» здесь называется бóльшая часть слова, общая для всех или по крайней мере для большинства родственных ему слов. Запоминающее устройство машины делится на две части, в одной из которых хранятся основы, а в другой окончания. В процессе поиска код иностранного слова вычитается последовательно из хранящихся в памяти основ. Если одно из таких вычитаний будет иметь результатом 0, искомое слово точно соответствует найденному. Слова хранятся в памяти в порядке возрастания представляющих их чисел. Поэтому в общем случае знак результата вычитания будет положительным, если искомое слово предшествует данному, и изменится на отрицательный в момент нахождения нужного значения.

При помощи окончания во второй части запоминающего устройства находится не значение его, а грамматическая справка о роде, числе, лице и т. д. Таким образом, n основ и m окончаний, могущие составить $n \cdot m$ различных слов, требуют для хранения $n + m$ ячеек памяти.

Поиск нужного слова производится в такой последовательности. Сначала выбирается слово, представляемое числом, равным половине максимального числа. Если результат вычитания положителен, искомое слово находится в первой половине всех слов; тогда исследуется число, равное четверти максимального, и т. д. Наибольшее количество попыток, необходимое для отыскания нужного слова, равно $\log_2 p$, где p — полный объем словаря.

Проблема выбора нужного омонима решается путем введения в машину указания на область, из которой взят данный текст. Идиоматические выражения переводятся путем отыскания характерных для них «ключевых» слов, для которых имеется специальный словарь. Задача введения грамматических правил соответствует введению команд в вычислительную машину. Самостоятельной проблемой является различная длина слов, не дающая возможность рационально использовать память. Рассматриваются способы введения материала в машину путем непосредственного чтения оригинала, а также непосредственно с голоса.

В заключение приводятся параметры переводной машины, которые, по мнению автора, могут быть получены в ближайшие 5—10 лет. Среди них: емкость внутренней памяти порядка 20—60 тыс. слов; длина слова порядка 250 двоичных разрезов (это дает возможность записывать в одном слове различные значения и грамматические справки); простое арифметическое устройство, выполняющее только сложение, вычитание и сдвиг; входное устройство, непосредственно читающее напечатанные буквы; выходное печатающее устройство, работающее со скоростью около 1000 строк в 1 мин.; скорость перевода порядка 10 слов в 1 сек.

А. В. Шилейко

7357. Состояние проблемы механического перевода в Италии. Чеккато (Il contributo italiano al problema della traduzione meccanica. Ceccato Silvio), Methodos, 1956, 8, № 31, 213—220 (итал.)

Анализируется состояние проблемы машинного перевода в Италии. Отмечаются трудности, стоящие перед машинным переводом: отсутствие в одном языке понятий, имеющихся в другом, неоднозначность отдельных слов и др. Высказываются некоторые рекомендации по преодолению этих затруднений. В. В. Добронравов

7358. **Перевод с другого языка посредством электроники. Клив, Захаров** (Language translation by electronics. Cleave J. P., Zacharov B.), Wireless World, 1955, **61**, № 9, 433—435 (англ.)

7359. **Использование вычислительной машины как механического словаря. Кендру** (Use of a computing machine as a mechanical dictionary. Kendrew J. C.), Nature, 1955, **176**, № 4490, 984 (англ.)

7360. **Кибернетика и индустрия. Дюкрок** (Cybernetique et industrie. Ducrocq Albert), Industrie, 1955, **9**, № 6, 397—400 (франц.)

7361. **Механическая вычислительная машина непрерывного действия для гармонического анализа и синтез функций одной или нескольких переменных. Хоппе, Панке** (Eine mechanische Analogierechenmaschine für die ein- und mehrdimensionale Fouriersynthese und-analyse. Hoppe W., Pannke K.), Z. Kristallogr., 1956, **107**, № 5-6, 451—463 (нем.)

Приводится описание устройства и принципа работы механического гармонического синтезатора-анализатора функций одной или нескольких переменных, построенного совместно Физико-химическим институтом Мюнхенской высшей технической школы, Минералопетрографическим институтом Швейцарской высшей технической школы в Цюрихе и финансировавшим работу Немецким научным обществом (ФРГ). Устройство предназначается для расчетов диаграмм плотности распределения электронов при структурном анализе кристаллов, для определения интерференции волн на поверхности жидкостей и в газах и для других приложений, связанных с применением гармонического анализа и синтеза. Принцип работы устройства в качестве гармонического анализатора основан на вычислении коэффициентов ряда Фурье по ряду дискретных значений ординат анализируемой кривой, получаемых либо с графика функции, либо по таблице значения функции для равноотстоящих значений аргумента. Число таких значений может равняться 24, 48, 96 и (при использовании специального устройства) 192. Это позволяет вычислять коэффициенты ряда Фурье, соответственно до 12-го, 24-го, 48-го и 96-го порядков. Указывается, что процесс вычислений занимает всего несколько минут и обеспечивает точность, достаточную даже при высоких требованиях к проводимым расчетам. При работе прибора в качестве гармонического синтезатора функций одной или нескольких переменных по заданному ряду Фурье результат получается в виде кривой, выдаваемой графическим регистратором. Прибор имеет 24 отдельных суммирующих устройства и устройства установки членов ряда Фурье. Синтез функций двух переменных осуществляется полуавтоматически либо способом трех таблиц, либо способом частных сумм. Указывается на возможность синтеза функций трех и более переменных.

Отмечается, что механический гармонический синтезатор имеет преимущества перед аналогичными электрическими или оптическими устройствами благодаря своей эксплуатационной надежности, отсутствию помех и более высокой точности работы.

Г. М. Грязнов

7362. **Интегрирование произведения, проведение синтеза Фурье и решение подобных задач сочетанием квадратного планиметра и нового прибора. Меддьеши** (Szorzatintegrálás, Fourier-szintézis és hasonló feladatok elvegzése kvadratplaniméter és egy új készülék kombinációjának segítségével. Medgyessy Pál), A magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl., 1954 (1955), **3**, № 1-2, 129—137 (венг.; рез. русск., англ.)

Представленный автором механический прибор может найти применение для следующих целей: 1) его сочетание с квадратным планиметром может служить для интегрирования произведений двух функций, заданных в графическом виде; 2) отдельно можно прибором провести синтез Фурье и подобные синтезы. Все эти задачи решаются проще, чем общепринятыми приборами. Из резюме автора

7363. **Применение устройства для сортировки перфорированных карточек к анализу Фурье. Морино,** Нихон буцури гаккайси, 1956, **11**, № 7, 286—289 (японск.)

7364. **Корневой планиметр. Краковский** (Planimetr pierwiastkujacy. Krakowski Zenon), Pomiary, automat. kontrola, 1955, **1**, № 2, 46—49 (польск.)

Описывается выпущенный в Польше планиметр для вычисления интеграла $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r}\, d\varphi$. Планиметр предназначен для обработки показаний манометрических расходомеров.

См. также: 6379, 6396, 6397, 6436, 7186

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Авдеев Н. Я. 6740, 6756
Айнола Л. Я. 6835 Д
Александров В. 7330
Александров П. С. 6380
Алексеева О. П. 6764
Алексидзе М. А. 7240 Д
Андрианов Г. Н. 6751
Андрунакиевич В. А. 6559 Д
Анђелић Т. П. 7059
Аржаных И. С. 6813
Асао 6994
Астряб О. М. 6403
Ахиезер Н. И. 6860
Ахмедов К. Т. 6916
Ашкинузе В. Г. 7167

Б

Баврин И. И. 6654
Багратуни Г. В. 7238 К
Бандић И. 6667
Банковская Н. А. 6781
Белый Б. Н. 6402
Берман С. Д. 6492
Берштейн И. 6663
Биркган А. Ю. 7190
Бирман К. Р. 6376
Бирман М. Ш. 6728
Бицадзе А. В. 6744
Божоров Е. 6846
Болтянский В. Г. 6581
Бондарев А. Л. 7081 К
Боревич З. И. 6501
Боровиков В. А. 6561
Будак Б. М. 7188
Букреев Б. Я. 7088
Булавко А. Г. 6466
Булах Б. М. 6788
Буров В. Н. 6618
Бурьян В. Ю. 6469

В

Вайнштейн Л. А. 6808
Ван Шоу-жэнь 6950
Вентцель Т. Д. 6765
Виленкин Н. Я. 6837
Виноград Р. Э. 6682
Вознюк Л. Л. 6710
Волосов В. М. 6716
Вольская Я. 6738
Воронцова Л. М. 6392 К

Г

Галимов К. З. 7068 Д
Гаусс К. Ф. 7238 К
Гельман А. Е. 6700
Глазман И. М. 6860
Гнеденко Б. В. 6354
Головин О. Н. 6380
Горбунов А. Д. 7188
Горелов Д. Н. 6789
Грегуш М. 6699
Гробман Д. М. 6682
Грубин А. Н. 6803
Гу Чао хао 7153—7155
Гюнтер Н. М. 6416 К

Д

Дахия С. А. 6400
Джавадов М. А. 7161—7163
Джемс-Леви Г. Е. 7234
Драгунова Т. Е. 6515
Драпкин А. Б. 6743

Е

Евдокимов В. Т. 6381
Ёлкин Ю. Г. 6495, 6525, 6526
Ефремов Е. П. 6697

Ж

Жданов Г. А. 7239 Д
Жекулин А. С. 7071
Железнов Е. И. 6718 Д

З

Задирака К. В. 6713
Зелькина О. С. 6361
Зерагия П. К. 7183
Зингер А. А. 7005 Д
Золотарев В. М. 6952
Зорій Л. М. 6706
Зубов В. И. 6704

И

Ильин В. А. 6741, 6742, 6757
Истомин Н. В. 7069 Д

К

Канторович Л. В. 6586
Карпеченко Ф. Т. 7062
Картвелишвили Н. А. 7039
Карубэ 6567
Киселев А. А. 6726
Клубович К. В. 6787
Клямко Э. И. 7178
Коган Б. Я. 7282
Козманова А. А. 6746
Козулин Ю. Н. 7199
Конторович П. Г. 6519
Кордуняну К. 6759
Коровкин П. П. 6615, 6843
Костомаров Д. П. 6696
Кочев В. 6377
Кошелев А. И. 6734
Красносельский М. А. 6707
Крёбер Г. 6374
Крейн С. Г. 6772
Крокос С. И. 7058
Крумм Л. А. 7209
Кубенский А. А. 6583 Д
Кузьмин Р. О. 6416К
Куклес И. С. 6681
Кухар В. М. 6403

Л

Ладыженская О. А. 6726
Ларионов Б. А. 7212
Лебедев В. И. 7189
Левин В. И. 6766 К
Лемлейн В. Г. 7160 Д
Либерман Ю. М. 6807
Лидский В. Б. 6692
Лиман М. М. 6405
Лим Рюн-Чиль 7241 Д
Линник Ю. В. 6927, 6933, 6989
Лопшиц А. М. 7133 К
Ло Цзин-бо 7012
Лумисте Ю. Г. 7151 Д, 7157
Любимов А. Н. 7189, 7190
Ляпин С. Е. (ред.) 6417 К
Ляпунов А. А. 6836

М

Мазмишвили А. И. (ред.) 6371 Ж
Майоров Ф. В. 7331
Макаров Ф. П. 6462
Малаховская Р. М. 6861
Малышев А. В. 6431
Мамедов Ш. Р. 6619
Манолов С. 6775
Малышев А. В. 6431
Мамедов Ш. Р. 6619
Манолов С. 6775
Марков О. О. 6845
Мартынов А. В. 6963
Масуяма 6485
Матвеев И. В. 6614
Минасян Р. С. 6737
Миронов В. Т. 6626
Митропольский Ю. А. 6708
Мищенко Е. Ф. 6709
Моисеев Н. Н. 6772
Монахов В. Н. 6822
Монахов Н. М. 6823
Морино 7363
Моросанов И. С. 7353
Мотоока 7270
Муратов Л. М. 6844
Мурзаев Е. А. 6364

Н

Нагаева С. В. 6966 Д
Народецкий М. З. 6885
Натанзон В. Я. 7202
Несмеянов А. Н. 6352
Нетребенко К. А. 7283
Никитин Б. Д. 6817
Никулин Г. М. 6776
Нилов Г. Н. 6470, 6471
Норден А. П. (ред.) 7091 К

О

Охоцимский Д. Е. 6832

П

Пайвин А. У. 6840
Паровиченко И. И. 6566
Перов А. И. 6680
Пикус Д. Л. 7073
Погорелов А. В. 7159 К
Покорный В. В. 6820
Понтрягин Л. С. 6712
Попова Н. В. 6634
Потапов М. К. 7235
Пхакадзе А. 7061 К

Р

Ремез Е. Я. 6617
Решетняк Ю. Г. 7170
Римский-Корсаков Б. С. 6859 Д
Розин Л. А. 7191

С

Сантало Л. А. 7133 К
Сахнович Л. А. 6694
Сверчковский С. 6596
Свидерский В. И. 6374
Се Бан-цзе 6532
Себровкина К. В. 6382
Севастьянов Б. А. 6951
Сидоров Ю. В. 6736
Скачков Б. Н. 6714
Смирнов В. И. 6411К — 6414 К
Смирнов С. В. 7235
Соболев С. Л. 6385
Солодовников А. С. 7140, 7141
Солодовников В. В. 6360, 6799, 7355
Спасский А. Ф. 6410
Стрелков С. П. 7179
Струмилин С. Г. 6993
Студнев Ю. П. 6947
Су Бу-цин 7145
Сырецкий М. И. 6404
Сюй И-чао 6539
Сюй Ли-чжи 6426

Т

Тагути 6994, 7021
Таками Э. 6777
Такэути 6862, 6864—6867
Тартаковский В. А. 6670
Тарьян Р. 6958
Темко К. В. 6600
Темляков А. А. 6652, 6653
Тодд Дж. 7237
Трапезников В. А. 7282
Троицкий В. А. 6778

У

У Гуан-лэй 7136
Уствольская Т. И. 7223
У Чжо-цюнь 6689
Ушаков В. Б. 7281

Ф

Фан Дэ-чжи 7120
Фельдбаум А. А. 7354

Фільчаков П. Ф. 6666, 7314
Фиников С. П. 7135
Флексер М. Ш. 6730
Фридлендер В. Р. 6723

Х

Харасахал В. Х. 6703
Хаяси 6758
Хисинума 7032
Хованский Г. С. 7230
Ходжаев Л. Ш. 6801
Хуан Вань-ли 6983
Худай-Веренов М. Г. 6683
Ху Хэ-шэн 7134
Хэ Цзо-сю 7012

Ц

Цай И. П. 6800
Цалюк З. Б. 6925 Д

Ч

Черкасов И. Д. 6931
Чупона Г. 6491
Чушкин П. И. 7192
Чэнь Вэнь-юань 6917
Чэнь Юн-хэ 6658, 6659

Ш

Шахно К. У. 6418 К
Ширинбеков И. М. 6801
Шмыдт З. 6760
Шрагин И. В 6825
Шулипенко О. И. 6457
Шутов Э. Г. 6522 Д

Э

Эйдельнант М. И. 7031
Эйлер Л. 6391 К
Энеев Т. М. 6832

Ю

Юань Чжао-дин 7184

Я

Яглом И. М. 7133 К
Ямасита 7270

A

Abel N. H. 6557 К
Abhyankar S. 7106
Abian S. 6529
Abreu Faro M. J. de 6881, 6882
Acciarri J. A. 7348
Ackermann W. 6422
Adám A. 6502
Adams K. M. 6880
Afriat S. N. 6483
Allik K. 7229
Al-Salam W. A. 6838, 6857, 6858
Amemiya I. 6903
Amstutz P. 7217
Andree R. V. 7057
Antohi-Teodorescu V. 6729
Apfelbeck A. 6798
Apostol T. M. 6848 К
Arens R. 6651
Arsove M. G. 6656
Arthur G. R. 6957
Ascoli G. 6655
Atkinson F. V. 6698
Auslander M. 6531, 6534
D'Avanzo G. 7351
Aymerich G. 6773

B

Babuška I. 6359
Backes F. 7124
Bagemihl F. 6563
Bähler W. T. 7045
Baiada E. 6826, 6827
Ballabh R. 6745
Banaschewski B. 6498
Barbălat I. 6711
Barbilian D. 6449
Barna B. 7213
Barnard G. A. 6961
Barnes W. E. 6530
Barnett I. A. 6529
Barrer D. Y. 7033, 7034
Basu D. 6978
Bauer F. L. 7258
Baxter G. 6956
Behrens E.-A. 6553
Bellman R. 7009, 7011
Benado M. 6541—6543
Berg L. 6613
Bergström R. M. 7065
Berkson J. 6975
Bernier M. J. 7038
Berry F. R., Jr 7301
Bévierre P. 6790
Bhaskaran M. 6440
Bieri H. 7173
Billiet A. 7037
Billingsley P. 6945
Binet F. E. 6928
Birkhoff G. 6628, 6904
Biswas N. N. 7324
Blanchard R. 7085
Blaschke W. 7130
Blundon W. J. 7168
Boccioni D. 6513
Bochner S. 6948
Böck H. S. 7053
Bock R. D. 6934
Bompiani E. 6358
Bonfiglioli L. 7305
Booth A. D. 7356
Borel A. 6510, 6569
Borovikov V. A. 6562
Bororvka O. 6387
Bwein D. 6854
Bottema O. 6678, 7064
Bouligand G. 6752
Bowker A. H. 7023
Bracken R. H. 7248
Bradley R. G. 7312
Bragard L. 7063
Braga Rego G. 6887
Brandes L. G. 6407
Breiman L. 6964
Bremmer H. 6877 К
Bromberg H. 7245
Brousse P. 6624
Brown G. 7186
Brusotti L. 7095
Buchsbaum D. A. 6534
Bühler W. 7272
Burgat P. 6748
Burton R. C. 6990

C

Caianiello E. R. 7060
Calapso M. T. 7119
Camphausen E. 7214
Capel C. E. 6570
Cardamone G. 6826
Carlitz L. 6434, 6473, 6857, 6858
Carr J. W. 111 7318
Carruccio E. 6419
Cartan H. 7158
Casal P. 6677
Casci C. 6785
Cassan 7055
Castoldi L. 6761
Ceccato S. 7357
Cellitti C. 6432
Chakravarty N. K. 6876
Châtelet A. 6362
Chern Shiing-shen 7152
Cherubino S. 6468
Chevalley C. 6508, 6558 К
Chiplunkar V. N. 7324
Chong F. 6918
Choudhury A. C. 7164
Choudhury A. K. 7304
Chow Tse-Sun 6783
Chow Wei-Liang 7110
Christian R. R. 6584
Chuang Chi-tai 6642
Church P. T. 6565
Ciorănescu N. 6750
Ciucu G. 6962
Clark W. A. 7262
Clayden D. O. 7253
Cleave J. P. 7358
Climescu Al. 6516
Clodic M. 7099
Coales M. 7350
Coers H. 6446
Cohen A. C., Jr 6987
Cohen H. 6571
Cohn H. 6436—6438
Conner P. E. 6577, 6747
Connor W. S. 6990
Constantinescu C. 6641
Corduneanu C. 6705
Court N. A. 7077
Cox B. 7259
Cristescu R. 6894
Crouch R. B. 6505
Crow E. L. 6988
Crupi G. 6809
Császár A. 6589
Curtis M. L. 6578

D

Danese A. E. 6856
Darling D. A. 7026
Davidson J. T. 7341
Davies M. W. H. 7344
Davis H. T. 6673
Davis R. C. 6997
Day M. M. 6892
Deaux R. 7093, 7099
Debever R. 7143, 7144
Debrunner H. 7172
Del Pasqua D. 6915
Denison S. J. M. 7343
Denis-Papin M. 6477, 6478
Deprit A. 6888
De Sloovere H. 6829
Des Raj 7018
Desroches L.-J. 6365
Diaz J. B. 6719
Di Bari E. 7082 К
Di Berardino V. 7200, 7201
Dickey D. 6407
Dieudonné J. 6509
Dinculeanu N. 6897, 6898
Dinneen G. P. 7263
Dionísio J. J. 6482, 6524
Dolph C. L. 6814
Donoghue W. F., Jr 6905
Donsker M. D. 6956
Douglas J., Jr 7187
Dowker C. H. 6575
Drašnar J. 7335
Dreyer H.-J. 7254
Dubec A. 6398
Duboc W. T. 7345
Ducrocq A. 7360
Dunnington G. 6393 К
Dvoretzky A. 6930
Dwinger Ph. 6547, 6550
Dyer E. 6572
Dykast K. 7307

E

Eckert J. P. 7243
Edelmann H. 6782, 7316
Edge W. L. 7104
Edwards R. E. 6906
Eggleston H. G. 7176 К
Ehrenfeucht A. 6420, 6421
Ehrenpreis L. 6914, 6922
Ehresmann C. 7156
Elias P. 7029
Erdös P. 6597, 6623, 6930

F

Fabian V. 6968, 7203
Facciotti G. 7080
Fairclough J. W. 7271
Fan Ky 6486
Fantappié L. 6724
Farley B. G. 7262
Feit W. 6494
Felscher W. 6548
Ferguson W. E. 6396
Fiedler M. 7210
Filimon I. 6821
Finzi A. 6725
Fisher L. R. 6363
Fisher M. E. 7308, 7309
Fleming W. H. 6828
Fodor G. 6594
Ford L. R., Jr 7017
Forsythe G. E. 6396
Fortet R. 6944
Fortune R. L. 7341
Fox C. 6875
Frame J. S. 6878
Frangu R. 7132 К
Fréchet M. 6943
Freund J. E. 6976
Friedman A. 6657
Frölicher A. 7146
Fukami T. 7137
Fuller F. B. 6580

G

Gallarati D. 7107
Gans D. 7116
Garnir H. G. 6739
Geiringer H. 7066
Geri G. 7205
Germain P. 7292
Gerstenhaber M. 6503, 6504
Gettings H. W. 7277
Ghizzetti A. 6621
Ghosh N. N. 7165
Gillman L. 6595
Girardelli L. 7201
Gispert H.-G. 6834
Gobert J. 6739
Godeaux L. 7100, 7101, 7103
Goldberg J. 7259
Gomide F. M. 6887
González del Valle A. 7296
Goormaghtigh R. 7072, 7074
Gorn S. 6436
Götzke G. 7255
Goudge M. 7347
Gouyon R. 6886
Greenspan D. 7182
Guérindon J. 6527
Guiraud J.-P. 6664
Gumowski I. 6770

H

Hackett F. E. 6423
Hadwiger H. 7172, 7174
Hájek J. 6971
Haley K. B. 7010
Hall P. 6399
Hämmerlin G. 6796
Hanin M. 6793
Hansford I. V. 7299
Harder E. L. 7265
Harley B. I. 6979
Hartree D. R. 7319

Härttäg W. 6458
Hauger H H. 7286
Haupt O. 7169
Hausbrandt S. 7215
Hayashi K. 6660
Healy M. J. R. 7221
Heinrich H. 7222
Helfenstein H. G. 7175
Helgeson W. B. 7013
Henstock R. 6868
Herrera R. B. 6490
Hersch J. 6662
Herschel R. 7293
Herszberg J. 7109
Hewitt E. 6520, 6912
Heyting A. 6409
Hilberry C. B. 6397
Hironaka H. 7096
Hochstrasser U. 7242 Д
Hodge B. 7327
Hodges J. L., Jr 6970
Hoffmann H. 7302
Hoffmann T. R. 7226
Hofmann J. E. 7075
Hofmann O. 6433
Hoppe W. 7361
Hörmander L. 6754, 6755
Horton A. W., Jr 7325
Howe G. 6370 К
Hsu L. C. 6426
Hsu Yi-chao 6539
Huebsch W. 6582
Hughes D. R. 7166
Hunter J. 6435

I

Ikenberry E. 6977
Indjoudjian D. 7295
Infeld L. 6923
Ingleton A. W. 6479
Inzinger R. 6395
Isbell J. R. 6556
Ishihara S. 7137
Ishii Y. 7138
Italiani M. 7098
Iversen T. A. 7048
Izumi S. 6591, 6602, 6604, 6612, 6616

J

Jackson J. R. 7035
Jacobsthal E. 6441—6444
Jain S. C. 7185
Jaiswal J. P. 6874
Janet M. 6768 К
Jessel M. 6812
Johnson N. L. 6986
Johnson R. C. 7348

K

Kabeš K. 7289
Kadeřávek F. 6383
Kakutani S. 6930
Kalbfell D. C. 7310
Kamat A. R. 6984
Kamke E. 6488, 6717 К
Kanamaru T. 7231
Kanno K. 6606, 6607
Kanold H.-J. 6427, 6448
Karl H. 6364
Karplus W. J. 7297
Karteszi F. 7089
Karush W. 7044
Katayama M. 6611
Kaufmann A. 6477, 6478
Kawata T. 6946
Keller H. B. 7195
Kempthorne O. 6982
Kendall M. G. 6985
Kendrew J. C. 7359
Kennedy P. B. 6601
Kennedy P. B. 6601
Kesten H. 6998
Khamrui S. R. 6665, 6792
Kleinfeld E. 6538
Klingenberg W. 7087
Klotter K. 6684
Knichal V. 6386
Kobori T. 6771
Kolberg O. 6425
Komatu Y. 6627, 6629
Kondo J. 6833
Konijn H. S. 6991
Korányi A. 6644
Korevaar J. 6637
Kosambi D. D. 6935
Kövári T. 6640
Krakowski Z. 7364
Krall H. L. 6839
Kraśnodębski R. 7236
Kraus G. 6959
Krick I. P. 7326
Krishnan V. S. 6549
Krumhaar H. 6695
Krygowski Z. 6523
Kucharzewski M. 6590
Kuipers L. 6675
Kulik S. 6467
Kumar R. 6872, 6873
Kumari S. 6610
Kwo T. T. 7013
Kynch G. J. 6797

L

Lampard D. G. 7043
Lang S. 7114
Lariviere R. 7079
Laugwitz D. 7148
Lee Yung-hwa 6891
Lehmann E. L. 6970
Leja F. 6625
Lense J. 6645
Leray J. 6720
Levin J. J. 6715
Lévy P. 6953
Lewandowski Z. 7171
Lewis R. F. 7346
Lindvall F. C. 7340
Línek A. 7335
Littlewood J. E. 6691
Littman W. 6791
Livesay G. R. 6576
Lopes da Silva M. J. 7300
Lovass — Nagy V. 6487 К
Love E. R. 6919
Lucaroni R. 7094
Ludwig C. B. 7247
Lukacs E. 6643, 6941
Lundquist S. 6686

M

McCann G. D. 7298
McCarthy P. J. 6452
MacColl L. A. (Ed.) 7056 К
Mcdonald D. 7344
MacDuffee C. C. 7142
Machery R. 7269
Mack C. 7040, 7041
Mackenzie J. K. 7204
MacLusky G. J. R. 7284, 7315
MacNeal R. H. 7298
Maddox J. L. 7246
Mallows C. L. 6936, 6939
Mampel K. L. 6831
Mandelbrojt S. 6620
Mandelbrot B. 7050
Manning J. R. 7047
Marcus F. 7127
Marinescu G. 6921
Martinelli E. 7083 К
Marx I. 6733
Masotti Biggiogero G. 7131
Mathews P. M. 6955
Matsushima Y. 6546
Matsuyama N. 6602, 6603
Mautner F. I. 6914
Mazelsky B. 7337
Medgyessy P. 7362
Meinardi J. J. 7007
Menger K. 6622
Meulenbeld B. 6675
Meyer C. 6453 К
Míčka J. 7220
Mikolas M. 6429
Mikusiński J. 6474
Miller D. G. 6544
Miller R. A. 6459
Milloux H. 6378
Minari R. 6771
Mincer J. 7022
Miranda C. 6753
Mires K. C. 6401
Mișculescu D. 7092 К
Moessner A. 6445
Moisil Gr. C. 6672, 6762
Montroll E. W. 6949
Moonan W. J. 6969
Moór A. 6830
Moore C. L. 7345
Moore P. G. 6937
Moran P. A. P. 6992
Morimoto H. 6702
Morita K. 7232
Moshos G. J. 7285
Moullin E. B. 7317
Mourier E. 6944
Muracchini L. 7150
Murphy T. 7040
Mycielski J. 6507

N

Naddeo A. 7052
Nadler M. 7249
Nagai T. 7139
Nagami K. 6574
Nagumo M. 6763
Nakamura M. 6554
Nakano S. 7115
Nakazawa H. 7291
Naur P. 7333
Nehari Z. 6632
Netanyahu E. 6632
Newman E. A. 7253
Newman J. R. 6369 К
Neyman J. (Ed.) 6999 К—7002 К
Nicoară G. 7092 К
Nijenhuis A. 7146
Nims P. T. 7349
Nockemann R. 6679
Nolfi P. 7006

O

Obláth R. 6384
O'Connell R. F. 7337
Ogasawara T. 6908
Oldfield J. V. 7344
Olds E. G. 6996
Opial Z. 6625
Opluštil K. 6540
Oppelt W. 7352
D'Orgeval B. 7105
Oshima Y. 7280
Ostrowski A. 6481, 7208
O'Toole J. B. 7246
Ozawa M. 6650

P

Palais R. S. 6508, 6568
Pall G. 6486
Pallu de La Barrière R. 6909, 6924 Д
Panc V. 7206
Pandres D., Jr 6842
Panella G. 7108
Pannke K. 7361
Parameswaran M.R. 6851, 6853, 6855
Parkus H. 6786
Parodi M. 7117
Parzen E. 6942, 6967, 7027
Pascual M. J. 6668
Päsler H. 7339
Pati T. 6852
Pearson E. S. 6979
Pedersen K. 7181
Peirce W. H. 7198
Perel W. M. 6514
Peremans W. 6545
Pérez A. 6929
Pettis B. J. 6893
Pfanzagl J. 7024
Pichler O. 7207
Pignedoli A. 6816
Pinkerton J. M. M. 7332
Pinolini F. 7334
Pirani F. A. E. 7067
Piranian G. 6564
Plebański J. 6923
Pohm A. V. 7266
Poitou G. 6454 Д
Popa C. 6357
Popov B. S. 6669
Popovici C. P. 6450, 6451
Potters M. L. 6671
Pötzl H. 6959
Prasad B. N. 6852
Preston F. S. 7287
Preston G. C. 6500
Prior A. N. 6424 K
Putnam C. R. 6701
Pyne I. B. 7313

Q

Quintas Castañs V. 7296

R

Rado R. 6480, 6597, 6598
Radziszewski K. 7171
Rahman Q. I. 6636
Ramakrishnan A. 6954
Rangarajan R. 6972
Rao C. R. 6639
Raśković D. 6774
Rauch H. E. 6647—6649
Ray D. 6965
Raymond F. H. 7290
Reed H. L., Jr 7180
Reenpää Y. 7065
Rees D. 6535
Reißig R. 6687, 6688
Reissner E. 6806
Reiter H. 6913
Renwick W. 7250
Rényi A. 6926, 6932
Ribeiro Albuquerque J. 6593
Rideout V. C. 7324
Rieger G. J. 6428, 6430
Ríos S. 6973
Rizza G. B. 6635
Roach A. E. 6884
Robertson A. P. 6890
Robertson W. 6890
Rokowska B. 6379
Rooney P. G. 6871
Rosati L. A. 7086
Roșculeț M. N. 6732
Rose A. 7348
Rosenbloom P. C. 7196
Roth L. 7102
Rubens S. M. 7266
Rubinfien D. 7346
Runnenburg J. T. 6998
Rybarz J. 7054

S

Șabac I. G. 7147
Șaban G. 7129
Sagle A. A. 6472
Sakakihara K. 6646
Šalamon M. 7306
Sâmboan G. 6907
Samelson K. 7258
Sanden H. v. 7211
Sanders W. W. 7348
Sands A. D. 6496
Santman F. 7015
Sąsiada E. 6497
Satô M. 6612, 6616
Savage I. R. 6995
Savelli M. 7042
Sawyer W. W. 6847
Sbrana F. 6389
Schaafsma A. H. 7016
Schlesinger S. I. 7256
Schmetterer L. 7004 К
Schmidt O. 7220
Schneider H. 6530
Schöneborn H. 6499
Schönheim I. 6439
Schröter O. 7342

Schwarz Š. 6386, 6465
Sciama D. W. 6815
Scott W. R. 6505
Seifers 7260
Selfridge O. G. 7264
Şemin F. 7123, 7126
Selig F. 6784
Seres I. 6461
Severi F. 7112
Severo N. C. 6996
Shepperd J. A. H. 6511
Sher I. H. 7225
Shimizu T. 6690
Shinbrot M. 6960
Shire E. S. 7303
Shiren N. 7027
Shirota T. 6721, 6722
Siebel A. 7218
Siegert A. J. F. 7026, 7028
Sierpiński W. 6356, 6447, 6599
Simoda S. 6749
Simokawa Y. 7232
Sims J. C., Jr 7274
Singer I. 6899, 6900
Škerbelis K. 6375
Słowikowski W. 6889
Snapper E. 7111
Snell C. 6805
Sobolev S. L. 7193
Soos G. 7149
Speiser A. P. 7329
Springer G. 6731
Sprott D. A. 6981
Squire H. B. 6795
Srinivasan S. K. 6955
Stahl J. 7070
Stănescu C. 6794
Stavroulakis N. 7122
Steinberg J. 6824
Steinberg R. 6493
Stipanić E. 6849
Stojanowitch R. 6769
Stoppelli F. 6802
Straus E. G. 6463
Stringer J. 7010
Strother W. L. 6570
Su Bu-chin 7145
Sugiyama H. 6938, 7020
Sunouchi G. 6608
Sunyer i Balaguer F. 6588
Süray S. 6661
Surowiak W. 7233
Sutton R. M. 6406
Suzuki N. 6910, 6911
Svoboda A. 7257
Swierczkowski S. 6596
Szász F. A. 6528
Szász G. 6552
Szekeres G. 6928
Szmodits K. 6804
Szmydt Z. 6760
Sz.-Nagy B. 6644

T

Taft E. J. 6537
Takács L. 7036
Takasu T. 7090
Takeuchi J. 6862, 6864—6867
Tandori K. 6592
Tatarkiewicz K. 6484
Taussky O. 6463
Taylor D. G. 7343
Taylor S. J. 6930
Tchakaloff V. 7197
Tenca L. 6475
Terpstra T. J. 7014
Thionet P. 6940
Thiré C. 6456 K
Thomas G. E. 7268
Thompson G. T. 7194
Thorne R. C. 6674
Tierney J. A. 6460
Tillitt H. E. 7248
Tinh — Quat Phạm D. 6533
Titchmarsh E. C. 6693
Todd J. 6819, 7237
Tominari N. 7280
Tompkins C. 7008
Tonndorf R. 7336
Toraldo di Francia G. 6779
Tosi A. 6373
Totaro C. 6810, 6811
Tracy R. A. 7267
Trautman D. L. 6396
Tsuchikura T. 6587
Tukey J. W. 6980
Tyler J. 6460

U

Uchiyama M. 6974
Uchiyama S. 6616
Ulbricht H. 7227, 7228
Umezawa T. 6633

V

Vaccaro M. 6573
Vakselj A. 6512
Valach M. 7257
Van der Pol B. 6877 K
Van der Waerden B. L. 6455 K, 7003 K
Vaona G. 7128
Verbeek J. L. 7045
Verblunsky S. 6390, 6638
Vernotte P. 7216
Vidal Abascal E. 7118
Vincensini P. 7125
Viswanathan K. A. 7078
Vodička V. 6780
Voelker D. 6870
Voss H. M. 7219
Vowels R. E. 7323
Vurcfeld V. 7311

W

Wakabayashi T. 7231
Wallace A. D. 6551
Walter W. 6735, 6869
Walter W. G. 7261
Wang Shou — jen 6950
Ward L. E., Jr 6555
Warschawski S. E. 6818, 6819
Webb N. L. 7040
Webster A. G. 6767 K
Webster M. S. 6841
Weier J. 6579
Weil A. 7113
Weinstein A. 6727
Weiss E. 6536
Wendroff B. 7195
Weston J. D 6585, 6896
Whittle P. 7051
Wichers J. 7076
Widrow B. 7030
Wielandt H. 6488
Wigner E. P. 6912
Wilansky A. 6850
Wilf H. S. 7177
Wilkes M. V. 7275
Williams D. E. 6883
Wilson W. P. 6476, 6879
Wine R. L. 6976
Wintner A. 6676, 6685, 7121
Wolak J. 7224
Wolska J. 6738
Wong S. Y. 7246
Wood K. E. 7299
Wooding R. A. 7025
Woodward J. 7049
Worthy W. D. 7338
Wu Guang — lei. 7136
Wuu Jwo-chun 6689
Wu Zwao — jen 6630, 6631

X

Xeroudakes G. 6445

Y

Yamada M. 6517, 6518
Yamamoto K. 6521
Yamamuro S. 6901, 6902
Yamanaka T. 6920
Yano K. 6609
Yoneda K. 6974
Yoshihiro T. 6605
Young D. M. 6628
Young L. C. 6828

Z

Zacharov B. 7358
Zamansky M. 6895
Zaphyr P. A. 7345
Zappa G. 6489
Zarantonello E. H. 6628
Zariski O. 7097
Zarković S. S. 7019
Zartarian G. 7219
Zoubov V. 6372
Zubieta R. F. 6408

Технический редактор *Р. М. Денисова*